



全国十大成考培训机构联合推荐

全国各类成人高考总复习丛书（专升本）
成人高考教育网（www.chengkao365.com）指定教材

高等数学（二）2008版

教材+大纲解读+练习册+预测试题集

四合一

主编：金桂堂（成人高考考试大纲编写组成员）

（全国著名成人高考辅导专家）

- 全国顶级名师亲力打造
- 历年成人高考试题完整解析
- 成人高考报考资讯（2008年完整版）
- 复习方法，考试技巧与志愿填报指导
- 随书附赠权威网校学习卡（20元）

海南出版社

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★
全国十大成考培训机构联合推荐

全国各类成人高考总复习丛书（专升本）
成人高考教育网（www.chengkao365.com）指定教材

高等数学（二）2008版

教材+大纲解读+练习册+预测试题集

四合一

主 编：金桂堂（成人高考考试大纲编写组成员）
（全国著名成人高考辅导专家）

- 全国顶级名师倾力打造
- 历年成人高考试题完整解析
- 成人高考报考资讯（2008年完整版）
- 复习方法，考试技巧与志愿填报指导
- 随书附赠权威网校学习卡（20元）

海南出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 2/金桂堂等主编. —海口:海南出版社, 2008. 2

(全国各类成人高考总复习丛书)

专升本

ISBN 978-7-5443-2370-3

I. 高… II. 金… III. 高等数学—成人教育:高等教育—升学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 013747 号

责任编辑 曹朝晖 **封面设计** 苏 婧

出版发行 海南出版社

社 址 海口市金盘开发区建设三横路 2 号

邮政编码 570216

电 话 0898—66830922

电子邮箱 62529269@163.com

经 销 全国新华书店与民营书店

印 刷 山东鲁创彩印有限公司

开 本 787×1092 1/16

印 张 15.25

字 数 410 千字

邮购热线 0898—66830922

网 站 成人高考图书网

网 址 <http://www.chengkaobooks.com>

<http://www.chengkaobooks.com.cn>

网上订购 <http://www.chengkaobooks.com>

<http://www.chengkaobooks.com.cn>

批发业务 13910853936

版 次 2008 年 2 月第 1 版

印 次 2008 年 2 月第 1 次印刷

定 价 26.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

说明与建议

每年10月份,全国各地有200多万考生在同一时间走进考场,参加一年一度的成人高考,景象蔚为壮观。为了帮助考生更好的复习备考,收到事半功倍之效,海南出版社组织国内成人高考界的权威专家,依据《全国成人高等学校招生复习考试大纲》[2008年版],精心编写了全国各类成人高考总复习丛书。

本丛书的基本内容包括四部分,集教材、大纲解读、练习册与模拟(预测)试题集于一体,故称之为四合一。其中,教材囊括了考试大纲涵盖的基础知识。**成人高考没有指定教材,考试大纲是命题的唯一依据**,其重要性不言而喻。做练习题是考生巩固基础知识、提高分析能力与解题能力的必要环节。模拟(预测)试题对于考生熟悉考试题型、把握考试要点、提高应试能力具有不可替代的作用。鉴于参加成人高考的考生大多为上班一族,没有太多的时间与精力去钻研多种图书,编者将这四种内容有机地融于一体,有利于考生省时省力的全面复习、顺利备考。

综观本丛书,具有以下显著特点:

1. **全国顶级名师倾力打造,品质权威。**作者(编者)是决定图书品质高低的第一关键因素。本丛书的主编均为成人高考**考试大纲编写组成员、全国著名成考辅导专家**。他们均有10年以上的成考辅导教学与备考经验,对各种版本成考图书的特点了如指掌,有利于在本丛书的编写过程中博采众家所长。同时,他们对成考考试大纲有深入的认识,对成考考试规律有准确的总结,对成考命题趋势有精确的把握,因而大大提升了本丛书的内在品质。

2. **内容全面,结构合理,具有很强的实用性。**本丛书是同类图书中**唯一将教材、大纲解读、练习册与模拟(预测)试题集融于一体的复习用书**,各部分内容完整、比例适当、结构合理。考生一书在手,所有复习内容尽在掌握。只要将本丛书吃透,要取得理想的考试成绩就非常容易了。

3. **指导性强,具有独一无二的附加价值。**除了前文提及的四部分基本内容外,本丛书在附录中还收录了成人高考报考资讯(2008年完整版)、复习方法、考试技巧与志愿填报指导等内容,涉及从报名、志愿填报、复习、考试直至录取、在校学习、毕业的整个流程,对考生进行全程指导。这部分内容是**本丛书所独有的**,编者相信对考生会有所裨益。

本书完整收录了1994年以来历年成人高考专升本高等数学(二)试题及其答案的详细解析。其中,2007年的试题放在附录部分,2007年以前的试题分散于各章节的例题与练习题中,并在题中注明其年份与题号,如2006年试题的第16题标注为“[0616]”。相对于考生将要在今年10月份面对的成考试题而言,往年的成考试题最能体现其命题形式,难易程度基本一致,基本覆盖了大纲要求的考点,是最好的复习材料之一。对这部分内容,建议考生多次重复练习、反复揣摩,直至吃透其中要义,彻底弄懂。

