上海十大名牌高中联编

直击名牌大学

优等生数学教程

高中第二册

主编■熊斌　徐斌艳

本册核心作者

刘　寅（复兴高级中学）

张　雄（延安中学）

刘　云（复旦附中）

杨岚清（大同中学）

曹建华（交大附中）

陈双双（华东师大二附中）

华东师范大学出版社

牛顿迭代法与分形图案

牛顿是一位伟大的科学家，他在数学、物理、天文学和自然哲学等多个领域都作出了卓越的贡献。他的很多学术成果已经成为经典，譬如牛顿迭代法。

很难想象，几百年前牛顿为求方程近似根而提出的牛顿迭代法竟然还能做出美妙的图案来。封面就是在计算机上利用牛顿迭代法求解 $x^3=1$ 时的图案。单位 1 有 3 个根，均匀地分布在单位圆上，这三个根周围共有三个“吸引盆”，初始点迅速被吸引到盆内，最后停止在三点之一。用计算机迭代，以当前点到三个终点的距离远近为标准，标上不同的颜色，就能得到美丽的分形图。

（彭翕成）

ISBN 978-7-5617-6561-6
9 787561 765616 >
定价：29.00元
www.ecnupress.com.cn

优等生数学

教程

高中第二册

主编 ■ 熊　斌　徐斌艳

本册核心作者

刘　寅（复兴高级中学）

张　雄（延安中学）

刘　云（复旦附中）

杨岚清（大同中学）

曹建华（交大附中）

陈双双（华东师大二附中）

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

优等生数学教程. 高中. 第2册/熊斌, 徐斌艳主编.
—上海:华东师范大学出版社, 2008
(优等生数学)
ISBN 978-7-5617-6561-6

Ⅰ. 优… Ⅱ. ①熊…②徐… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第196649号

优等生数学教程
高中第二册

主　　编　熊　斌　徐斌艳
策　　划　倪　明(数学工作室)
组　　稿　倪　明　任念兵
审读编辑　陈信漪　任念兵
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电话总机　021-62450163转各部门　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　上海界龙艺术印刷有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　17.75
字　　数　328千字
版　　次　2009年1月第一版
印　　次　2009年1月第一次
印　　数　8000
书　　号　ISBN 978-7-5617-6561-6/G·3821
定　　价　29.00元

出 版 人　朱杰人

前　言

亲爱的同学,如果你是一位优秀、好学、勤奋、热爱数学的学生,在学习现有教材的同时,你一定渴望有挑战自己智力又充满探究情趣的课程内容.满足你的需要是我们的义务和责任,为提高你的数学思维能力,发挥你学习数学的潜力,我们组织编写了《优等生数学教程》.希望这套教程能帮助你尽快成为一名优等生.

在21世纪的钟声敲响之时,我国迎来了新一轮的数学课程改革,它首先体现在课程和教材的多样化和多元化.新一轮课程改革鼓励我们为学有余力、学有特长的学生设计、开发专门的校本课程,让那些学生在打好扎实基础的同时,能寻找到适合他们智力水平发展的课程内容,学习到满足自己学习需求的数学内容和思想方法.作为数学教育工作者,我们应义不容辞地承担起这一任务.

在策划编写这套教程的过程中,我们特别邀请了熟悉数学课程改革目标、具有丰富教学经验、又拥有高深数学专业水平的优秀教师直接参与.我们与这些优秀的编写者汇聚在一起,认真解读数学课程标准的要求,结合数学教学内容的实际需求,尤其是系统分析优秀学生的学习特点,设计出了富有特色的教程结构,然后大家通力合作、沟通协商,充分发挥自己的智慧,编写出这套教程.

这套教程包括如下几个栏目:

知识要点:为你梳理本单元涉及的知识重点和难点,提供一个知识网络.

典型例题:为你提供有代表性的数学例题,并且利用"解题指要"点拨解决每个例题的关键步骤和所包含的数学思想方法.

寻根问底:为你解答知识要点的来龙去脉,介绍相关的知识背景.

举一反三:为你提供巩固型的例题,加深对问题的理解,提高解题技能.

