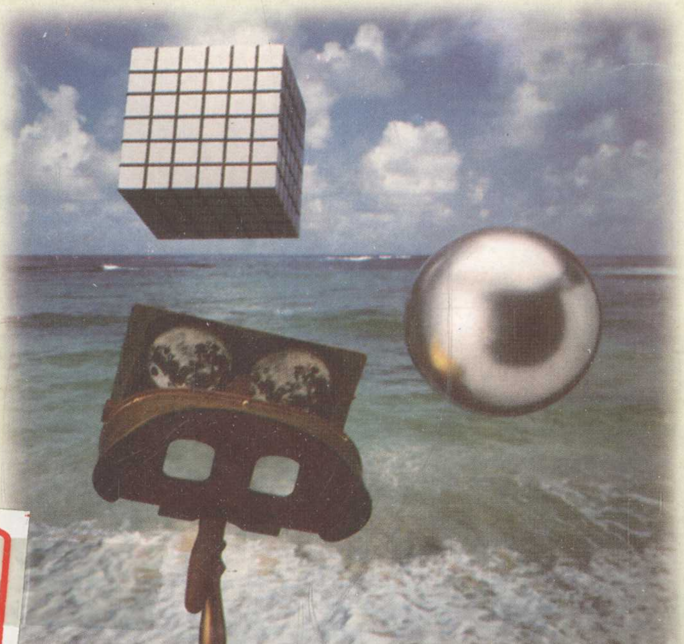
SHUXUE ZHIMI

数学之谜

科学奥秘系列丛书

舒 理等编

暨南大学出版社



图书在版编目(CIP)数据

数学之谜/舒 理等编 .—广州:
暨南大学出版社,1997.3
(科学奥秘系列丛书)
ISBN 7-81029-442-3

Ⅰ.数…
Ⅱ.舒…
Ⅲ.自然科学-普及读物
Ⅳ.N49

暨南大学出版社出版发行
中国人民解放军第四二三二工厂印刷
*
开本:787×1092 1/32 3.5 印张 70 千字
1995 年 12 月第 1 版 1997 年 3 月第 3 次印刷

内 容 简 介

科学奥秘系列丛书，是一套益智科普读物，共16本。各书从不同角度，分别对太空、大地、气象、海洋、动物、植物、人体、野人、飞碟、历史、文艺、军体、数学、物理、化学、医学等方面的谜团及奇异现象进行了科学的介绍和解释。融离奇性、怪异性、奥秘性于一炉，集知识性、趣味性、科学性于一体。读后能开阔读者的科学知识视野，激发读者的科学钻研探索精神。所以，该系列丛书是广大青少年的优良读物。

目　录

$0.\dot{9}=1$ 之谜

六年制小学数学第九册讲了循环小数的定义：一个数的小数部分从某一位起，一个数字或几个数字依次不断重复出现的小数称为循环小数，循环小数的位数是无限的，因此循环小数是无限小数。在写循环小数的时候，通常只写出它的不循环部分和第一个循环节，并在这个循环节的首位和末位数字上各记一个圆点（循环点），例如 0.666……记作 $0.\dot{6}$，0.315315……记作 $0.\dot{3}1\dot{5}$，1.41053053……记作 $1.41\dot{0}5\dot{3}$。根据上面说的循环小数的定义和写法，我们判断 $0.\dot{9}$是一个循环小数，它是一个无限小数。就是说小数点后面的位数是无限多的。换句话来说，小数点后面要有多少位，就有多少位。这样 $0.\dot{9}=0.9999\cdots\cdots$ 它可以写成无限多的一串数的和，即 $0.\dot{9}=0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots\cdots=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\cdots\cdots$ 观察这一串数的特点，不难发现，相邻的两个数，每后面的一个数是前面的一个数的$\frac{1}{10}$倍。我们设 $S=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\cdots\cdots(1)$，记作式子(1)。用$\frac{1}{10}$去乘

式子(1)得到：$\frac{1}{10}S=\frac{1}{10}\times(\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\cdots\cdots)=\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\frac{9}{100000}+\cdots\cdots(2)$，记作式子(2)。用(1)－(2)就可以得到等式：$S-\frac{1}{10}S=\frac{9}{10}$，$\frac{9}{10}S=\frac{9}{10}$，$S=1$，也就是$0.\dot{9}=1$。同学们，你们应该相信这个结果了吧？不过我还得告诉你们这里的一个秘密：在这种推理过程中，渗透了高等数学的一个思维方法，叫做“极限”思想。用这种方法去思考问题，就可以把“无限的问题”转化为“有限问题”来解决，如$0.\dot{9}=1$；把“近似问题”转化为“准确问题”来解决。它解决了数学学科中很多难解的问题。希望同学们在小学阶段就努力钻研数学，打好基础，将来去摘取数学王冠上的颗颗明珠。

