近代微分几何

谱理论与等谱问题、曲率与拓扑不变量

Modern Differential Geometry

Spectral Theory and Isospectrum problems, Curvature and Topological Invariants

徐森林　薛春华
胡自胜　金亚东　著

中国科学技术大学出版社

当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书

中国科学技术大学

校友文库

近代微分几何

谱理论与等谱问题、曲率与拓扑不变量

Modern Differential Geometry

Spectral Theory and Isospectrum problems, Curvature and Topological Invariants

徐森林　薛春华　著
胡自胜　金亚东

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书前三章主要介绍了 Riemann 流形、Riemann 联络、Riemann 截曲率、Ricci 曲率和数量曲率. 详细研究了全测地、全脐点和极小子流形等重要内容. 此外，还应用变分和 Jacobi 场讨论了测地线、极小子流形的长度、体积的极小性. 在证明了 Hodge 分解定理之后，论述了 Laplace-Beltrami 算子 Δ 的特征值估计以及谱理论. 进而，介绍了 Riemann 几何中重要的 Rauch 比较定理、Hessian 比较定理、Laplace 比较定理和体积比较定理. 作为比较定理的应用，我们有著名的拓扑球面定理. 这些内容视作近代微分几何必备的专业基础知识. 在叙述时，我们同时采用了不变观点(映射观点、近代观点)，坐标观点(古典观点)和活动标架法. 无疑，对阅读文献和增强研究能力会起很大作用. 书中第 4、第 5 章是我们 25 年中关于特征值的估计，等谱问题、曲率与拓扑不变量等方面部分论文的汇集. 它将引导读者如何去阅读文献，如何去作研究，如何作出高水平的成果.

本书可作理科大学数学系几何拓扑方向硕士生、博士生的教科书，也可作相关数学研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

近代微分几何：谱理论与等谱问题、曲率与拓扑不变量/徐森林等著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2009.6

(当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书：中国科学技术大学校友文库)

“十一五”国家重点图书

ISBN 978-7-312-02469-6

Ⅰ. 近…　Ⅱ. 徐…　Ⅲ. 微分几何—研究　Ⅳ. O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 079611 号

出版发行　中国科学技术大学出版社

地址　安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

网址　http://press.ustc.edu.cn

印　　刷　合肥晓星印刷有限责任公司

经　　销　全国新华书店

开　　本　710mm×1000mm　1/16

印　　张　32.25

字　　数　500 千

版　　次　2009 年 6 月第 1 版

印　　次　2009 年 6 月第 1 次印刷

定　　价　98.00 元

编 委 会

总　　序

侯建国
（中国科学技术大学校长、中国科学院院士、第三世界科学院院士）

大学最重要的功能是向社会输送人才．大学对于一个国家、民族乃至世界的重要性和贡献度，很大程度上是通过毕业生在社会各领域所取得的成就来体现的．

中国科学技术大学建校只有短短的50年，之所以迅速成为享有较高国际声誉的著名大学之一，主要就是因为她培养出了一大批德才兼备的优秀毕业生．他们志向高远、基础扎实、综合素质高、创新能力强，在国内外科技、经济、教育等领域做出了杰出的贡献，为中国科大赢得了“科技英才的摇篮”的美誉．

2008年9月，胡锦涛总书记为中国科大建校五十周年发来贺信，信中称赞说：半个世纪以来，中国科学技术大学依托中国科学院，按照全院办校、所系结合的方针，弘扬红专并进、理实交融的校风，努力推进教学和科研工作的改革创新，为党和国家培养了一大批科技人才，取得了一系列具有世界先进水平的原创性科技成果，为推动我国科教事业发展和社会主义现代化建设做出了重要贡献．

据统计，中国科大迄今已毕业的5万人中，已有42人当选中国科学院和中国工程院院士，是同期（自1963年以来）毕业生中当选院士数最多的高校之一．其中，本科毕业生中平均每1000人就产生1名院士和七百多名硕士、博士，比例位居全国高校之首．还有众多的中青年才俊成为我国科技、企业、教育等领域的领军人物和骨干．在历年评选的“中国青年五四奖章”获得者中，作为科技界、科技创新型企业界青年才俊代表，科大毕业生已连续多年榜上有名，获奖总人数位居全国高校前列．鲜为

人知的是，有数千名优秀毕业生踏上国防战线，为科技强军做出了重要贡献，涌现出二十多名科技将军和一大批国防科技中坚.

