21世纪高等学校规划教材

GAILVLUN YU SHULI TONGJI XUEXI ZHIDAO

概率论与数理统计学习指导

刘瑞芹　闫守峰　主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

21世纪高等学校规划教材

GAILVLUN YU SHULI TONGJI XUEXI ZHIDAO

概率论与数理统计学习指导

主　编　刘瑞芹　闫守峰
副主编　刘　艳　杨　成　孙彩云
编　写　高艳辉　苗文静　仓定帮　许　璐
主　审　张凤元

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为21世纪高等学校规划教材。

本书共分8章，主要内容包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验。每章节包括知识结构图、疑难问题解答、典型例题分析、自测题及答案等。附录部分包括工科类本科数学基础课程教学基本要求以及历年考研真题。本书根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会关于工科类本科数学基础课程教学基本要求，围绕最新本科教学大纲中的教学基本要求，参阅考研数学大纲，按章节以知识点为单位进行编排，例题内容丰富、典型性强、覆盖面广，便于学生学习。

本书可作为普通高等院校非数学类专业学生学习概率论与数理统计的辅助教材，也可作为考研复习的指导用书，同时也可供高等院校相关课程教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导/刘瑞芹，闫守峰主编．—北京：中国电力出版社，2009

21世纪高等学校规划教材

ISBN 978-7-5083-8936-3

Ⅰ．概…　Ⅱ．①刘…②闫…　Ⅲ．①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．021

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第092447号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号　100044　http：//jc.cepp.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2009年7月第一版　　2009年7月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　10.5印张　254千字

定价 **18.00** 元

前　言

《概率论与数理统计》是探讨广泛存在的随机现象规律性及其应用的数学学科，是培养学生利用随机思维模式看待和处理随机现象的一门重要数学基础课程，其分析与解决问题的方法直接指导人们的研究与实践。概率论与数理统计是工科院校重要的基础课，它不仅是后继课的基础，更是将来从事理论和实际工作的基础，而且也是考研的数学科目之一。同学学好概率论与数理统计课程显得十分必要，如何进一步提高概率论与数理统计教学的质量，为后继课和人才的培养打下坚实的基础，已严峻地摆在我们面前，数学教育工作者深感重任在肩，必须面对现实，采取适当措施，用科学的方法去解决在教学过程中所遇到的各种问题。

目前，由于国内各高校招生规模的不断扩大，学生的数学基础良莠不齐，有一些同学在教学中无法跟上正常的教学进度，这些同学亟须一本能够举一反三、帮助他们理解教材内容的例题及习题类型全面的课后辅导书。为了正确引导同学的概率论与数理统计学习，从繁复的深浅不一的复习资料书丛中解放出来，我们几位长年从事在数学教学一线的教师认真地总结了多年来的教学经验，汲取了众多复习资料的精华，集体编撰了这本《概率论与数理统计学习指导》。

本书每个章节分知识结构图、疑难问题解答、典型例题分析、自测题及答案 4 个模块。例题内容丰富、典型性强，覆盖面广，且有层次，既有基本题，也有综合提高题，例题中有适当的分析过程，有些还给出了一题多解。试题的类型齐全，其中包括选择题、填空题、计算题及证明题，并附有参考答案。这样既有利于学生自学和自查对知识点的掌握和理解，又拓宽解题思路，使所学的知识能够融会贯通，可最大限度地满足各种层次同学的需求。在本书的最后又附有 2003～2009 年的研究生数学入学真题及答案。

本书由华北科技学院刘瑞芹、闫守峰担任主编，刘艳、杨成、孙彩云担任副主编。刘瑞芹编写了第三章及附录Ⅰ、Ⅱ，闫守峰编写了第一章，刘艳编写了第二章，杨成编写了第六～八章，孙彩云编写了第四、五章。高艳辉、苗文静、仓定帮、许璐在编写过程中提供了一些资料，并参加了录入工作。本书由北京化工大学张凤元担任主审。

由于水平有限，书中难免出现不妥、错漏之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

编　者

2009 年 4 月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

第一节　知识结构图

- 概率论的基本概念
  - 事件的关系和运算
    - 随机试验 E 及其特征，样本空间 S，样本点 e
    - 随机事件，事件的发生，基本事件等
    - 事件的关系及其概率含义（包含、相等、互不相容、对立）
    - 事件的运算及其概率含义（和、差、积）
    - 事件的运算律（交换律、结合律、分配律、德·摩根律）
  - 概率
    - 定义和性质
      - 概率的统计定义
      - 概率的公理化定义（非负性、规范性、可列可加性）
      - 概率的性质（有限可加性等）
    - 计算
      - 古典概型
      - 条件概率、乘法公式
      - 全概率公式、贝叶斯公式
  - 事件的独立性
    - 事件独立性的定义
    - 伯努利试验