本丛书载有5套模拟(预测)试题及答案详解,模拟(预测)试题贵在精(即对考题预测的准确性)不在多,太多就只是参照试题形式的练习题罢了。这5套模拟(预测)试题是本书的精华之一,集中体现了编者对成考考试大纲、考试规律与命题趋势的深入认识和准确把握。与今年10月份的成考试题相比较,这5套试题预期产生可观的预测准确率。

建议考生在考前一两个月内模拟考试实况,每套试题均在150分钟的连续时间内闭卷练习,完整地做完。这种模拟方式,有利于考生熟悉考试题型,合理安排答题时间,提高应试能力。同时,建议考生将这5套试题反复练习、反复琢磨,直至完全吃透。这样,必将对考生即将参加的成人高考大有帮助。

由于编写时间仓促,疏漏之处在所难免,恳请读者批评指正,以便再版时修订。请将您的宝贵意见通过电子邮件发至:62225829@163.com,编者在此表示感谢。

最后祝考生朋友们复习顺利,取得理想的成绩!

目 录

第一章 极限和连续	
第0节 函数	1
一、大纲解读	1
二、基础知识	1
(一)函数的概念	1
(二)函数解析表示法中常见的几种形式	2
(三)函数的简单性质	3
(四)反函数	4
(五)基本初等函数	4
(六)复合函数与初等函数	7
三、典型例题精解	8
四、练习题精选	10
五、练习题精解	11
第1节 极限	12
一、大纲解读	12
二、基础知识	12
(一)数列的极限	12
(二)数列极限的性质与运算法则	13
(三)函数极限的概念	14
(四)函数极限的定理	16
(五)无穷小量和无穷大量	17
(六)两个重要极限	18
(七)求极限的方法	19
三、典型例题精解	19
四、练习题精选	26
五、练习题精解	28
第2节 函数的连续性	31
一、大纲解读	31
二、基础知识	31
(一)函数连续的概念	31
(二)连续函数的性质	32
(三)闭区间上连续函数的性质	32
(四)初等函数的连续性	33
三、典型例题精解	33
四、练习题精选	35
五、练习题精解	36
第一章小结	37
第二章 一元函数微分学	
第1节 导数与微分	39
一、大纲解读	39
二、基础知识	39
(一)导数的有关概念	39
(二)导数的计算	41
(三)微分的概念与运算	43
三、典型例题精解	44
四、练习题精选	51
五、练习题精解	53
第2节 洛必达法则	56
一、大纲解读	56
二、基础知识	57
(一)基本未定式	57
(二)其他未定式($0 \cdot \infty$ 型与 $\infty - \infty$ 型)	57
(三)洛必达法则在求未定式极限中的应用	58
三、典型例题精解	58
四、练习题精选	61
五、练习题精解	61
第3节 导数的应用	63
一、大纲解读	63
二、基础知识	63
(一)函数的单调增减性	63
(二)函数的极值的概念以及求法	64
(三)曲线的凹向和拐点	65
(四)曲线的渐近线	66
(五)函数的最大值和最小值	66
(六)用函数的单调性证明不等式	67
三、典型例题精解	67
四、练习题精选	72
五、练习题精解	73
第二章小结	76
第三章 一元函数积分学	
第1节 不定积分	79
一、大纲解读	79
二、基础知识	79
(一)不定积分有关概念	79
(二)计算不定积分	81
三、典型例题精解	84
四、练习题精选	97
五、练习题精解	99
第2节 定积分及其应用	104
一、大纲解读	104
二、基础知识	104