融会贯通:为你创设问题情境,让你充分发挥对知识的理解.

参考答案:提供解题的线索或者答案,帮助你进行学习的自我评价.

本章回顾:再次帮助你梳理所经历的概念性知识和应用性知识.

根据目前的教学情况,我们将高中的《优等生数学教程》分成四册.同时,我们还配套设计了《优等生数学习题集》,这是一个精心筛选后形成的习题库,每道习题的解答一方面检验你对数学知识的掌握程度,另一方面检验你对习题背后所涉及的思想方法的理解程度.这也是一本很适合你静静阅读、深入思考以及充分练习的"习题集".与教程结合使用,才能达到预期的效果.

本书是这套教程中的高中第二册,适合上海市高中一年级的学生使用,其内容包括三角比,三角函数,数列、极限与数学归纳法,平面向量,矩阵和行列式,算法初步等六章.第五章由复兴高级中学的刘寅和薛建国老师编写;第六章由延安中学的吴瑾辉和张雄老师编写;第七章由复旦附中的刘云老师编写;第八章由大同中学的杨岚清老师编写;第九章由交大附中的曹建华和侯磊老师编写;第十章由华东师大二附中的陈双双老师和华师大教育硕士王江编写.

对我们而言,编写主要供优等生使用的教程是一次尝试,定有不足之处,欢迎提出批评和建议,以便日臻完善.

熊　斌　徐斌艳

2008.12

目录_Contents

第5章　三角比

本章首先引进了任意角的概念，并通过引入弧度制，在任意角的集合与实数之间建立了一一对应的关系. 简言之：将角度实数化，以便下一章可以把实数化的角作为三角函数的自变量.

然后，用任意角三角比的定义，研究同角三角比的关系，以及通过诱导公式将任意角的三角比转化为锐角三角比来计算，进而又导出两角和与差、倍角、半角、万能、积化和差与和差化积公式，这些公式称之为三角比的恒等变换，其目的是变角、变名、变幂（增、降幂）、变运算. 熟悉这些变换，不但是下一章学习三角函数的需要，也是将来学习高等数学、物理等学科的需要.

学习解斜三角形重在应用，特别在几何、测量等方面，这也是三角教学的一个重要目的.

5.1 任意角及其度量

知识要点

1. 一条射线绕端点按逆时针方向旋转得**正角**,其度量值是正的;按顺时针方向旋转得**负角**,其度量值是负的;一条射线没有旋转时得**零角**.

2. **象限角**:在平面直角坐标系中,把角的顶点置于坐标原点,角的始边与 x 轴的正半轴重合,此时角的终边在第几象限,就说这个角是第几象限的角,或者说这个角属于第几象限. 当角的终边在坐标轴上时,这些角不属于任何象限.

3. 与某一个角 α 的始边相同且终边重合的角有无数个. 与角 α 的终边重合的角的集合可表示为: $\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

4. **弧度制**:把弧长等于半径的弧所对的圆心角叫做 **1 弧度的角**,用符号 rad 表示,读做弧度. 用"弧度"作为单位来度量角的单位制叫做**弧度制**.

弧度制与角度制的换算:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.01745(\text{弧度}),\ 1\ \text{弧度} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

5. 若扇形的圆心角为 $\alpha(0 < \alpha < 2\pi)$,半径为 r,弧长为 l,面积为 s,那么

$$\text{弧长}\ l = \alpha r,\ \text{面积}\ s = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2} lr.$$

典型例题

例 1 已知角 α 的终边与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同,在 $[0,\ 2\pi)$ 内哪些角的终边与角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边相同?

解 由 $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ 得 $\frac{\alpha}{3} = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}\ (k \in \mathbf{Z})$,由 $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \in [0,\ 2\pi)$ 知 $k =$

0, 1, 2,故所求角为$\frac{\pi}{9}$、$\frac{7\pi}{9}$、$\frac{13\pi}{9}$.

解题指要 利用两角终边相同的特点,注意角度的范围.

例 2 已知锐角 α 终边上一点 A 的坐标为$(2\sin 3,\ -2\cos 3)$,求 α 的弧度数.