第二节　疑难问题解答

1. 同一随机试验中，样本空间的选取是否唯一？

对同一个随机试验，当试验的目的不同时，样本空间一般也不同．例如，一个袋中装有编号为1～5的5个球，其中1～3号球为白球，4～5号球为红球，现从中任取一球．若试验目的是考察取出的球的颜色，则样本空间为 $\Omega_1=\{$白色，红色$\}$；若试验的目的是考察取出的球的编号，则样本空间为 $\Omega_2=\{1，2，3，4，5\}$．Ω_1 和 Ω_2 显然不同．

2. 如何理解对立事件和互不相容事件之间的联系和区别？

若事件 A 与 B 是对立事件，则有 $A=\overline{B}$．在一次试验中，对立事件 A 与 B 必有一个发生，且仅有一个发生．

若事件 A 与 B 是互不相容事件，则 A 与 B 不能同时发生．但 A 与 B 也可能同时不发生．可见，对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件不一定是对立事件．

区别对立事件和互不相容事件的关键是：对立事件考虑的样本空间只有两个事件存在，每次试验都有且仅有一个事件发生；而互不相容事件考虑的样本空间允许有多个事件存在，每次试验中互不相容的两个事件不能同时发生．例如，某人在一次考试中，及格和不及格总有一个且只能有一个发生，它们是对立事件，当然也是互不相容的；但考试成绩为50分和考试成绩为80分不能同时发生，却可能同时不发生，因此是互不相容事件，但不是对立事件．

3. 如何理解互不相容事件和相互独立事件之间的联系和区别？

互不相容事件和相互独立事件是两个不同的概念，二者不能混淆．两个事件互不相容是

指两个事件不可能同时发生；两个事件相互独立是指一个事件的发生对另一个事件的发生没有影响. 它们虽然都描述的是两个事件之间的关系，但所描述的关系是完全不同的. 对两个概率非零的事件来说，若两个事件互不相容，则说明一个事件的发生对另一个事件的发生有影响，因此，这两个事件一定不相互独立. 反之，若两个事件相互独立，则说明两个事件的发生之间没有影响，因此，这两个事件不可能是互不相容的. 事实上，考虑 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 的情形，若 A、B 互不相容，则 $P(AB)=0$，但 $P(A)P(B)\neq 0$，从而 $P(A)P(B)\neq P(AB)$，即 A、B 不相互独立.

4. 在实际应用中，如何判断两事件的独立性?

在实际应用中，对两事件的独立性，我们往往不是根据问题去判断，而是根据问题的实质，即直观上看一个事件的发生是否影响另一事件的发生来判断. 例如，两人在相同条件下进行射击，则认为“甲击中目标”和“乙击中目标”是相互独立的.

5. 有放回抽样和无放回抽样有什么区别?

“有放回抽样”是指从样本空间中抽取样本观察后放回的方式，两次抽取时样本空间不变，因此可看成是独立重复抽样，计算概率时一般可以利用随机事件的独立性进行简化. 而“无放回抽样”是指从样本空间抽取样本观察后不再放回的方式，这时两次抽样的样本空间发生了变化，此时，计算概率不能利用独立性.

6. 频率和概率之间有何关系? 能否将概率看作频率的极限?

随机事件 A 发生的频率 $f_n(A)$，是指在相同条件下重复做 n 次试验，事件 A 发生的次数 n_A 与试验的总次数 n 的比值. 它反映事件 A 发生的频繁程度. 当 n 不同或在不同组试验时，$f_n(A)$ 的值一般是不同的. 但当 n 充分大时，频率 $f_n(A)$ 会在某一个值 $P(A)$ 附近徘徊，并且 n 越大，偏离的幅度越小. 称常数 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率，这是概率的统计定义，它从数量上反映了事件发生的可能性大小. 在大量重复试验的前提下，频率 $f_n(A)$ 可近似地作为事件 A 发生的概率.

将概率看作频率的极限是错误的. 第一，统计概率只适用于 n 次独立重复试验，对其他概率模型不适用；第二，当 $n\to\infty$ 时，$f_n(A)$ 在 $P(A)$ 附近徘徊，不同于 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(A)=P(A)$，因为由于随机现象的偶然性，对于某个给定的 $\varepsilon>0$，可能找不到相应的 $N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，$|f_n(A)-P(A)|<\varepsilon$ 成立.

7. 如何判断所讨论的问题是排列问题还是组合问题?

在计算样本空间 Ω 和事件 A 所包含的基本事件数时，与问题是排列问题还是组合问题有关. 当事件的组成与顺序无关时，是组合问题，否则，是排列问题.