为反映中国科大五十年来人才培养成果，展示毕业生在科学研究中的最新进展，学校决定在建校五十周年之际，编辑出版《中国科学技术大学校友文库》，于 2008 年 9 月起陆续出书，校庆年内集中出版 50 种.该《文库》选题经过多轮严格的评审和论证，入选书稿学术水平高，已列为国家"十一五"重点图书出版规划.

入选作者中，有北京初创时期的毕业生，也有意气风发的少年班毕业生；有"两院"院士，也有 IEEE Fellow；有海内外科研院所、大专院校的教授，也有金融、IT 行业的英才；有默默奉献、矢志报国的科技将军，也有在国际前沿奋力拼搏的科研将才；有"文革"后留美学者中第一位担任美国大学系主任的青年教授，也有首批获得新中国博士学位的中年学者……在母校五十周年华诞之际，他们通过著书立说的独特方式，向母校献礼，其深情厚意，令人感佩！

近年来，学校组织了一系列关于中国科大办学成就、经验、理念和优良传统的总结与讨论.通过总结与讨论，我们更清醒地认识到，中国科大这所新中国亲手创办的新型理工科大学所肩负的历史使命和责任.我想，中国科大的创办与发展，首要的目标就是围绕国家战略需求，培养造就世界一流科学家和科技领军人才.五十年来，我们一直遵循这一目标定位，有效地探索了科教紧密结合、培养创新人才的成功之路，取得了令人瞩目的成就，也受到社会各界的广泛赞誉.

成绩属于过去，辉煌须待开创.在未来的发展中，我们依然要牢牢把握"育人是大学第一要务"的宗旨，在坚守优良传统的基础上，不断改革创新，提高教育教学质量，早日实现胡锦涛总书记对中国科大的期待：瞄准世界科技前沿，服务国家发展战略，创造性地做好教学和科研工作，努力办成世界一流的研究型大学，培养造就更多更好的创新人才，为夺取全面建设小康社会新胜利、开创中国特色社会主义事业新局面贡献更大力量.

是为序.

2008 年 9 月

序　言

我很荣幸能为母校中国科学技术大学撰写这本《近代微分几何》，汇报我和我的硕士生、博士生25年中在这个重要方向上的研究成果.

微分几何的始祖是 C. F. Gauss (1777～1855)，他引进了曲面第1基本形式，建立了曲面论. B. Riemann(1826～1866)在1854年著名的演讲中将这个理论推广到 n 维空间，Riemann 几何就此产生，局部微分几何开始了飞速的发展，产生了张量分析. 许多著名数学家，如 S. S. Chern，J. Milnor，S. T. Yau 等在近代微分几何的研究中都作出了杰出的贡献.

20世纪30年代 Einstein 提出的广义相对论，近三十多年来 Yang-Mills 提出的规范场等就是几何学与物理学相结合的最好典范.

由于微分方程理论、拓扑学的迅速发展及积分理论的完善使得微分几何的研究，特别是整体微分几何的研究获得很多极其重要的成果，涌现出了大批著名数学家.

全书共分五章. 第1章是 Riemann 几何的基本知识. 介绍了 Riemann 度量 g，Levi-Civita(Riemann)联络 ∇，Riemann 流形基本定理，Riemann 截曲率、Ricci 曲率、数量曲率，常截曲率流形，Laplace 算子 Δ 以及活动标架法. 还介绍了子流形几何，引进了全测地、极小和全脐子流形的概念，举出了 Euclid 空间和单位球面中大量极小曲面的典型实例，特别是 Veronese 极小曲面和 Clifford 极小超曲面. 引入指数映射、Jacobi 场、共轭点，建立长度和体积的第1、第2变分公式使得我们能够深入研究测地线和极小子流

形;深入研究曲线长度和子流形体积的局部极小性和整体极小性.

第2章引进星算子$*$,上微分算子δ,将Laplace算子Δ推广到微分形式上,并建立了Hodge分解定理和Hodge同构定理.还给出了主特征值λ_1的各种估计并提出了等谱问题.

