0383

數學的園地

劉薰宇著

674

數學的園地

劉薰宇著

江苏工业学院图书馆
藏书章

開明書店

開明青年叢書

目次

一　開場話……一
二　第一步……九
三　速度……一四
四　函數和變數……二五
五　無限小的變數——誘導函數……三五
六　誘導函數的幾何的表示法……四九
七　無限小的量……七二
八　二次誘導函數——加速度——高次誘導函數……八一

九　局部誘導函數和全部的變化……九一
一〇　積分學……九七
一一　面積的計算……一〇九
一二　微分方程式……一一七
一三　數學究竟是什麼……一二三
一四　總集論……一三一

一 開場話

我在中學三年級學物理的時候，曾經碰過一次物理教員的釘子，現在只要一想到，額上好像都還有餘痛。詳細的情形已不大記得清楚了，大概是這樣的：爲了什麽一個公式，我不知道牠的來源；便很愚笨地向了那位教員追問。起初他很和善，雖然已有點不大高興，他說：「你記住好了，怎樣來的，說來你這時不會懂。」在我那時的呆板而幼稚的心裏，無論如何不承認眞有說來不會懂的這末一回事，仍舊不知趣地這樣請求：「先生說說看吧！」他眞懊惱了，這一點我記得非常明白，他的臉發一陣紅又發一陣青，他氣忿忿地，呼吸很促，手也顫抖了，從桌子上拿起一支粉筆使勁在黑板上寫了這樣幾個字$\frac{dy}{dx}$，（後來我知道這只是記號，不好單看成幾個字）眼睛瞪着我，幾乎想要將我吞到他的

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook

肚裏才甘心似的，「這你懂嗎？」我嚇得不敢出聲，心裏暗自想：「眞是不懂！」

從那一次起，雖則我已被嚇得自己只好承認不懂，然而總也不大甘心，常常想從什麼書上去找$\frac{dy}{dx}$這幾個奇怪字看。可惜得很，一直過了三年才遇見了牠，才算「懂其所懂」地懂了一點；眞的，第一次知道牠的意義的時候，心裏感到無限的喜悅！

不管怎樣，馬馬虎虎，我總算懂了，然而我的年齡也大起來了，我已經踏進了被人追問的領域了！「代數，幾何，學過了學些什麼呢？」「微積分是怎樣的東西呢？」這類的問題，常常被比我年紀小些的朋友們問到，我總記起我碰釘子時的苦悶，不忍心讓他們也在我的面前碰，常常想些似是而非的解說，使他們不全然失望。不過，總覺得這也於心不安，我相信一定可以簡單地將牠們的大意說明的，只是我不曾仔細去思索過。新近偶然從書坊店看見一本兩小時的數學 (Deux Heures de Mathématique)，書名很奇特，便買了來。翻讀一過，覺得牠很夠替我來解答前面的問題，因此就依據牠，寫成這篇東西，算是了卻一樁心願。我常常這樣想，數學和辣椒很有些相同，沒有喫過的人，初次喫到，免不

了要叫要哭，但眞喫慣了，不喫卻過不得；不只這樣，就是喫到滿頭是汗，兩眼淚流，身體上固然夠苦精神上卻愈加舒暢。話雖如此，這裏卻不是眞要把這惡辣的東西硬叫許多人流一通大汗，實在還沒有喫生葱那樣的辣。

有一點卻得先聲明，數學的階段是很緊嚴的，只好一步一步地走上去，要跳，那簡直是妄想，結果只有跌了下來。因此，這裏雖然竭力避去繁重的說明，但也是對於曾經學過初等的算術，代數，幾何，而沒有全部忘掉的人說的。因此先來簡單地說幾句關於算術，代數，幾何的話。

算術

無論哪一個人要走進數學的園地裏去遊覽一番，一進門就碰到的是算術，這是因爲牠比較容易也比較簡單，所以易於親近的緣故。話雖這樣講，眞在數學的園地裏遊個盡興，到後來你要碰到的卻又是牠了，「整數的理論」就是數學中最難的部分。

你在算術中，經過了加，減，乘，除四道正門，就可以看到一座大廳，門上橫着一塊大大的匾，寫的是：「整數的性質」五個大字。已經走進這大廳，而且很快地就走了出來，由那裏轉到分數的庭院去，你當然很高興。但是我問你：你在那大廳裏究竟得到了什麼呢？裏面最重要的不是質數嗎？1，3，5，7，11，13……你都知道牠們是質數了吧！然而，這就夠了嗎？隨便給你一個數，比如103，你能夠用比較牠小的質數一個一個地去除牠，除到後來，得數比除數小了還除不盡，你就決定牠是質數。這個法子，是很靠得住的，一點不會欺騙你。然而牠只是一個小聰明的玩意兒，眞要把牠正正經經地來用，那就叫你不得不搖頭了。倘若我給你的不是103，而是一個有一百零三位的整數，你還能呆板板地照老法子去決定牠是不是質數嗎？人壽幾何，一個不湊巧，恐怕你還沒有試到一半，已經天昏地暗了。那末，有沒有別的法子可以決定一個數是不是質數呢？對不起得很，眞要問，多請些人到這座大廳裏去轉去。