例如，袋中有 4 个红球，6 个白球，从中任取两个，有两种方法：一种方法是一次取出两个，这种方法与顺序无关，是组合问题，共有 C_{10}^2 种取法；另一种方法是任取两次，每次取一个球，这种方法与顺序有关，是排列问题，共有 P_{10}^2 种取法.

8. 什么是“实际推断原理”? 它与小概率事件原则有何关系?

概率很小的事件称为“小概率事件”. 可以证明，不论事件 A 出现的概率多么小，只要不断的、独立的进行重复实验，事件 A 迟早会出现的概率为 1.

但人们从大量的实践中总结出“概率很小的事件在一次试验中几乎是不发生的”. 这一经验称为“实际推断原理”. 根据“实际推断原理”，如果小概率事件在一次试验中竟然发生了，则我们就有理由怀疑该事件是小概率事件的正确性.

9. 如何计算积事件的概率 $P(AB)$?

一般的，当 $P(A)>0$ 或 $P(B)>0$ 时，有 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$ 或 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)$. 若 $B\subset A$，则有 $P(AB)=P(B)$；若 $A\subset B$，则有 $P(AB)=P(A)$；若 A 与 B 相互独立，则有 $P(AB)=P(A)P(B)$.

10. 如何计算和事件的概率 $P(A\cup B)$?

一般的，有概率的加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. 若 $B\subset A$，则 $P(A\cup B)=P(A)$；若 $A\subset B$，则 $P(A\cup B)=P(B)$；若 A 与 B 互不相容，即 $AB=\phi$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；若 A 与 B 相互独立，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

或

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$$

11. 如何区分随机事件的相互独立和随机试验的相互独立?

随机事件的相互独立是指在同一随机试验中各个事件的发生互不影响. 随机试验的相互独立有两种情况：一是指重复试验的独立性，如 n 重伯努利试验；二是指不同随机试验中的随机事件间的独立性，如独立重复投篮 n 次，每次是否命中是相互独立的.

第三节 典型例题分析

【例 1-1】 在某系学生中任选一名学生，令事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示被选学生是三年级学生，事件 C 表示该生是运动员. 试回答

(1) 叙述 $AB\overline{C}$的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(3) 什么时候关系式 $C\subset B$ 是正确的?

(4) 什么时候 $\overline{A}=B$ 成立?

解 本例是将用符号表示的事件用语言叙述，及考察事件间的关系.

(1) $AB\overline{C}$ 表示被选学生为不是运动员的三年级男生；

(2) 当所有运动员全为三年级男生时 $ABC=C$ 成立；

(3) 当所有运动员全为三年级学生时 $C\subset B$ 成立；

(4) 当女生全是三年级学生且三年级学生全为女生时 $\overline{A}=B$ 成立.

【例 1-2】 设 $A=$ "甲产品畅销，乙产品滞销"，求 A 的逆事件.

解 本例是用事件描述一事物，设 B_1，B_2 分别表示甲、乙两产品畅销，由题设 $A=B_1\overline{B_2}$，再由对偶原理

$$\overline{A}=\overline{B_1\overline{B_2}}=\overline{B_1}\cup\overline{\overline{B_2}}=\overline{B_1}\cup B_2$$

因此 A 的对立事件是"甲产品滞销或乙产品畅销".

【例 1-3】 已知 A，B 是样本空间 Ω 中的两个事件，且 $\Omega=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，$A=\{b,d,f,h\}$，$B=\{b,c,d,e,f,g\}$，试求：$AB$；$A\cup B$；$A-B$；$\overline{A}$.

解 按照事件运算定义，写出各相应事件的子集为

$$AB=\{b,d,f\};\ A\cup B=\{b,c,d,e,f,g,h\};\ A-B=\{h\};\ \overline{A}=\{a,c,e,g\}.$$

【例 1-4】 连续进行三次独立射击，设 $A_i=$ "第 i 次射击击中目标"，$i=1,2,3$. 试用 A_i 表示下列事件：

(1) B_1=恰好击中目标两次；

(2) B_2=至少击中目标一次；

(3) B_3=至少击中目标两次.

解 (1) $B_1=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$.

(2) $B_2=A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $B_2=\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}$；

或 $B_2=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

(3) $B_3=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$ 或 $B_3=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$.

说明：事件的关系和运算不仅在讨论各事件间的关系时用到，而且在概率计算中也经常需要将一些事件用其他事件的运算关系来表示或作等价变换和变形等. 利用事件间的关系与运算将复杂事件用简单事件表示，其中包括对事件的和、差、积、对立、互不相容等的应用，以及对事件积的分配律、差化积与对偶律、吸收律的应用. 特别要注意对“恰有”、“只有”、“至多”、“至少”、“不多于”、“不少于”、“都发生”、“不都发生”、“都不发生”等描述语言的理解. 在分析和理解事件间的关系时，还经常需要用文氏图直观理解，有时可用对立事件描述.