解 $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-2\cos 3}{2\sin 3} = -\cot 3 = \tan\left(3-\frac{\pi}{2}\right)$, $3-\frac{\pi}{2} \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$,则$\alpha = 3-\frac{\pi}{2}$.

解题指要 利用解直角三角形的方法,注意弧度与角度数之间的关系.

例 3 用弧度制表示:

(1) 终边在 x 轴上的角的集合 S_1;

(2) 终边在 y 轴上的角的集合 S_2;

(3) 终边在坐标轴上的角的集合 S_3.

解 (1) 终边在 x 轴上的角的集合 $S_1 = \{\beta \mid \beta = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$;

(2) 终边在 y 轴上的角的集合 $S_2 = \{\beta \mid \beta = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\}$;

(3) 终边在坐标轴上的角的集合 $S_3 = \{\beta \mid \beta = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\}$.

例 4 已知 $f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|} + \frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|} + \frac{\tan\alpha}{|\tan\alpha|} + \frac{\cot\alpha}{|\cot\alpha|}$,求 $f(\alpha)$值的集合.

解 显然 $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbf{Z})$.

当 $\alpha \in$ Ⅰ, $f(\alpha) = 1+1+1+1 = 4$;

当 $\alpha \in$ Ⅱ, $f(\alpha) = 1-1-1-1 = -2$;

当 $\alpha \in$ Ⅲ, $f(\alpha) = -1-1+1+1 = 0$;

当 $\alpha \in$ Ⅳ, $f(\alpha) = -1+1-1-1 = -2$.

所以,$f(\alpha)$值的集合为$\{4,\ -2,\ 0\}$.

解题指要 按象限角进行分类讨论.

例 5 设 α 是第三象限的角,试讨论$\frac{\alpha}{2}$是哪个象限的角.

解 因为 α 是第三象限的角,所以 $2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\ (k \in \mathbf{Z})$,即有

$$k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{3\pi}{4}\ (k \in \mathbf{Z}).$$

(1) 当 k 为偶数时，设 $k=2n$ $(n\in\mathbf{Z})$，则 $2n\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{3\pi}{4}$ $(n\in\mathbf{Z})$，所以，$\frac{\alpha}{2}$是第二象限角.

(2) 当 k 为奇数时，设 $k=2n+1$ $(n\in\mathbf{Z})$，则 $2n\pi+\frac{3\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{7\pi}{4}$ $(n\in\mathbf{Z})$，所以，$\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角.

由(1)(2)可知，当 α 是第三象限角时，$\frac{\alpha}{2}$是第二或第四象限的角.

例 6　已知扇形的周长为 6，面积为 2，求扇形圆心角的弧度数.

解　设半径为 r，则 $\frac{1}{2}r(6-2r)=2\Rightarrow r=1,\ 2$，故扇形圆心角的弧度数为 4 或 1.

解题指要　利用弧长与扇形面积公式，注意多解.

举一反三

1　5 弧度是第几象限角?

2　已知角 α 的终边与$\frac{2\pi}{3}$的终边关于 y 轴对称，且 $\alpha\in(-2\pi,\ 2\pi)$，求 α.

3　设角 α 的终边与角 β 的终边关于 x 轴对称，求 α 与 β 的关系.

4　已知扇形的圆心角为$\frac{2\pi}{3}$，半径为 5，求扇形的弧长 l 及面积 S.

5　当 α 是第二象限的角时，试讨论$\frac{\alpha}{2}$是哪个象限角.

融会贯通

6　如图 5-1，已知扇环 $ABCD$ 的两条弧长分别是 l_1、l_2，两条直边的长均为 d，求扇环的面积.

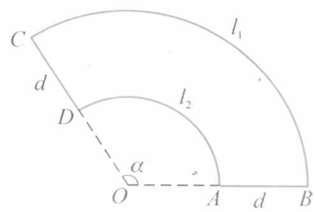

图 5-1

5.2 任意角的三角比

知识要点

1. 在角 α 的终边上任取一点 $P(x,\ y)$，它与原点的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$. 定义：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x},\quad \cot\alpha=\frac{x}{y},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x},\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

正弦和余割、余弦和正割、正切和余切均互为倒数关系.