(一)定积分有关概念	104	(二)事件之间的关系和运算——四个关系	
(二)变上限定积分求导定理	106	三种运算	161
(三)计算定积分	107	三、典型例题精解	164
(四)无穷区间上的广义积分	108	四、练习题精选	166
(五)定积分的应用	108	五、练习题精解	167
三、典型例题精解	110	第2节 事件的概率	168
四、练习题精选	117	一、大纲解读	168
五、练习题精解	120	二、基础知识	168
第三章小结	127	(一)事件的概率	168
第四章 多元函数微分学		(二)概率的基本性质与运算法则	169
第1节 多元函数的基本概念	129	(三)条件概率、乘法公式、事件的独立性	170
一、大纲解读	129	三、典型例题精解	171
二、基础知识	129	四、练习题精选	178
(一)空间直角坐标系	129	五、练习题精解	179
(二)多元函数、极限与连续	130	第3节 随机变量及其概率分布	181
三、典型例题精解	132	一、大纲解读	181
四、练习题精选	134	二、基础知识	182
五、练习题精解	135	(一)随机变量	182
第2节 偏导数与全微分	136	(二)分布函数与概率分布	182
一、大纲解读	136	(三)随机变量的数字特征	183
二、基础知识	136	三、典型例题精解	184
(一)偏导数与全微分	136	四、练习题精选	186
(二)复合函数微分法	139	五、练习题精解	188
(三)隐函数微分法	140	第五章小结	189
(四)二元函数极值	141	2008年专升本考试高等数学(二)预测试题	
三、典型例题精解	142	高等数学(二)预测试题(一)	190
四、练习题精选	148	高等数学(二)预测试题(一)精解	191
五、练习题精解	149	高等数学(二)预测试题(二)	194
第四章小结	153	高等数学(二)预测试题(二)精解	195
第五章 概率论初步		高等数学(二)预测试题(三)	198
第0节 排列与组合	155	高等数学(二)预测试题(三)精解	199
一、大纲解读	155	高等数学(二)预测试题(四)	201
二、基础知识	155	高等数学(二)预测试题(四)精解	203
(一)两个基本原理	155	高等数学(二)预测试题(五)	205
(二)排列	156	高等数学(二)预测试题(五)精解	207
(三)组合	156	附 录	
三、典型例题精解	157	附录一:2007年成人高等学校专升本招生全国	
四、练习题精选	159	统一考试高等数学(二)试题	210
五、练习题精解	159	2007年专升本考试高等数学(二)试题精解	211
第1节 随机事件	160	附录二:成人高考报考资讯(2008年完整版)	
一、大纲解读	160		215
二、基础知识	160		
(一)随机事件与样本空间	160		

1. 成人高考概况	215	3. 成人高考报考事宜	219
1.1. 什么是成人高考?	215	3.1. 成人高考报名时间	219
1.2. 成人高等学校(简称成人高校)的种类	215	3.2. 成人高考的报名方式	219
1.3. 成人高考的整个流程依次包括哪些环节?	215	3.3. 网上报名的网址及程序,如何确定网上报名成功?	219
1.4. 成人高考的三种招生类型	215	3.4. 网上交费注意事项	220
1.5. 成人高校的三种学习形式	215	3.5. 现场报名或现场确认时应带齐什么证件证明,应注意什么问题?	220
1.6. 成人高校学生从入学到毕业所需时间	216	3.6. 如果户口本上的居民身份证号码是18位,居民身份证上的是15位,报名时以哪个为准?	220
1.7. 成人高校的学费标准	216	3.7. 成人高考应试外语语种的选择	220
1.8. 成人高考的报名时间、考试时间与入学时间	216	3.8. 艺术类、体育类及其他需要加试专业课的考生报考时应注意的问题	220
1.9. 成人高考是全国统考吗?由哪个部门命题?命题的依据是什么?	216	3.9. 网上报名后,可以变更专业或其他信息吗?	221
1.10. 报考专升本的考生是否必须是本专业的毕业生?	216	3.10. 成人高考志愿填报	221
1.11. 考生通过何种途径可了解有关成人高考的准确而全面的信息?	216	3.11. 可享受照顾加分的条件、申请照顾加分的手续	221
1.12. 如何查询各招生高校专业、计划数、加试科目及其报名时间、应试外语语种、学费、学习形式、上课时间、上课地点与学校地址、咨询电话等情况?	216	4. 成人高考考试事宜	221
1.13. 成人高考报考专业的选择	216	4.1. 成人高考的考试时间	221
1.14. 成人高考报考院校的选择	217	4.2. 高起本、高起专考试科目	221
1.15. 成人高考复习教材与辅导资料的选择	217	4.3. 专升本考试科目	222
1.16. 成人高考辅导班的选择	217	4.4. 试卷的形式与答题方式	222
2. 成人高考报考条件	218	4.5. 专业课加试	222
2.1. 成人高考报考条件	218	4.6. 考试注意事项	222
2.2. 报考成人高校医学门类专业的条件	218	4.7. 阅卷	223
2.3. 哪些证书不是国民教育系列的毕业证书?	218	4.8. 成绩发布	223
2.4. 户口不在报考所在地的考生能在当地报名并参加考试吗?	219	4.9. 如果考生对统考科目成绩有疑问,可否复核成绩,重新评卷或查卷?	223
2.5. 残疾人能否报考?	219	4.10. 专升本考生可通过什么途径了解2008年成人高考政治科目所涉及时事政治内容?	223
2.6. 办理高起专、高起本、专升本的报考手续时,须携带相应的毕业证书吗?	219	5. 成人高考录取工作	223
2.7. 报考专升本的考生毕业证书丢失,需要办理何种手续?	219	5.1. 录取时间	223
2.8. 考生的居民身份证遗失需要办理何种手续?	219	5.2. 录取工作的原则	223
		5.3. 最低控制分数线	223
		5.4. 投档原则	223
		5.5. 录取与调剂录取	224
		5.6. 照顾加分的录取	224
		5.7. 考试成绩达到录取的最低控制分数线,是否一定被录取?	224