【例 1-5】 4 个温控器只要两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉将断电. 试证明：假定 $T_1\leqslant T_2\leqslant T_3\leqslant T_4$，是 4 个温控器从小到大显示的温度，$E$=“电炉断电”，则 $E=\{T_3\geqslant t_0\}$.

解 两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，即至少 $T_3\geqslant t_0$，因此 $E=\{T_3\geqslant t_0\}$.

【例 1-6】 若 $P(AB)=0$，则（　　）成立.

(A) A、B 互斥　　(B) $A\cap B=\phi$

(C) AB 未必为不可能事件　　(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

解 根据概率的定义与性质，概率为零的事件不一定是不可能事件，故选 C.

【例 1-7】 设 A、B 是任意两随机事件，则 $P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=$____.

解 由分配律和吸收律 $(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})=(AB\cup\overline{A}B\cup B)\cap(A\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B})=B\cap\overline{B}=\phi$，故

$$P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=P\{\phi\}=0.$$

【例 1-8】 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=0.25$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=0.15$，则事件 A、B、C 全不发生的概率为________.

解 由 $P(AB)=0$ 可知 $P(ABC)=0$，于是 A、B、C 全不发生的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-[0.25+0.25+0.25-0.15-0.15]=0.55.\end{aligned}$$

【例 1-9】 设事件 A，B 仅发生一个的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.5$，则 A，B 至少有一个不发生的概率为________.

解 由题意，$0.3=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=0.5-2P(AB)$，所以

$$P(AB)=0.1,$$

于是，A，B 至少有一个不发生的概率为

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.9.$$

【例 1-10】 10 把钥匙有 3 把能把门锁打开．今任取两把．求能打开门的概率．

解　设 A 表示“能把门锁打开”，则有利于事件 A 的基本事件数为 $n_A=C_3^1C_7^1+C_3^2$，而从 10 把钥匙中任取两把共有 $n=C_{10}^2$ 中取法，故

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{C_3^1C_7^1+C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}.$$

【例 1-11】 50 个产品中有 46 个合格品与 4 个次品，从中抽取 3 个，求：

(1) 恰好取到一个次品的概率；

(2) 至少取到一个次品的概率．

分析　设 A 表示“恰好取到一个次品”，B 表示“至少取到一个次品”．抽取方式可看作一次抽取 3 个，也可看作依次不放回抽取 3 次，每次 1 个．

解　方法一　将试验看作一次抽取 3 个，即取出的产品与顺序无关，则样本点总数为 $n=C_{50}^3$．

(1) A 包含的样本点数为 $n_A=C_4^1C_{46}^2$，于是 $P(A)=\dfrac{C_4^1C_{46}^2}{C_{50}^3}=0.211\ 2$．

(2) 事件 B 本身较复杂，考虑 B 的逆事件 $\overline{B}=$“没有取到次品”，由于 $\overline{B}$ 包含的样本点数为 $n_{\overline{B}}=C_{46}^3$，故

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{46}^3}{C_{50}^3}=0.225\ 5.$$

方法二　将试验看作依次不放回抽取 3 次，即取出的产品与顺序有关，则样本点总数为 $n=P_{50}^3$．

(1) A 的基本事件数相当于 3 次中有一次从 4 件次品中任取一件，其他 2 次从正品中各取一件，故 $n_A=C_3^1C_4^1P_{46}^2$，于是 $P(A)=\dfrac{C_3^1C_4^1P_{46}^2}{P_{50}^3}=0.211\ 2$．

(2) $\overline{B}$ 包含的样本点数为 $n_{\overline{B}}=P_{46}^3$，故

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{P_{46}^3}{P_{50}^3}=0.225\ 5.$$

【例 1-12】 一批产品中共有 10 件正品，2 件次品，任意抽取两次，每次一件，抽出后不再放回，求第二次抽出次品的概率．

解　方法一　按古典概型计算．共有 12×11 种取法，设 $A=\{$第二次取次品$\}$，则有利事件 A 的基本事件数为 $C_2^1C_1^1+C_{10}^1C_2^1=2+10\times2=22$，故 $P(A)=\dfrac{22}{11\times12}=\dfrac{1}{6}$．

方法二　按全概率公式计算．设 A_1，A_2 分别表示第一次、第二次取到次品，则

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{10}{12}\times\frac{2}{11}+\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{6}.$$

说明：由于第一次取到次品的概率 $P(A_1)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$，而两次都取到次品的概率为

$$P(A_1A_2)=\frac{C_2^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{\frac{12\times11}{2}}=\frac{1}{66},$$

因此有
$$P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\neq P(A_1A_2),$$

故 A_1 与 A_2 不独立. 这表明：**有放回抽样概率相等且独立，不放回抽样概率相等但不独立.**

【例 1-13】 箱中盛有 α 个白球，β 个黑球，将球一只只（不放回）取出，问第 k 次取出的球为白球的概率.