2. 设 $r=1$.

如图 5-2，设角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(x,\ y)$，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{1}=y$，称线段 S_1S_2 为正弦线.

如图 5-3，则 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{1}=x$，称线段 C_1C_2 为余弦线.

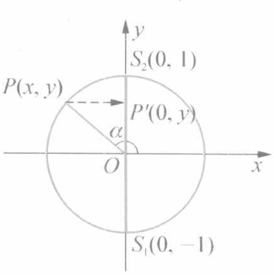

图 5-2

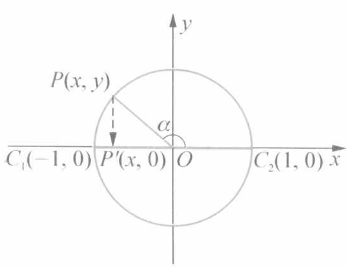

图 5-3

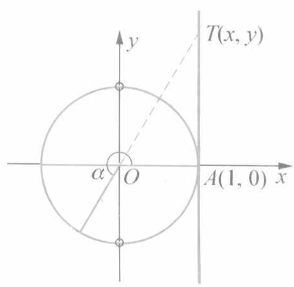

图 5-4

如图 5-4，过 $A(1,\ 0)$ 作单位圆的切线，这条切线必平行于 y 轴，设它与角 α 的终边(当 α 为一、四象限角时)，或其反向延长线(当 α 为二、三象限角时)，相交于

$T(x,\ y)$. 则 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{y}{1}=y$, 称此切线为**正切线**. 显然,当 $\alpha=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时, 角的终边与正切线平行,无交点,此时 α 的正切不存在.

如图 5-5,过 $B(0,\ 1)$作单位圆的切线,这条切线必平行于 x 轴,设它与角 α 的终边(当 α 为第一、二象限角时),或其反向延长线(当 α 为第三、四象限角时),相交于$C(x,\ y)$. 则 $\cot\alpha=\dfrac{x}{y}=\dfrac{x}{1}=x$, 称此切线为**余切线**. 显然,当 $\alpha=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时, 角的终边与余切线平行,没有交点,此时 α 的余切不存在.

下面介绍正割和余割.

如图 5-6,过角 α 终边与单位圆的交点 P 作单位圆的切线,与 x 轴和 y 轴分别交于 M、N,则 M 的横坐标即为 α 的正割 $\sec\alpha$, N 的纵坐标即为 α 的余割 $\csc\alpha$.

思考:当 α 为何值时,α 的正割或余割不存在?

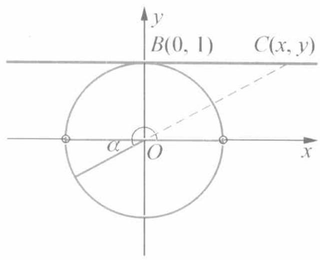

图 5-5

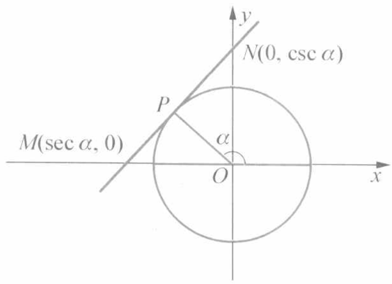

图 5-6

典型例题

例 1 根据下列条件确定角 θ 属于哪个象限:

(1) $\sin\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$; (2) $\sin\theta\cdot\cos\theta>0$.

解 (1) 由 $\sin\theta<0$ 可知θ属于三、四象限,由 $\tan\theta>0$ 可知θ属于一、三象限,所以,θ 属于第三象限.

(2) $\sin\theta>0$ 且 $\cos\theta>0$ 时,θ 属于第一象限,$\sin\theta<0$ 且 $\cos\theta<0$ 时,θ 属于第三象限,所以,θ 属于第一或第三象限.

解题指要 根据三角比在各个象限的符号进行判断.

例 2 求下列等式的解集：

(1) $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　(2) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$；　(3) $\tan x=-\sqrt{3}$.