在「整數的理論」中，問題很多，得了別的一部分數學的幫助，也解決過一些，所以

算術自己也是在牠的領域內常常增加新的建築和點綴的，不過不及別的部分來得快罷了。

代數

走到代數的殿上，你知道解一次方程式和二次方程式，自然這是再快樂沒有了，算術碰見了要弄得焦頭爛額的四則問題，只要用一兩個羅馬字母去代替那所求的數，依着題目已說明白的條件，立起一個方程式，這就死板板地照法則可以求出答數來，眞是又輕巧又明白。代數比算術眞有趣得多，容易得多！但是，這也只是在那殿裏隨便玩玩就走了出來的說法，若留連在裏面，又將看出許多困難了，一次兩次方程式，總算可以解了，一般的方程式怎樣呢？

幾何

幾何的這座院子，裏面本來是陳列着些直線和曲線的圖形的，所以，你初走進去的時候，立刻會感到一種特別風味，好像牠在數學的園地裏，儼然是別有天地。但從笛卡特(Descartes)發現了牠和代數的院落的通路，這座院子也就不是孤另另的了。牠的內部更加充實富麗起來，萊布利慈(Leibnitz)用解析的方法也增加了牠的滋長繁榮的力量不少。的確的，用二元一次方程式，$y=mx+c$ 表示直線，用二元二次方程式，$x^2+y^2=c^2$ 和 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 相應地表示圓和橢圓，實在便利不少。這條路，一經發現，來往行人都可通過，並不是只許進不許出，所以解析數學和幾何就手挽手地互相扶助着向前發展。

還有，這條路發現以後，也不是因爲牠比較便利，幾何的院子獨自的出路，便懸上一塊「路不通行，游人止步」的牌；牠自己獨立地進展，也一樣地沒有停息。即如李曼(Riemann)就是走老路。題着「位置分析」(Analysis Situs)又題着「形學」(Topobogie)的那間亭子，也就是後來新造的，在裏面使你可以看見空間的性質，幾何的連續質的純

粹的性相，你只須用到那「量度」的抽象觀念就夠了。

總集論 (Théorie des Ensembles)

在物理學的園地裏面，有着恩斯坦(Einstein)的相對性原理的新建築，牠所陳列的，是通過性靈由敏感而發明的新定理；像這種性質的寶貨，數學的園地當中，也可以找得出嗎？在數學的園地裏，走來走去所能夠見到的，都只是些老花樣，舊古董，不過和遊賞一所傾頹的古刹一樣嗎？

不，絕不！那些古老參天的樹幹，那些質樸的從幾千百年遺留下來的亭臺樓閣，在這園地裏，固然是占重要的地位，極容易映到遊人的眼裏。但倘使你看到了這些還不滿足，你慢慢地走進去，就可以看出古樹林中還有鮮豔的花草，亭樓裏面，更有新奇的裝飾；這些增加這園地的美感，充實了這園地的生命。由牠們，就可以使你知道，數學的園地從開闢到現在，沒有一天停止過繁殖。在別的各種園地裏，可以看見燦爛耀目的新點綴，但也

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

常常可以見到那舊建築傾跌以後殘留的破磚爛瓦，在數學的園地裏，卻只有欣欣向榮的盛觀；這殘敗的使人感到淒涼的遺蹟，卻非常稀少，牠裏面的一切建築裝飾，都有着很牢固的根底的呀！

數學的園地裏，有一種使人感到不可思議的寶物叫做「無限」(L'infini mathématique)，牠常常都是一樣的嗎？牠裏面究包含着些什麼，我們能夠說明嗎？牠的意義必須確定嗎？

遊到了數學的園地當中的一個新的院落，牆門上寫着「總集論」三字的，那裏面，就可以給你看這些問題的解答了。這裏面是極有趣味的，用一面大的反射鏡，可以叫你看到這全個園地和幽邃的哲學的花園的關聯以及牠倆的通路。三十年來，康脫 (Contor) 將超限數 (Des nombres transfinis) 的意義導出，和那物理的園地中可驚的新建築，一般的重要而且可驚異！在本文的最後，就要說到牠。