第3章论述了Riemann几何中的比较定理,主要有Rauch比较定理、Hessian比较定理、Laplace比较定理和体积比较定理.作为比较定理的应用,我们证明了著名的拓扑球面定理.

上面三章是近代微分几何中必备的重要的专业基础知识,为了能使读者更好地阅读文献,为了更好地使读者进入研究状态,我们在介绍一些重要概念、重要定理时,经常采用不变观点(映射观点、近代观点)、坐标观点(古典观点)和活动标架法三种方法描述重要概念和重要定理,这是本书的一大特点.不变观点几何直观性强、整体性强;坐标观点接近Euclid空间中的笛卡儿坐标,便于计算;外形式公式的微分会带来意想不到的惊喜,但不容易理解.通过Riemann流形基本定理,常截曲率流形,F. Schur定理,Cartan结构方程,Bianchi第1、第2恒等式的三种不同观点的描述和论述,使读者思路清晰,大大提高了阅读文献的水平,增强了研究的能力.

通过前三章内容和方法的训练,为读者建立了研究的第1个平台,凡与分析、微分方程、近代微分几何有关的课题都可得到深入的研究.第4章就是Laplace算子特征值的估计和等谱问题部分论文的汇集.关于等谱问题主要有两类:一类是两个等谱的流形M和$\widetilde{M}$(可选取$\widetilde{M}$为特殊流形,如球面,Clifford极小超曲面)附加一定的几何条件,它们就等距;另一类是两个等谱流形M和$\widetilde{M}$,只要M具有一定几何条件(如伪脐),而$\widetilde{M}$具有更强的条件(如全脐),则M也具有这个更强的条件(全脐).

为了作更深入的研究,获得更高水平、更高档次的研究成果.在作上述研究的同时,我们必须建立研究的第2个平台:要求硕士生、博士生做大量的点集拓扑难题;进一步学习微分拓扑的知识和方法;更重要的是打下扎实的同调论和同伦论(特别是基本群)基础.还要求他们阅读名著,名人的论

文.如果读者能精通两个方向,那么研究工作就能“连成线”,如果能精通三四个方向,那么你的研究工作就能“充成面”、“充成体”,其前途不可估量.在第2个平台上,我们的研究生们主要探索曲率与拓扑不变量之间相互关联、相互影响的问题.如果对流形附加一定的几何条件,我们就能得到它的某些拓扑信息(如同胚或微分同胚于$\mathbf{R}^n$、单位球面$S^n(1)$;同调群、Betti数信息;基本群、同伦群信息.特别是基本群有限的,或是有限拓扑型的)往往几何条件加得越强,散发出的拓扑信息越多.第5章就是曲率与拓扑不变量部分论文的汇集.

感谢中国科学技术大学数学系领导和老师对我们微分几何与拓扑研究小组的大力支持;感谢几何拓扑专门化创始人著名数学家吴文俊教授的热情鼓励和教导.感谢中国科学技术大学出版社为我们提供了这本专著的出版机会.借此机会,我们预祝数学系在几何拓扑方向上继续发扬光大,预祝母校日新月异,更加兴旺!

徐森林

2008年6月

目　　次

第 1 章 Levi-Civita 联络和 Riemann 截曲率

本章引进了线性联络∇、向量场的平移和测地线的概念.证明了 C^∞ 向量丛上 Riemann 度量的存在性和 Riemann 流形的基本定理(即 Levi-Civita 联络或 Riemann 联络的存在唯一性定理),介绍了 Riemann 截曲率、Ricci 曲率、数量曲率和常 Riemann 截曲率的流形.还推出了:如何由 Riemann 流形的 Riemann 联络导出正则子流形的 Riemann 联络, Riemann 正则子流形上的第 1、第 2 基本形式,Weingartan 映射,Gauss 曲率方程和 Codazzi-Mainardi 方程.对于 $\mathbf{R}^{2n+1}$中的 C^∞ 超曲面,Gauss 曲率只与第 1 基本形式有关而与第 2 基本形式无关的 Gauss 绝妙定理是一个极其深刻的定理.最后,我们用活动标架研究了线性联络、Levi-Civita 联络、曲率和正则子流形的局部几何.继 Cartan 结构方程得到了 Bianchi 第 1、第 2 恒等式的外微分形式的表示.用活动标架还重新证明了 Riemann 流形的基本定理.