5.8. 考生被有关院校录取但不去报到, 会不会影响以后的成人高考报名?	224	8.2. 免试生报名程序	225
5.9. 高中起点艺术类数学成绩不计入总分, 数学成绩的作用是什么?	224	8.3. 考生持有专科毕业证, 能否免试进入成人高校专科专业学习? 考生持有本科以上(含本科)毕业证, 能否免试进入成人高校专科或本科专业学习?	225
5.10. 报高中起点本科又兼报专科, 如果高中起点本科未录取, 专科能录取吗?	224	9. 毕业及其他事宜	226
5.11. 高中起点升本科和高中起点升专科最低录取控制分数线相同吗?	224	9.1. 脱产、函授和业余学习所发毕业证书有区别吗?	226
6. 新生入学	224	9.2. 高职和大专的毕业证书有何不同?	226
6.1. 入学注册	224	9.3. 成人高校与普通高校的毕业证书和学位证书一样吗?	226
6.2. 新生复查	224	9.4. 专升本毕业生能否获得学士学位?	226
6.3. 成人高校入学需要体检吗?	224	9.5. 从成人高校毕业后有就业报到证吗? ...	226
6.4. 被成人高校录取的外地新生是否迁移户口?	225	附录三: 复习方法、考试技巧与志愿填报指导	227
7. 预科生的有关政策	225	高等数学(二)复习方法与考试技巧	227
7.1. 预科生的录取条件	225	成人高考应考策略	230
7.2. 预科生的培养程序	225	参考人才需求状况填报志愿	231
8. 免试生的有关政策	225	结合兴趣爱好与个性特点填报志愿	235
8.1. 免试生报名条件	225		

第一章 极限和连续

第0节 函数

一、大纲解读

2005年版《复习考试大纲》中已删去了“函数”的相关内容,函数的概念与性质等知识点不再作为考核要求,即在考试中函数有关概念及性质的试题不再单独出现.但考虑到微积分学是以初等函数为研究对象的,学习微分与积分必然要涉及到函数的一些基本知识.本着循序渐进的认知原则,把函数的相关内容列为预备知识,目的在于建立稳固的函数基础,更好地学习微积分学.

函数的复习要求如下:

- (1)理解函数的概念,会求函数的定义域、函数值及表达式.会求分段函数的定义域、函数值,会画出分段函数的图像.
- (2)理解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性.会判断函数的奇偶性.
- (3)了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图像),会求单调函数的反函数.
- (4)熟练掌握函数的四则运算与复合运算.会分解复合函数的复合层次.
- (5)熟练掌握基本初等函数的性质及其图像.
- (6)了解初等函数的概念.

二、基础知识

(一)函数的概念

1. 函数的定义

定义 设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y , 变量 y 随变量 x 而变化, 如果变量 x 在实数集合中某一范围 D 内取每一个确定数值时, 变量 y 依照某一确定的规律 f 总有一个相应的数值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记为 $y=f(x)$, 其中 x 叫自变量, y 叫因变量或函数.

在上述函数的定义中, 应注意理解三因素和两要素, 即构成函数关系的三因素是:

- (1)定义域: 在数轴上使函数 f 有定义的自变量的取值范围 D , 称为函数的定义域. 记为 $D(f)$.
- (2)对应规律: 自变量 x 在 D 上取每一数值时, 函数 y 按照某一确定的规律 f , 有确定的数值与之对应.

当自变量 x 取某一定值 a 时, 函数 $y=f(x)$ 的对应值称为函数值, 记为 $f(a)$, 有时也记为 $y|_{x=a}$.

- (3)值域: 函数 y 的取值范围, 称为函数的值域, 记为 $Z(f)$.

函数关系的两要素是指定义域与对应规律,定义域与对应规律一旦确定了,值域自然就确定了,因此两个函数是否为同一函数,关键在于函数的两要素是否相同.

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有三种:解析法(公式法)、表格法、图示法.

(1)解析法:对自变量和常数施加四则运算、乘幂运算、指数运算、对数运算、或取三角函数、反三角函数等数学运算所得到的式子称为解析式或表达式.用解析式表示函数关系的表示法称为解析法,亦称为公式法.

(2)表格法:在实际应用中,常把自变量所取的值和对应的函数值列成表,用以表示函数关系,函数的这种表示法称为表格法.

(3)图示法:设 $y=f(x)$ 是一个给定的函数,定义域是 $D(f)$,由于自变量和函数都取实数值,因而在我们可以在平面上取定一个直角坐标系 Oxy ,用 x 轴上的点表示自变量的值,用 y 轴上的点表示函数值.于是,在 $D(f)$ 内的每一个 x 及相应的函数值 $f(x)$ 就确定了该平面直角坐标系中的一个点 $P(x, y)$,当 x 在 $D(f)$ 内变动时,点 P 便在坐标平面上移动,便得到平面上的一条曲线,这条曲线是函数 $y=f(x)$ 的图像.用图像表示函数关系的表示法称为图示法.

函数的三种表示法各有优缺点,在具体应用时,常常是三种方法配合使用.