说明：设 $A=$｛第 k 次取到白球｝，这时不能按［例 1-12］方法考虑，可采取“定位”方法处理，先确定特殊的、感兴趣的.

解 方法一　假设球除颜色不同外没有区别. 在 $\alpha+\beta$ 个位置上确定 α 个位置放白球，余下的 β 个位置放黑球，共有 $C_{\alpha+\beta}^{\alpha}$ 种可能.

有利事件 A 可这样考虑：先在第 k 个位置放白球，余下的 $\alpha+\beta-1$ 个位置确定 $\alpha-1$ 个位置放白球，余下的位置上放黑球，共有 $C_{\alpha+\beta-1}^{\alpha-1}$ 种可能，于是

$$P(A)=\frac{C_{\alpha+\beta-1}^{\alpha-1}}{C_{\alpha+\beta}^{\alpha}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

方法二　假设 $\alpha+\beta$ 个球是有区别的. 将白球黑球编号成 $1,\cdots,\alpha,\alpha+1,\cdots,\alpha+\beta$，将 $\alpha+\beta$ 个球逐一取出作为一个基本事件，则基本事件总数为 $n=(\alpha+\beta)!$，有利事件 A 可这样考虑：在第 k 位置放白球，有 α 种可能，余下的 $\alpha+\beta-1$ 个位置放 $\alpha+\beta-1$ 个球，有 $(\alpha+\beta-1)!$ 种可能，故有利事件 A 的基本事件数为 $\alpha(\alpha+\beta-1)!$. 于是

$$P(A)=\frac{\alpha(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha+\beta)!}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

方法三　假设 $\alpha+\beta$ 个球是有区别的. 考虑只取 k 个球，（因为后面取到的球与问题无关），则有 $P_{\alpha+\beta}^{k}$ 种取法，而有利事件 A 的基本事件数为 $\alpha P_{\alpha+\beta-1}^{k-1}$. 故仍有

$$P(A)=\frac{\alpha P_{\alpha+\beta-1}^{k-1}}{P_{\alpha+\beta}^{k}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

【例 1-14】 袋中装有 $N-1$ 只黑球 1 只白球，每次从袋中随机取出一球，然后换入一只黑球，这样继续下去，求第 k 次取到黑球的概率.

解 直接计算很困难，因为前 $k-1$ 次的情况太复杂［有可能第 j（$j\leqslant k$）次取到白球，而换回黑球，有可能均没摸到过白球］. 而其逆事件是第 k 次取到白球，这意味着前 $k-1$ 次摸到的一定都是黑球（否则，将换走白球，不存在白球）.

设 $A=$｛第 k 次摸到黑球｝，$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{k-1}\dfrac{1}{N}$.

【例 1-15】 从数 $1,2,3,\cdots,n$ 中任意取两数，求所取两数之和为偶数的概率.

解 设 $A_i=$第 i 次取到奇数（$i=1,2$）；$A=$两次的和为偶数. 则

$$P(A)=P(A_1A_2\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}).$$

当 n 为奇数时：$P(A)=\dfrac{\frac{n-1}{2}+1}{n}\dfrac{\frac{n-1}{2}}{n-1}+\dfrac{\frac{n-1}{2}}{n}\dfrac{\frac{n-1}{2}-1}{n-1}=\dfrac{n-1}{2n}.$

当 n 为偶数时：$P(A)=\dfrac{\frac{n}{2}}{n}\dfrac{\frac{n}{2}-1}{n-1}+\dfrac{\frac{n}{2}}{n}\dfrac{\frac{n}{2}-1}{n-1}=\dfrac{n-2}{2(n-1)}.$

【例 1-16】 某市有 N 辆汽车，编号 $1,\cdots,N$，有人将他遇到过的 n 辆汽车（可以重复）的牌号全部记录下来，假设每辆车被遇到的机会相同，求抄到的最大号码恰是 k（事件 A）的概率.

解 （用排除法）号码允许重复，故样本点总数为 N^n. 用 A_j 表示 n 辆车的号码均不超过 j，于是 $n_{A_k}=k^n$，$n_{A_{k-1}}=(k-1)^n$，$n_A=k^n-(k-1)^n$，所以

$$P(A)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

【例 1-17】 一副扑克去掉大小王（共 52 张），从中任取 5 张，求取到 full house（三张同点牌外加一对）（事件 A）的概率 α 和双对（事件 B）的概率 β.