我们还讨论了 C^∞ 向量场的散度和 C^∞ 函数的 Laplace 及其有关的性质.特别是散度定理、Green 第 1 公式和 Green 第 2 公式.

子流形几何是 Riemann 几何中的重要部分.本章还详细介绍了第 2 基本形式长度的平方 $\|h\|^2$、平均曲率向量 $H(x)$,全测地、极小、全脐子流形等概念及其重要性质.

C^∞ 等距浸入 $\psi: M^n \to M^{n+1}$ 是极小的充要条件是 $\Delta\psi = 0$, 即 ψ 是调和的.因此,不存在紧致 C^∞ Riemann 流形 M^n 使得 $\psi: M^n \to \mathbf{R}^{n+p}$ 是C^∞ 极小等距浸入. C^∞ 等距 $\psi: M^n \to S^m(r) \subset \mathbf{R}^{m+p}$ 是极小的充要条件是 $\Delta\psi = \frac{n}{r^2}\psi$. 这是一类既简单又重要的极小子流形.我们还详细讨论了

Veronese 曲面和 Clifford 环面这两个极其特殊的极小子流形.

应用测地线定义了指数映射 exp 并论述了各种完备的等价性. 证明了完备 C^∞ Riemann 流形中任何两点必有一条最短测地线相连. 由此得到 $\exp_p: T_pM \to M$ 为满映射.

我们知道,最短曲线必为测地线,而测地线局部为最短线. 由长度第 1 变分公式, γ 为测地线相当于 γ 为长度函数的临界道路;而由长度第 2 变分公式,如果沿测地线 $\gamma(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ 有共轭点 $\gamma(c)$, $a < c < b$, 则 γ 不是连接 $\gamma(a)$和 $\gamma(b)$的最短线. Bonnet-Myers 定理指出, n 维连通完备 C^∞ Riemann 流形,如果其截曲率 $k \geqslant c > 0$(或更一般地,其 Ricci 张量是正定的,且任一特征值 $\lambda \geqslant (n-1)c > 0$), 则 M 是紧致的,它的直径 $d(M) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{c}}$, 且基本群 $\pi_1(M)$是有限的.

从长度第 2 变分公式自然引入 Jacobi 方程

$$\nabla^2_{\gamma'} X + R(X, \gamma')\gamma' = 0,$$

而满足此方程的 X 称为 Jacobi 场. 应用 Jacobi 场,我们证明了 Cartan-Hadamard 定理: 具有非正截曲率的 n 维 C^∞ Riemann 流形无共轭点. 由此,在第 3 章定理 3.1.5 证明了该流形 C^∞ 同胚于 $\mathbf{R}^n$.

类似地,由体积第 1 变分公式, C^∞ 浸入 $f: M \to \widetilde{M}$ 是临界子流形的充要条件是平均曲率向量场 $H(x) \equiv 0$, 即 M 为极小子流形. 为进一步研究子流形的体积的极小性,需要体积的第 2 变分公式.

1.1 向量丛上的线性联络

本节主要介绍 C^∞ 向量丛 ξ 上的线性联络∇、向量的平行移动和测地线等重要概念.

定义 1.1.1 设 E, M 为 C^∞ 流形, $\dim M = n$, m 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 自然是一个 m 维流形,一般线性群 $\mathrm{GL}(m, \mathbf{R}) = \{A \mid A$ 为 $m \times m$ 非异实矩阵$\}$ 按矩阵的乘法为 C^∞ Lie 群,它 C^∞ 有效作用在 $\mathbf{R}^m$ 上(其作用为矩阵乘法,即 $A: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $a \mapsto Aa$). 所谓有效作用,即对 $\forall a \in \mathbf{R}^m$, $Aa = a$ 蕴涵着 $A = I$(单位矩阵). $\pi: E \to M$ 为 C^∞ 满映射,且是局部平凡(局部是积空间)的,也就是存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 和相应的 C^∞ 同胚