3. 函数的图像

用图示法表示函数所得到的曲线,就称为函数的图像,用图像表示函数,使我们有可能借助于几何图形,形象直观地研究事物的运动变化过程,这对于理解高等数学中的概念、方法和结论是十分重要的.

(二)函数解析表示法中常见的几种形式

(1)显函数:由关系式 $y=f(x)$ 确定 y 是 x 的函数,称为显函数.

(2)隐函数:由方程 $F(x, y)=0$ 确定的函数关系 $y=f(x)$,称为隐函数.

注意 并非所有隐函数都可以转化为显函数.

(3)分段函数:有时还要考察这样的函数,对于其定义域内自变量 x 的不同值,函数不能用一个统一的公式表示,而是要用两个或两个以上的公式来表示.这类函数称为分段函数.

例如

$$y = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x-1, & x \geq 0, \end{cases}$$

当 $x < 0$ 时,公式为 $y = x + 1$;当 $x \geq 0$ 时,用公式 $y = x - 1$ 来表示,这个函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

关于分段函数要注意以下几点:

- ①分段函数是用几个公式合起来表示同一个函数,而不是表示几个函数;
- ②因为函数式子是分段表示的,所以各段的定义域必须明确标出;
- ③对分段函数求函数值时,不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求;
- ④分段函数的定义域是各段定义域的并集.

(三)函数的简单性质

1. 函数的单调性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义, 如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,

(1) 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格单调增加的.

(2) 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格单调减少的.

注意 ① 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

② 单调性反映了函数在给定区间上函数值的变化趋势, 单调性是函数的局部性质. 函数的单调性是对某一个区间而言的. 单调函数必须指出它的单调区间.

③ 单调函数的图像特征是: 单调增加函数相应的曲线上升; 单调减少函数相应的曲线下降.

2. 函数的奇偶性

定义 如果对于函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 中的任一点 x , 恒有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果对于定义域 D 中的任一点 x , 恒有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

注意 ① 奇偶性是函数的整体性质, 定义域是关于原点对称的区间是函数具有奇偶性的必要条件.

② 奇、偶函数的图形特征是: 奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于 Y 轴对称.

③ 可以证明, 在一般情况下, 函数的奇偶性具有以下运算性质, 即:

奇函数加奇函数仍为奇函数; 偶函数加偶函数仍为偶函数; 奇函数乘奇函数为偶函数; 偶函数乘偶函数为偶函数; 奇函数乘偶函数为奇函数.

(函数奇偶性的运算性质将在奇、偶函数在对称区间上的定积分运算中有重要应用)

3. 函数的有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义, 如果存在一个正数 M , 使得对于 (a,b) 内的任意一点 x , 总有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的, 否则, 称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

例如: 函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内, 恒有 $|\sin x| \leq 1$, 所以函数 $y=\sin x$ 在其定义域内为有界函数. (这一结论在运用无穷小量的性质求极限时要用到)

4. 函数的周期性

在自然界中, 周而复始的现象叫做周期现象.

定义 对于函数 $y=f(x)$, 如果存在一个不为零的常数 T , 使得对于 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意实数 x , 关系式 $f(x+T)=f(x)$ 都成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 其中常数 T 称为函数的周期. 如果 T 为最小正数, 则称为最小正周期, 简称为周期.

例如 $y = \sin x$ 就是一个周期函数, 最小正周期 $T = 2\pi$.

对于函数 $y = \sin \omega x$, 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

(四) 反函数

1. 反函数的定义

定义 设 y 是 x 的函数且 $y = f(x)$, 如果把 y 当作自变量, x 当作因变量, 则由关系式 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = \varphi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 而 $y = f(x)$ 称为直接函数. 一般地, 把 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$.

2. 反函数存在定理

定理 如果函数 $y = f(x)$, $D(f) = X$, $Z(f) = Y$, 是严格单调增加(或减少)的, 则它必定存在反函数 $x = \varphi(y)$, $D(\varphi) = Y$, $Z(\varphi) = X$, 并且也是严格单调增加(或减少)的.

3. 求反函数的步骤

第一步: 从直接函数 $y = f(x)$ 中解出 $x = \varphi(y)$ 看它是否能成为函数;

第二步: 如果 $x = \varphi(y)$ 是函数, 将字母 x 换成 y , 将字母 y 换成 x 得 $y = \varphi(x)$ 这就是 $y = f(x)$ 的反函数.

注意 ①直接函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 两者的图形关于直线 $y = x$ 对称(一般地, 两者是不同的函数, 其图形是不同的曲线);

②函数 $y = f(x)$ 与函数 $x = f^{-1}(y)$ 两者的方程式是同一个方程式的不同形式, 两者的图形是相同的曲线.

根据这个结论, 当我们知道了直接函数 $y = f(x)$ 的图形之后, 就可利用对称于直线 $y = x$ 的性质画出其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形.

(五) 基本初等函数

1. 常数函数 $y = C$

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 图形是一条平行于 x 轴的直线, 显然这是个偶函数.