解 按牌点分类，共 13 种牌点，事件 A 只有两种牌点，从 13 种牌点中取两种牌点，共有 C_{13}^2种取法如 Q，5；从两种牌点中指定一种为三张的如 Q，有 C_2^1 种取法，再从四种花色中分别取三张 Q，两张 5 共有 $C_4^3\times C_4^2$ 种取法，故 $n_A=C_{13}^2C_2^1C_4^3C_4^2$，而样本点总数 $n=C_{52}^5$，所以

$$\alpha=P(A)=C_{13}^2C_2^1C_4^3C_4^2/C_{52}^5.$$

同理，双对的概率为

$$\beta=P(B)=C_{13}^3C_3^1C_4^1C_4^2C_4^2/C_{52}^5.$$

【例 1-18】 从 5 双不同的鞋中，任取 4 只，求至少有两只鞋子能配成一双的概率.

解 方法一 记 $A=$“4 只鞋子至少有两只能配成一双”，$B=$“4 只鞋子恰好有两只鞋子能配成一双”，$C=$“4 只鞋子恰好能配成两双”，则 $A=B\cup C$，如果从 5 双鞋中一次取出 4 只，则基本事件总数为 $C_{10}^4=210$. 有利于 B 的基本事件，可设想先从 5 双鞋中任取一双，再从余下的 4 双鞋中任取两双，然后从这两双中各取一只，$n_B=C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$，同理 $n_C=C_5^2$，于是 $n_A=n_B+n_C=130$，则

$$P(A)=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}.$$

说明：1）有利于 B 的基本事件，也可设想先从 5 双鞋中任取三双，然后取其中一双，再从余下的 2 双鞋各任取一只，$n_B=C_5^3C_3^1C_2^1C_2^1=120$.

2）有利于 A 的基本事件，也可设想为先从 5 双鞋中任取一双，然后从剩下的 8 只鞋中任取 2 只，但此时“4 只鞋子恰好能配成两双”重复计算了一次，需减去，故有 $n_A=C_5^1C_8^2-C_5^2=130$ 或 $n_A=C_5^1\left[C_8^2-C_4^1\right]=130$.

方法二 考虑 $\overline{A}=$“4 只鞋子中任何两只都不能配成一双”，有利于 $\overline{A}$ 的基本事件，可设想先从 5 双鞋中任取四双，再从 4 双鞋中各取一只，于是 $n_{\overline{A}}=C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=80$，则

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{80}{210}=\frac{13}{21}.$$

方法三 设想从 5 双鞋中任取 4 只是逐一取出的，则基本事件总数为 $P_{10}^4=10\times9\times8\times7$. 有利于 $\overline{A}=$“4 只鞋子中任何两只都不能配成一双”的基本事件，可考虑先从 5 双 10 只鞋中任取一只（10 种取法），再从余下的 4 双 8 只鞋中任取一只（8 种取法），依次类推，可知 $n_{\overline{A}}=10\times8\times6\times4$，则

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}.$$

【例 1-19】 将 n 个球随机放入 N（$n\leqslant N$）个盒子中，设每个盒子可放任意多个球，试求下列事件的概率：

$A=$“指定的 n 个盒子各有一球”；

$B=$“恰有 n 个盒子各有一球”；

$C=$"某指定的 k ($k\leqslant n$) 个盒子各有一球";

$D=$"某指定的一个盒子恰有 k ($k\leqslant n$) 个球".

解　设想球和盒子都是有区别的，共有 N^n 种放法.

有利事件 A 的基本事件数为 $n!$，于是 $P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$；

有利事件 B 的基本事件数为 $C_N^n n!=P_N^n$，于是 $P(B)=\dfrac{P_N^n}{N^n}$；

有利事件 C 的基本事件数为 $P_n^k(N-k)^{n-k}$，于是 $P(C)=\dfrac{P_n^k(N-k)^{n-k}}{N^n}$；

有利事件 D 的基本事件数为 $C_n^k(N-1)^{n-k}$，于是 $P(D)=\dfrac{C_n^k(N-1)^{n-k}}{N^n}$.

【例 1-20】　一部电梯有 8 位乘客，电梯从底楼出发到 10 楼，各层下楼的可能性相同，求电梯在第 i 层停的概率.

解　直接求很复杂，在一楼停，有可能一名乘客下，也可能多名乘客下，在 i 楼停，又受在 $i-1$ 楼下的乘客多少的影响.