族 $\{\psi_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$, 使得对 $\forall \alpha \in \Gamma$, 图表

$$\begin{tikzcd} E|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_\alpha \times \mathbf{R}^m \arrow[dl, "\pi_{1\alpha}"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

是可交换的,即 $\pi = \pi_{1\alpha} \circ \psi_\alpha$, 其中 $\pi_{1\alpha}(p, a) = p$, 而 $\psi_{\alpha,p} = \psi_\alpha|_p$: $\pi^{-1}(\{p\}) \to \{p\} \times \mathbf{R}^m$ 为 C^∞ 线性同构. 如果 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, 则 ψ_α 和 ψ_β 诱导出 C^∞ 同胚 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$, 且图表

$$\begin{tikzcd} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^m \arrow[rr, "\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\pi_{1\alpha}"'] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^m \arrow[dl, "\pi_{1\beta}"] \\ & U_\alpha \cap U_\beta & \end{tikzcd}$$

是可交换的,即 $\pi_{1\alpha} = \pi_{1\beta} \circ \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$. 令 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, a) = (p, g_{\beta\alpha}(p)a)$, 这里, $g_{\beta\alpha}(p)$: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ 为 C^∞ 线性同构,从 $(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$ 到 $(\pi^{-1}(U_\beta), \psi_\beta)$ 的转换映射 $g_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(m, \mathbf{R})$ 为 C^∞ 映射.

由上述立即可知 $g_{\alpha\alpha}(p) = I$ 和 $g_{\gamma\alpha}(p) = g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p)$. 事实上,由 $(p, a) = \mathrm{Id}_{U_\alpha \times \mathbf{R}^m}(p, a) = \psi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1}(p, a) = (p, g_{\alpha\alpha}(p)a)$ 得到 $g_{\alpha\alpha}(p)a = a$ ($\forall a \in \mathbf{R}^m$). 再由 $\mathrm{GL}(m, \mathbf{R})$ C^∞ 有效作用于 $\mathbf{R}^m$, 故 $g_{\alpha\alpha}(p) = I$. 由 $(p, g_{\gamma\alpha}(p)a) = \psi_\gamma \circ \psi_\alpha^{-1}(p, a) = \psi_\gamma \circ \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, a) = \psi_\gamma \circ \psi_\beta^{-1}(p, g_{\beta\alpha}(p)a) = (p, g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p)a)$ 得到 $g_{\gamma\alpha}(p)a = g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p)a$; 对任意 $a \in \mathbf{R}^m$, $a = g_{\alpha\alpha}(p)a = g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\alpha}(p)a = g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p)a$, 根据 $\mathrm{GL}(m, \mathbf{R})$ C^∞ 有效作用于 $\mathbf{R}^m$, 有 $g_{\gamma\alpha}(p) \cdot g_{\alpha\gamma}(p) = I$ 及 $g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p) = I$. 于是 $g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p) = g_{\gamma\alpha}(p) \cdot g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p) = g_{\gamma\alpha}(p)$.

如果 $(\pi^{-1}(U), \psi)$ 与每个 $(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$ $(\alpha \in \Gamma)$ 满足上述 $(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\beta)$ 与 $(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$ 相应的条件,则称 $(\pi^{-1}(U), \psi)$ 是与 $\mathscr{E}' = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$ C^∞ 相容的. 类似 C^∞ 流形的定义,它唯一地确定了一个最大局部平凡族 $\mathscr{E} = \{(\pi^{-1}(U), \psi) \mid (\pi^{-1}(U), \psi)$ 与 $\mathscr{E}'$ 是 C^∞ 相容的$\}$(最大性: 凡与 $\mathscr{E}$ C^∞ 相容局部平凡化系必属于 $\mathscr{E}$),而 $\mathscr{E}'$ 称为生成 $\mathscr{E}$ 的一个**基**. 显然,如果 $\mathscr{E}_1'$ 和 $\mathscr{E}_2'$ 都是基,则 $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 \Leftrightarrow \mathscr{E}_1'$ 和 $\mathscr{E}_2'$ 是 C^∞ 相容的. 我们称六元组 $\xi = \{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m, \mathbf{R}), \mathbf{R}^m, \mathscr{E}\}$ 为 M 上的**秩为 m 的 C^∞ 向量丛**. E 为**丛(全)空间**, M 为**底空间**, π 为从 E 到 M 的**投影**, $\mathrm{GL}(m, \mathbf{R})$ 为**构造群(或结构群)**, $\mathbf{R}^m$ 为**标准纤维**, $E_p = \pi^{-1}(p)$ 为 $p \in M$ 处的**纤维**, $\mathscr{E}$ 称为**丛图册**, $(\pi^{-1}(U), \psi) \in \mathscr{E}$ 称为**丛图卡**,有时也称 E 为 C^∞ 向量丛.