2. 幂函数 $y = x^a$ (a 为实数)

它的定义域随 a 值的不同而不同, 但不管 a 值是多少, 它在 $(0, +\infty)$ 内总是有定义的.

当 $a > 0$ 时, 其图形如图 1-0-1, 不论 a 为何值, 它的图形都通过原点 $(0, 0)$ 和点 $(1, 1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调增加且无界.

当 $a < 0$ 时, 其图形如图 1-0-2, 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调减少且无界, 曲线以 x 轴正半轴和 y 轴正半轴为渐近线, 都通过点 $(1, 1)$.

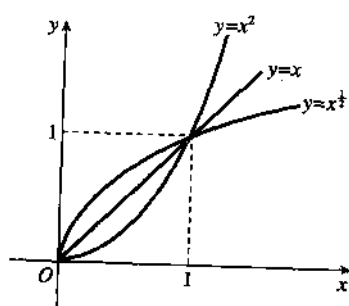


图 1-0-1

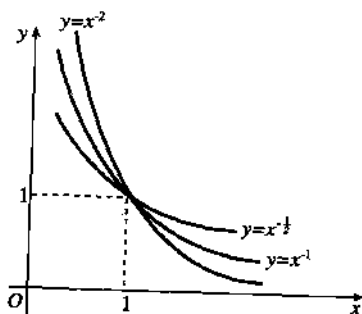


图 1-0-2

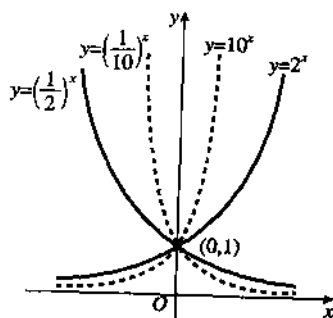


图 1-0-3

3. 指数函数 $y=a^x (a>0, a\neq 1)$

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 且有以下性质:

(1) 由于不论 x 为何值, 总有 $a^x > 0$, 所以它的图形总位于 x 轴的上方.

(2) 当 $x=0$ 时, $y=1$, 所以图形通过点 $(0, 1)$.

(3) 当 $a>1$ 时, 函数严格单调增加, 曲线以 x 轴的负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时, 函数严格单调减少, 曲线以 x 轴的正半轴为渐近线, 如图 1-0-3 所示.

在微积分中经常用到的以无理数 e 为底的指数函数 $y=e^x (e=2.7182818\cdots)$.

4. 对数函数 $y=\log_a x (a>0, a\neq 1)$

对数函数 $y=\log_a x (a>0, a\neq 1)$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数.

对数函数有以下性质:

(1) 它的定义域为 $(0, +\infty)$, 所以它的图形位于 y 轴的右侧.

(2) 不论 a 为何值, 对数曲线都通过点 $(1, 0)$.

(3) 当 $a>1$ 时, 函数严格单调增加, 曲线以 y 轴的负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时, 函数严格单调减少, 曲线以 y 轴的正半轴为渐近线, 如图 1-0-4 所示.

以无理数 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 叫做自然对数函数, 简记作 $y=\ln x$.

自然对数函数在微积分中是经常用到的.

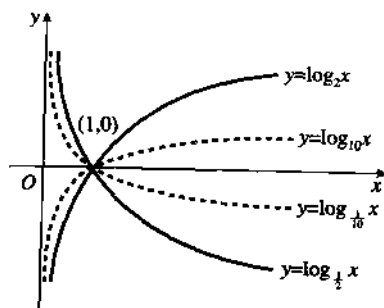


图 1-0-4

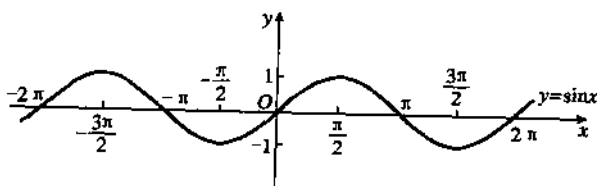


图 1-0-5

5. 三角函数

三角函数有:

$$\begin{aligned} y &= \sin x, & y &= \cos x, & y &= \tan x, \\ y &= \cot x, & y &= \sec x, & y &= \csc x. \end{aligned}$$

在微积分中,三角函数的自变量 x 一律以“弧度”为单位(1 弧度 $= 57^{\circ}17'44.8''$).

正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 为奇函数, 且为周期等于 2π 的周期函数, 其图形如图 1-0-5 所示.

余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 为偶函数, 且为周期等于 2π 的周期函数, 其图形如图 1-0-6 所示.

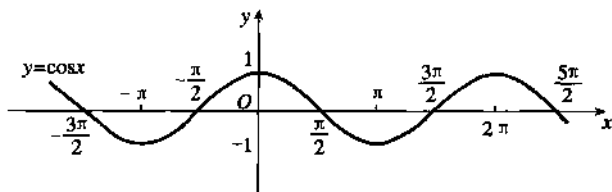


图 1-0-6

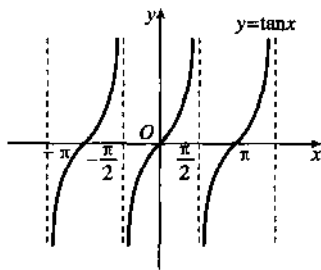


图 1-0-7

因为 $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, 所以它们都是有界函数.