记 A_i 为电梯在第 i 层停的事件，每位乘客不在 i 层下的概率是 $\dfrac{9}{10}$，都不下的概率为

$$P(\overline{A_i})=\left(\frac{9}{10}\right)^8,$$

于是

$$P(A_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^8.$$

【例 1-21】　(配对问题) 某人写了 n 封不同地址的信，现将这 n 封信随意插入 n 个具有不同地址的信封里，求至少有一封信插对信封的概率.

解　设 $A=$"至少有一封信插对信封"，$A_i=$"第 i 封信插对信封" ($i=1, 2, \cdots, n$).由广义加法公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big)\\&=\sum_{i=1}^n P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n),\end{aligned}$$

易知

$$P(A_i)=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$P(A_iA_j)=\frac{1}{n(n-1)}\quad(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n),$$

$$P(A_iA_jA_k)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\quad(i,j,k\text{ 互不相等}),$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}.$$

所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big)\\&=1-C_n^2\frac{1}{n(n-1)}+C_n^3\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\\&=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

【例 1-22】 将 n 个球随机地放到 r 个盒中（$n>r$），求没有空盒的概率．

解 将盒子并放在一起，用“1”表示盒子的壁，“0”表示球，r 个盒子共 $r+1$ 个壁，球不能放在盒外，将壁、球混放在一起，一头一尾放壁，样本空间（Ω）相当于 $r-1+n$ 个两种元素的摆放方法，共有 C_{n+r-1}^{r} 种排法，有利事件是两侧先放壁，n 个球放在两壁中，即形如 100…01，n 个球有 $n-1$ 个空，在 $n-1$ 个空中插入 $r-1$ 个壁，就构成了没有空盒的事件，故 $P(A)=\dfrac{C_{n-1}^{r-1}}{C_{n+r-1}^{r}}$.

【例 1-23】 一间宿舍住有 6 位同学，求他们中有 4 个人的生日在同一个月份的概率.

解 设 A 表示“有 4 个人的生日在同一月份”．由于 6 个人中每个人的生日都可以在 12 个月的任一月，故样本点总数为 $n=12^6$．有 4 个人的生日在同一月，可理解为从 6 人中选 4 人，其生日从 12 个月中选 1 个月，而其他 2 人生日可在剩下的 11 个月中的任一月，于是，$n_A=C_6^4C_{12}^1\times 11^2$，故

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{C_6^4\times C_{12}^1\times 11^2}{12^6}=0.0073.$$

【例 1-24】 如图 1-1（a）所示，在平面上画出等距离 $a(a>0)$ 的一些平行线，向平面上随机地投掷一根长 $l(l<a)$ 的针，求针与任一平行线相交的概率．

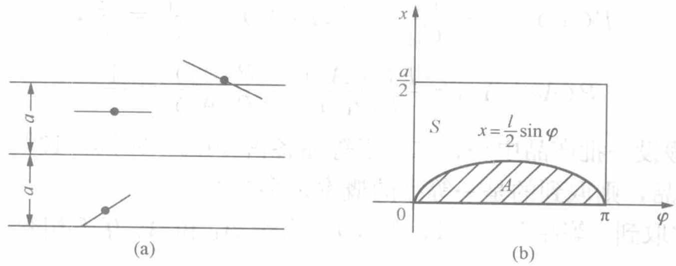

图 1-1

解 设 $A=$“针与某平行线相交”，针落在平面上的情况不外乎图 1-1（a）中的几种．如图 1-1（b）所示，设 x 为针的中点到最近的一条平行线的距离．φ 为针与平行线的夹角，则

$$0<x<\frac{a}{2},0<\varphi<\pi,$$

不等式确定了平面上的一个区域 S，则

$$A\text{ 发生}\Leftrightarrow x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi,$$

不等式确定 S 的子域 A，故

$$P(A)=\frac{1}{\frac{a}{2}\pi}\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{2l}{a\pi}$$

【例 1-25】 已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B|A)=0.8$，求 $P(A\cup B)$.

解 利用加法公式、乘法公式计算事件概率，有

$$P(AB)=P(B|A)P(A)=0.4,$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7.$$

【例 1-26】 已知 $P(\overline{A})=0.4$，$P(B)=0.5$，$P(A|\overline{B})=0.8$，求 $P(A|B)$.

解 $P(A\overline{B})=P(\overline{B})P(A|\overline{B})=(1-0.5)\times 0.8=0.4$，又

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB),$$

故可得

$$P(AB)=0.2,$$

于是

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0.2/0.5=0.4.$$

【例 1-27】 设 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B\mid\overline{A})=0.8$，求 A，B 至少发生一个的概率.

解 由 $0.8=P(B\mid\overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{1-P(A)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{0.5}=\dfrac{0.6-P(AB)}{0.5}$

得

$$P(AB)=0.2,$$

故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.2=0.9.$$

【例 1-28】 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取 2 件，已知所取的两件产品中有 1 件是不合格品，求另一件也是不合格品的概率.