（赵习敏）

分数指数幂的底大于零之谜

当指数从整数扩充到分数指数时，要求底数 a 必须大于零，这是初中代数中的一个重要问题。为什么这样规定呢？这是因为当我们引进分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$ 时，必须保证这个代数式有确定的意义，用这个代数式进行各种运算时，不会发生混乱。而 $a<0$ 便达不到这个目的。

指数是正分数时，规定：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\,(a\geqslant 0)$，其中 m、n 是自然数。如果允许 $a<0$，那么就会出现下列问题：

(1)在实数范围内，当 $m=1$，n 是偶数时，式子 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ 没有意义。

另外，分数是可以约分的，但对指数约分和不约分可能出现不同的效果。

例如，$(-2)^{\frac{6}{2}}=\sqrt{(-2)^6}=\sqrt{64}=8$；然而指数约分后，$(-2)^{\frac{6}{2}}=(-2)^3=-8$，与这里 $(-2)^{\frac{6}{2}}$ 不表示同一个意义。

(2)用分数指数作计算时，情况就更复杂了。仍以

$(-2)^{\frac{6}{2}}$为例，则有：

$(-2)^{\frac{6}{2}}=(\sqrt{-2})^6$（无意义）。

而$(-2)^{\frac{6}{2}}=(-2)^{2\times\frac{1}{2}\times 3}=[\sqrt{(-2)^2}]^3=(\sqrt{4})^3=8$；

$(-2)^{\frac{6}{2}}=(-2)^{3\times\frac{1}{2}\times 2}=[\sqrt{(-2)^3}]^2=(\sqrt{-8})^2$（无意义）。

这样对一个题来说，指数采取不同的运算顺序，结果就不一样，用符号$(-2)^{\frac{6}{2}}$进行运算就造成了混乱，所以底数不能小于零。

那么，是否 $a\geqslant 0$ 只用于 n 为偶数的情况，而当 n 是奇数时可以允许 $a<0$ 呢？这对于根式来说是可以的，但对分数指数幂来说也是不行的。这是因为分数不仅可以约分，而且还可以在分子分母上都乘以一个非零的数，这样也会发生混乱。请看：对于$(-2)^{\frac{1}{3}}$，应该有：

$(-2)^{\frac{1}{3}}=(-2)^{\frac{2}{6}}=(-2)^{\frac{3}{9}}=\cdots\cdots$

但是：$(-2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$，

$(-2)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-2)^2}=\sqrt[6]{4}=\sqrt[3]{2}$，

$(-2)^{\frac{2}{6}}=(-2)^{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=(\sqrt{-2})^{\frac{2}{3}}$（无意义）。

由此看到，分数指数幂$(-2)^{\frac{1}{3}}$仍不能表示确定的意义。

综上所述，可知：如果 $a<0$，分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$ 便不能表达一个确定的意义，用符号 $a^{\frac{m}{n}}$ 运算时，也就会产生混乱。因此规定，分数指数幂必须 $a\geqslant0$。

（徐慧瑛　赵建勋）

对数底数大于零而不等于1之谜

我们已经学过对数的定义：如果 $a^b=N(a>0$，且 $a\neq1)$，那么指数 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作

$$b=\log_a N。$$

在定义中为什么规定 $a>0$ 且 $a\neq1$ 呢？这是因为对于任意实数指数幂，底数 $a>0$ 都有意义；如果 $a=1$，则不论指数 b 是什么样的实数，$1^b=1$，这样真数 N 只能是 1，而且对数 b 也不确定，例如 b 是 3、$\frac{1}{2}$、-0.5、$\sqrt{2}$，等等，都有 $1^b=1$。这样的问题，当然没有研究的必要。若 $a=0$，

$$\begin{cases} b>0, & a^b\equiv0; \\ b\leqslant0, & a^b \text{ 无意义} \end{cases}$$