二　第一步

我們來開始講正文吧，先從一個極平常的例說起。

假如，我和你兩個人同乘一列火車去旅行，在車裏非常寂寞，不湊巧我們既不是詩人，不能從那些經過車窗往後飛奔的田野樹木吸取什麼「煙士披里純」；我們又不是畫家，能夠在刹那間感到什麼自然界的色相的美；我們只有枯坐了，我們會覺得那車子走得很慢，眞到不耐煩的時候，也許竟會感到牠比我們自己步行還慢；但這全是主觀的，就是同樣地以爲牠走得太慢，我們所感到的慢的程度就不一定相等。我們只管詛咒車子跑得不快，車子，牠一定不肯甘休，要問我們拿出證據來，這一下子，有事做了，我們兩個人就來測量牠的速度。

你立在車窗前數那鐵路旁邊的電線桿——假定牠們每兩根的距離是相等的，而且我們已經知道了——我看着我的錶。當你看見第一根電線桿的時候，你立刻叫出「一」來，我就注意我的錶上的秒針在什麼地方。你數到一個數目要停止的時候，又將那數叫出，我再看我的錶上的秒針指什麼地方。這樣我們屈指一算，就可以得出這火車的速度。假如得出來的是一分鐘走一公里，那麼六十分鐘，就是一小時，這火車要走六十公里；火車的速度就是每小時六十公里，我們無論怎樣，不好說牠太慢了。同樣地，若是我們知道：一個人十二秒鐘可以跑一百公尺，一匹馬半點鐘能跑十五公里，我們也可以將這人每秒鐘的或這馬每點鐘的速度算出來。

這你覺得很容易，是不是？但你眞要做得對，就是說，你眞要得出那火車或人的精確的速度來，實際卻很難。比如你另換一個方法，先只注意火車或人從地上的某一點跑到某一點要多少時間，然後用捲尺去量那兩點的距離；再計算他們的速度，就多半不會恰好，火車每點鐘是走六十公里，人每十二秒鐘可跑一百公尺；也許火車走六十公里只要

59又$\frac{3}{10}$分，人跑一百公尺不過11又$\frac{3}{5}$秒。你只要眞耐煩，你儘可以去測到幾十次或一百次，你一定可看出來，沒有幾次的得數是全然相同的。所以速度的測法，說起來很簡便，做起來，那就很不容易。你測了一百次，說不一定全沒有一次是對的。但這一點關係也沒有，卽使一百次中有一次是對的，你也沒有法子知道究竟是哪一次。歸根結蒂，我們不得不穩妥地說，只能測到「相近」的數。

說到「相近，」也有程度的不同，用的器械，——時鐘，尺子——越精良，「相近」的程度越高，反過來差誤就越小。極精密的電時鐘測量時間，差誤可以小於百分之一秒，我們可以想像，假如再將牠弄得更精密，可以使差誤小於千分之一秒，或者還要小些；但是，無論怎樣小，要使這差誤沒有，卻難能了！

* * * *

同樣地，我們對於一切運動的測量，也只能得相近的數。第一自然是因要測運動，總得測那種運動所經過的距離和牠費去的時間；而這距離和時間的測量就只能得到相

近的數。還不只這樣，運動本身也就是變動的。

假定一列火車由一個速度變到另一個較大的速度，就是變得更快一些，牠決不能突然就由前一個跳到第二個。那末，在這兩個速度當中，有多少不同的中間速度呢？這個數目，老實不客氣，是無限的呀！而我們的測量的方法，卻只容許我們計算出一個有限的數來。我們計算的時候，時間的單位越取得小，所得的結果自然越和眞實的速度相近，但無論用一秒鐘做單位或十分之一秒鐘做單位，在相鄰的兩秒鐘或兩個十分之一秒鐘的當中，常常總是有無限的中間速度。

能夠確切認知的速度原是抽象的！

這個抽象的速度只存在於我們的想像中。

這個抽象的速度，我們能夠理會，卻不能從經驗中得到。在我們所能測量得的一些速度當中，可以說，都有無限的中間速度存在。已經知道我們所測得的速度不精確，而又要用牠，這不是在自己騙自己嗎？

為了我們的精神不安，要補這個缺陷，需要一個理論上的精確的數目，需要一個容許計算到無限制的相近數的理論，應了這需要，人們就發明了微積分。

哈哈！微積分的發明，是一件很有趣味的事。英國的牛頓（Newton）和德國的萊布利慈差不多在同一個時候都將牠的原理發明了，弄得英國人認為微積分是他們的恩賜，德國人也認為是他們的禮物，各人自負着。其實呢，牛頓是從運動上面研究出來的，而萊布利慈卻是從幾何上出發，不過殊途同歸罷了。這個原理的發明，眞是功德無量，現在數學園地中的大部分建築都用牠當臺柱，物理園地的飛皇騰達也全仗牠，這個發明已有兩百年了，牠對於我們的科學的思想，着實有偉大的影響。就是說假使微積分的原理還沒有發明，現在的所謂文明，一定不是這樣的輝皇，這決不是誇張的話！

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com