解 设 $A_1=$"至少有 1 件不合格品"，$A_2=$"2 件均为不合格品"，则

$$P(A_1)=1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3},P(A_2)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15},$$

所以

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{P(A_2)}{P(A_1)}=\frac{1}{5}.$$

【例 1-29】 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%，30%，10%，从中任意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率是多少？

解 设 $A_i=$"取到 i 等品"（$i=1$，2，3），由于 A_1 和 A_3 互不相容，故有 $A_1\overline{A_3}=A_1$，于是

$$P(A_1\mid\overline{A_3})=\frac{P(A_1\overline{A_3})}{P(\overline{A_3})}=\frac{P(A_1)}{P(\overline{A_3})}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}.$$

【例 1-30】 设 $P(A)=a$，$P(B)=b$（a,b 均大于 0），证明 $\dfrac{a}{b}\geqslant P(A\mid B)\geqslant\dfrac{a+b-1}{b}$.

证 因为 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，$P(A)=a$，$P(B)=b$，由概率的性质知 $AB\subset A$，则

$$P(AB)<P(A)=a,$$

又因为

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B),$$

且

$$0\leqslant P(A\cup B)\leqslant 1,$$

所以

$$P(AB)\geqslant a+b-1,$$

故

$$\frac{a}{b}\geqslant P(A\mid B)\geqslant\frac{a+b-1}{b}.$$

【例 1-31】 甲袋中有 2 个白球 1 个黑球，乙袋中有 1 个白球 2 个黑球，从甲袋中任取 1 球放入乙袋，再从乙袋中任取 1 球放入甲袋，求甲袋中仍是 2 个白球 1 个黑球的概率.

解 设 $A=$从甲袋中取白球，$B=$从乙袋中取白球，则

$$P(AB\cup\overline{A}\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}\overline{B})=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{7}{12}.$$

【例 1-32】 某商店拥有某产品共计 12 件，其中 4 件次品，已经售出 2 件，现从剩下的 10 件产品中任取一件，求这件是正品的概率.

解 设 $A=$“取出的是正品”，$B_i=$“售出的两件中有 i 件正品”，$i=0$，1，2. 则由全概率公式，有

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A\mid B_i)=\frac{C_8^0C_4^2}{C_{12}^2}\times\frac{8}{10}+\frac{C_8^1C_4^1}{C_{12}^2}\times\frac{7}{10}+\frac{C_8^2C_4^0}{C_{12}^2}\times\frac{6}{10}=0.67.$$

【例 1-33】 盒中放有 5 个乒乓球，其中 4 个是新的，第一次比赛时从盒中任意取 2 个球去用，比赛后放回盒中，第二次比赛时再从盒中任意取 2 个球，求第二次比赛时取出的 2 个球都是新球的概率.

解 设 $A_i=$“第一次比赛时拿到 i 只新球”$(i=1, 2)$，$B=$“第二次比赛时拿到 2 只新球”，则由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)\\&=\frac{C_4^1}{C_5^2}\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{C_4^2}{C_5^2}\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{9}{50}.\end{aligned}$$

【例 1-34】 两台机床加工同样的零件，第一台加工的零件比第二台多一倍，而它们生产的废品率分别为 0.03 与 0.02，现把加工出来的零件放在一起.

(1) 从中任意取一件而得到合格品的概率；

(2) 如果任意取一件得到的是废品，它是第一台机床所加工的概率.

解 设 $A_i=$“取出的零件为第 i 台机床加工的”$(i=1, 2)$，$B=$“取出的为合格品”.

(1) 由全概率公式，有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)\\&=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.98=0.973.\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式，有

$$P(A_1\mid\overline{B})=\frac{P(A_1)P(\overline{B}\mid A_1)}{1-P(B)}=0.74.$$

【例 1-35】 玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.8，0.1，0.1，顾客购买时，售货员随意取一箱，顾客随机查看 4 只，若无残次品，则买下，否则退回，试求：

(1) 顾客买下该箱的概率 α；

(2) 顾客买下的一箱中，确实无残次品概率 β.

解 设 $B_i=\{$箱中有 i 件次品$\}$，$i=0$，1，2，$A=\{$顾客买下该箱$\}$，则

$$P(B_0)=0.8, P(B_1)=P(B_2)=0.1, P(A|B_i)=\frac{C_{20-i}^4}{C_{20}^4}(i=0,1,2),$$

于是，由全概率公式，有

$$\alpha=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A\mid B_i)=0.8\times1+0.8\times0.1+12/19\times0.1=0.94,$$

由贝叶斯公式，有