若 $a<0$，如 $(-4)^b$，这时对于 $b=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，$b=\sqrt{2}$，等等，在实数范围内 $(-4)^b$ 的值不存在，为了避免上述各种情况，所以规定 $a>0$ 且 $a\neq1$。

（朱长龄）

“0”的由来之谜

“0”最早出现在印度。在公元前约 2000 年至 1500 年左右，最古老的印度文献中已有“0”这个符号的应用。“0”在印度表示空的位置。后来这个数字从印度传入阿拉伯，意思仍然表示空位。

我国古代没有“0”这个符号，最初都用“不写”或“空位”来作解决的方法。《旧唐书》和《宋史》在讲论到历法时，都用“空”字来表示天文数据的空位。南宋时《律吕新书》把 118098 记作：“十一万八千□九十八”，可见当时是用□表示“0”，后来为了贪图书写时方便，将□将顺笔改成为“0”形，与印度原先的“0”意义相通。

“0”不能做除数之谜

0 不能做除数，我们可以从下面两种情况来谈点道理：

一种情况，如果被除数不是零，除数是零时，例如 9÷0=?，根据乘、除法的关系，就是说要找一个数，使它与 0 相乘等于被除数 9，但是任何数与 0 相乘都等于 0，而绝不会等于 9。

另一种情况是被除数和除数都是零，例如 0÷0=?，就是说要找一个数，使它与 0 相乘等于 0，因为零与任何数相乘都得零，所以要找的数不止一个，可以是任何数，那么 0÷0 的商不能得到一个确定的数，这就违反了四则运算结果的唯一性，因此零除以零是没有意义的。根据上述两种情况都可以看出零是不能做除数的。

当然，我们还可以从等分除法的意义上看，除数是 0 是不能存在的。如有 12 本书，分给 0 个学生，平均每个学生分得几本，既然没有学生分这些书，就不可能求出每个学生分得几本书，所以 0 是不能做除数的。

（钟　沂）

最大数和最小数之谜

（1）三个 1，不另加任何数学运算符号，能写成的最大的数是什么？能写成的最小的数是什么？

（2）四个 1，不另加任何数学运算符号，能写成的最大的数和最小的数是什么？

（3）三个 2，不另加任何数学运算符号，能写成的最大的数和最小的数是什么？

（4）三个 4，不另加任何数学运算符号，能写成的最大的数和最小的数是什么？

你在回答这些问题时会发现，它们都是需要仔细想一想才能正确回答的问题。

（1）很明显，111 是最大数，$1^{11}=1$ 是最小数。

（2）如果你从（1）的经验出发，以为 1111 是最大数，就错了。这里最大的数是 11^{11}。事实上，$11^3=1331>1111$，而 11^{11} 比 1111 更要大得多。最小的数当然还是 $1^{111}=1$。

（3）不要以为 2^{2^2} 是最大数；相反，它却是最小的数。这里，最大的数是 $2^{22}=4194304$。它比 222，22^2 都要大得多。

（4）你根据（3）可能以为 4^{44} 是最大的数，这又错

了。这里的最大的数却是 4^{4^4}。因为 $4^{4^4}=4^{256}$。显然，$4^{256} \gg 4^{44}$（“$\gg$”表示远远大于）。最小的数是 444。

现在，你能不另加任何运算符号，写出三个 3，三个 5，三个 6……的最大数和最小数了吗？

最小的一位数是1而不是0之谜

最小的一位数有人说是0,有人说是1。到底是0,还是1呢? 为了弄明白这个问题,我们还是从最基本的概念“数位”和“位数”说起。位数是表示一个数所占有数位的个数。例如4207这个数占有四个数位,我们就说4207是四位数。说到这里,可能认为“最小一位数是0”的人觉得找到了依据。因为0有一个数位,所以说最小的一位数是0。但是记数法里还有一个规定,就是“一个数的最高位不允许是0”,这个规定不能忽视。为什么要加上这个规定呢? 假如没有这个规定,那“0”就应该是最小的一位数,由此可以得出“00”是最小的两位数,“000”是最小的三位数,“0000”是最小的四位数,……那么最小的一位数、两位数、三位数、四位数甚至任意位数都是0,都相等了。这样的结论,我们一看就知,显然是错误的。不仅如此。如果没有这样的规定,对一个数也就没有办法确定是几位数了。比如8是一位数,“08”就变成了两位数,“008”就是三位数……这样,同一个数,我们可以任意称它为几位数了,“位数”这一概念也就没有存在的必要了。