解 (1) $\left\{x \middle| x=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\text{ 或 }2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2) $\left\{x \middle| x=2k\pi\pm\dfrac{2\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3) $\left\{x \middle| x=k\pi-\dfrac{\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

解题指要 准确作出单位圆上各个三角比的函数线(如图 5 - 7).

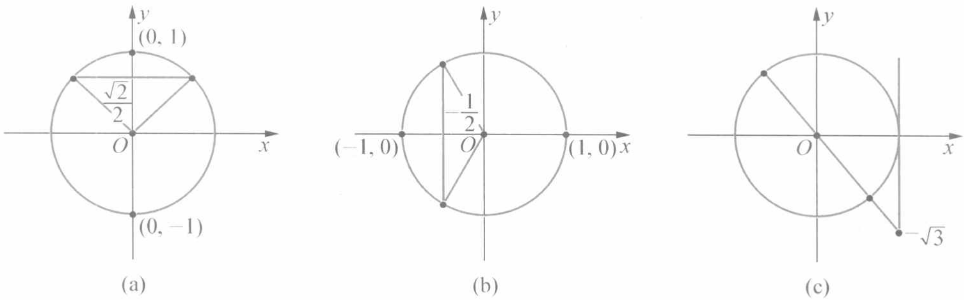

图 5 - 7

例 3 求下列不等式的解集：

(1) $\sin x\geqslant-\dfrac{1}{2}$；　(2) $\cos x>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；　(3) $\tan x>-\sqrt{3}$.

解 (1) $\left\{x \middle| 2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{7\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2) $\left\{x \middle| 2k\pi-\dfrac{5\pi}{6}<x<2k\pi+\dfrac{5\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3) $\left\{x \middle| k\pi-\dfrac{\pi}{3}<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

解题指要 注意函数线的变化趋势及范围(如图 5 - 8).

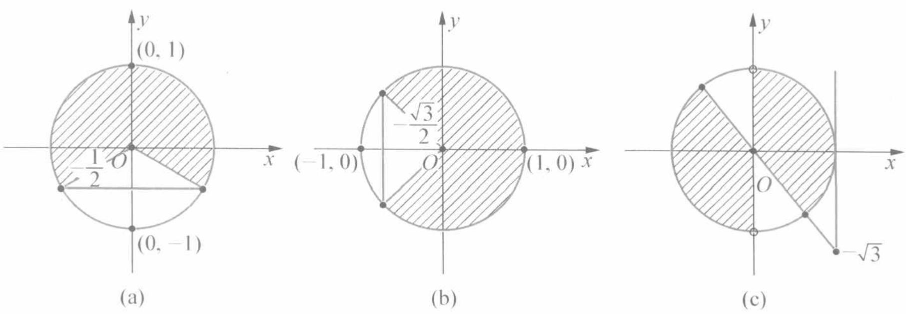

图 5 - 8

例 4 求下列不等式的解集：

(1) $|\sin x|\leqslant\frac{1}{2}$；　　(2) $|\cos x|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解　(1) $\left\{x\middle|k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2) $\left\{x\middle|k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

寻根问底

三角学这门学科是从确定平面三角形和球面三角形边和角的关系开始形成的.古希腊的喜帕恰斯(公元前 120 年左右)是一位天文学家,精确确定一年长短的就是他,他在天文学方面的研究,使他发明了一门崭新的学科——三角学.但三角学最早作为系统性论著的,是出现在古希腊天文学家托勒密(公元 2 世纪中叶)的天文学著作《天文集》中,他在天文学上的研究要求建立某些能精确确定三角形边角关系的规则.尽管采取的方法和记号不同,但许多结论,正是我们今天的一些三角公式,可以说,正是为了改善天文计算的目的,三角学才应运而生.

举一反三

1 求满足下列条件的角 α：

(1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$；　　(2) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$；　　(3) $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

2 求下列不等式的解集：

(1) $\sin x<\frac{1}{2}$；　　(2) $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$；　　(3) $\tan x>1$.

3 求下列不等式的解集：

(1) $|\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$；　　(2) $|\cos x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

融会贯通

4 求不等式组$\begin{cases} \tan x \leqslant \sqrt{3}, \\ \sin x < \frac{1}{2} \end{cases}$的解集.