正切函数 $y = \tan x$ 与余切函数 $y = \cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数, 都是奇函数. 正切函数在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内为增函数(如图 1-0-7 所示). 余切函数在 $(0, \pi)$ 内为减函数(如图 1-0-8 所示).

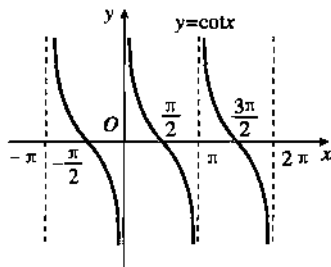


图 1-0-8

6. 反三角函数

反三角函数是相应三角函数的反函数, 它们都是多值函数. 常见的反三角函数有:

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x, & y &= \arccos x, \\ y &= \arctan x, & y &= \operatorname{arccot} x. \end{aligned}$$

以反正弦函数为例, $y = \arcsin x$ 是 $y = \sin x$ 的反函数, 为了避免多值性, 规定其值域为闭区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 这时反正弦函数称为反正弦函数的主值, 简称为反正弦函数, 记作 $y = \arcsin x$. 这样

$y = \arcsin x$ 在定义区间 $[-1, 1]$ 是一个单值函数, 且是单调增函数, 通常就称为反正弦函数. 其图形如图 1-0-9 中的实线部分.

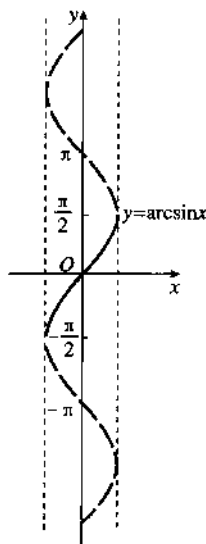


图 1-0-9

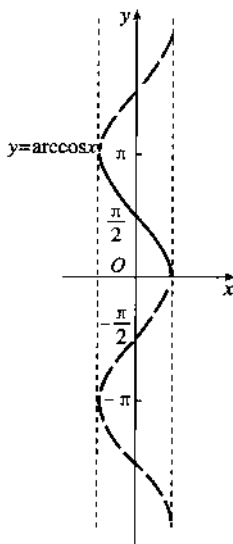


图 1-0-10

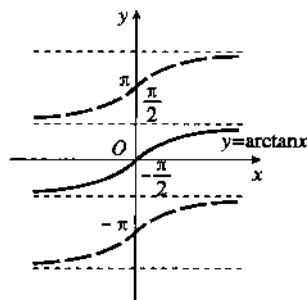


图 1-0-11

同理, 反余弦函数的主值, 简称反余弦函数, 记作 $y = \arccos x$, 它的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为闭区间 $[0, \pi]$, 反余弦函数为单值函数, 且为单调减函数, 其图形如图 1-0-10 中的实线部分.

反正切函数的主值, 简称反正切函数, 记作 $y = \arctan x$, 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 反正切函数为单值函数, 且为单调增函数, 其图形如图 1-0-11 所示.

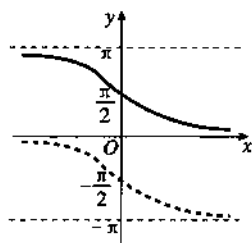


图 1-0-12

反余切函数的主值, 简称反余切函数, 记作 $y = \operatorname{arccot} x$, 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$, 反余切函数为单值函数, 且为单调减函数, 其图形如图 1-0-12 所示.

(六) 复合函数与初等函数

1. 复合函数

定义 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 又设 X 表示函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域的一个子集, 如果对于 X 上的每一个取值 x 所对应的 u 值, 函数 $y = f(u)$ 有定义, 则 y 通过 $u = \varphi(x)$ 而成为 x 的函数, 记为 $y = f[\varphi(x)]$, 这个函数叫做由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 它的定义域为 X , 其中 x 称为自变量, u 称为中间变量, y 称为因变量或函数.

注意 ①不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.

例如 $y = \arcsin u$ 及 $u = x^2 + 2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u = x^2 + 2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内的任何值 x 所对应的 u 值(都大于或等于 2)都不能使 $y = \arcsin u$ 有意义.

②复合函数不仅可以有一个中间变量, 还可以有更多的中间变量, 如 u, v, ω, z 等, 即可以经过

多次复合得到一个函数.

③在求函数的导数时,往往要反过来考虑问题,即一个函数是由哪几个基本初等函数(或简单函数)复合而成的?分解复合函数的复合层次,要由外向里,层层分解,一直分解到自变量 x 为止.并且在分解的过程中,既不能遗漏,也不能重复.

2. 初等函数

定义 所谓初等函数是指由基本初等函数经过有限次的四则运算(加、减、乘、除)或有限次复合所构成,并且能用一个分析式表示的函数.

例如, $y = \lg(1 + \sqrt{1+x^2})$, $y = \ln \sqrt{\cos \frac{x}{2}}$, $y = \sin(3x-1)$, $y = \cos^2(\ln x)$ 等都是初等函数.

在微积分中所讨论的主要是初等函数.

三、典型例题精解

例1 选择题.

(1)下列各组函数中,两个函数相同的是

A. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, $g(x) = x-1$

B. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

C. $f(x) = \ln|x|$, $g(x) = \ln x$

D. $f(x) = \ln x^3$, $g(x) = 3 \ln x$ ()

解析 选项 A 中, $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, $D(g) = (-\infty, +\infty)$, 定义域不相同;

选项 B 中, $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, 对应规律不相同;

选项 C 中, $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $D(g) = (0, +\infty)$, 定义域不相同;

选项 D 中, $D(f) = (0, +\infty)$, $D(g) = (0, +\infty)$, 且 $\ln x^3 = 3 \ln x$, 即两个函数的定义域相同且对应规律相同, 为相同函数. (答案为 D)

(2)[0001]* 函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是

A. $(-1, +\infty)$

B. $[-1, +\infty)$

C. $(1, +\infty)$

D. $[1, +\infty)$ ()

解析 为使函数解析式有意义, 自变量 x 应满足不等式组

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x-1 > 0, \end{cases} \text{解得 } x > 1. \text{ (答案为 C)}$$

(3) 函数 $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$ 的定义域是

A. $[-2, 3]$

B. $[-3, 3]$

C. $(-2, -1) \cup (-1, 3]$

D. $(-3, 3)$ ()

解析 为使函数解析式有意义, 自变量 x 应满足

$$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \end{cases} \text{解得 } -2 < x < -1 \text{ 或 } -1 < x \leq 3.$$

* 这道题为 2000 年全国成人高考专升本高等数学(二)试题的第 1 题. 在本书中出现的此类标注中, 括号内的前两位数字表示试题的年份, 后两位数字表示试题的序号.

即 $D(f) = (-2, -1) \cup (-1, 3]$. (答案为 C)

(4) 函数 $f(x) = \cos(x^3)$ 在 xOy 平面上的图形

- A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于坐标原点对称 D. 关于直线 $y=x$ 对称 ()

解析 函数 $f(x) = \cos(x^3)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数, 根据偶函数的图像特征, 其图形关于 y 轴对称. (答案为 B)

(5) [0201] 函数 $f(x) = x^3 \sin x$ 是

- A. 奇函数 B. 偶函数 C. 有界函数 D. 周期函数 ()

解析 $D(f) = (-\infty, +\infty)$, 且对定义域上的任意一点 x , 都有

$$f(-x) = (-x)^3 \sin(-x) = -x^3 \cdot (-\sin x) = x^3 \sin x = f(x),$$

所以 $f(x) = x^3 \sin x$ 是偶函数. (答案为 B)

(6) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 下列函数中为单调减少函数的是

- A. $y = e^{-x^2}$ B. $y = e^{-x}$
C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = \log_2 x$ ()

解析 选项 C、D 中函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 选项 A 中, 为偶函数, 函数有增有减.

选项 B 中, $y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$, 底数 $0 < \frac{1}{e} < 1$, 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调减少. (答案为 B)

(7) [9402] 函数 $y = 2^{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 等于

- A. $\log_2(x+1)$ B. $1 + \log_2 x$
C. $\frac{1}{2} \log_2 x$ D. $2 \log_2 x$ ()

解析 由 $y = 2^{x-1}$, 得 $x = 1 + \log_2 y$, 即 $y = f^{-1}(x) = 1 + \log_2 x$. (答案为 B)

例 2 填空题.

(1) 函数 $y = \ln \frac{x}{x-2} + \arcsin \frac{3x-1}{5}$ 的定义域为_____.

解析 由 $\frac{x}{x-2} > 0$ 得 $x < 0$ 或 $x > 2$.

$$\text{由 } \left| \frac{3x-1}{5} \right| \leq 1 \text{ 得 } -\frac{4}{3} \leq x \leq 2.$$

故原函数的定义域为 $\left[-\frac{4}{3}, 0\right)$.

(2) 函数 $y = e^{\frac{1}{x}}$ 的值域是_____.

解析 $y = e^{\frac{1}{x}}$ 的反函数为 $y = \frac{1}{\ln x}$, 其定义域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

因为反函数的定义域就是直接函数的值域, 故 $y = e^{\frac{1}{x}}$ 的值域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x^2}$, 则 $f(x) =$ _____.

解析 令 $\frac{1}{x} = t$, 则 $x = \frac{1}{t}$, 得 $f(t) = \frac{1}{t} + t^2$,

$$\text{即 } f(x) = \frac{1}{x} + x^2.$$

(4) 设 $f(x+1) = x^2 + 3x + 5$, 则 $f(x) =$ _____.