显然，$\dim E = \dim M + \dim \mathbf{R}^m = n + m$，即 E 为 $n+m$ 维 C^∞ 流形.

如果 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，记 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$ 和 (U_β, φ_β)，$\{y^i\}$ 为 M 上的局部坐标系，则有下面的变换图表和公式：

$$\begin{tikzcd}
 & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[dl, "\psi_\beta"'] & \\
U_\beta \times \mathbf{R}^m \arrow[d, "(\varphi_\beta,\, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m})"'] & & U_\alpha \times \mathbf{R}^m \arrow[ul, "\psi_\alpha^{-1}"'] \\
\varphi_\beta(U_\beta) \times \mathbf{R}^m & & \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbf{R}^m \arrow[ll, "(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1},\, g_{\beta\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1})"'] \arrow[u, "(\varphi_\alpha^{-1},\, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m})"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
&(y^1, \cdots, y^n, b^1, \cdots, b^m) \\
&= \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x^1, \cdots, x^n),\ g_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(x)) \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}\right),
\end{aligned}$$

或简化为

$$(y, b) = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x),\ g_{\beta\alpha}(\varphi^{-1}(x))a).$$

这就是局部平凡化系之间的**坐标变换公式**.

例 1.1.1 设 $\xi = \{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m, \mathbf{R}), \mathbf{R}^m, \mathscr{E}\}$ 为 C^∞ 向量丛，如果存在丛图卡 $(E, \psi) \in \mathscr{E}$，则称 ξ 为 C^∞ **平凡向量丛**. 此时，$\psi: E = \pi^{-1}(M) \to M \times \mathbf{R}^m$ 为 C^∞ 同胚，$\psi_p = \psi|_p: E_p = \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbf{R}^m$ 为 C^∞ 线性同构.

定义 1.1.2 设 $\xi = \{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m, \mathbf{R}), \mathbf{R}^m, \mathscr{E}\}$ 为 C^∞ 向量丛，如果对 $0 \leqslant k \leqslant +\infty$，存在 C^k 映射 $\sigma: M \to E$，使 $\sigma(p) \in E_p$，$\forall p \in M$，即 $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$，则称 σ 为 ξ 上的一个 C^k **截面**或 C^k **向量场**.

不难看出，σ 为 ξ 上的一个 C^k 截面$\Leftrightarrow$对任何 $(\pi^{-1}(U), \psi) \in \mathscr{E}$，$(U, \varphi)$，$\{x^i\}$ 为 M 上的局部坐标系，$\sigma(p) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sigma^i(p)\psi_p^{-1}(e_i)$ 和 $\sigma^i: U \to \mathbf{R}$ 为 C^∞ 函数(即 $\sigma^i(\varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^n))$ 为 $x^1, \cdots, x^n$ 的 C^k 函数).

如果 $\xi = \{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m, \mathbf{R}), \mathbf{R}^m, \mathscr{E}\}$ 为秩 m 的 C^∞ 向量丛，则它有一个特殊的 0 **截面** $\sigma_0: M \to E$，$\sigma_0(p) = O_p \in E_p$. 于是，$\sigma_0: M \to \sigma_0(M) = \{O_p \mid p \in M, O_p$ 为 E_p 中的零向量$\}$ 为 C^∞ 同胚. 由此，我们将 M 和 0 截面的像 $\sigma_0(M)$ 视作相同.

记 $C^k(\xi) = C^k(E) = \{\sigma \mid \sigma: M \to E$ 为 C^k 截面$\}$，对 $\sigma, \eta \in C^k(\xi)$，$\lambda \in \mathbf{R}$，定义加法和数乘如下：

$$(\sigma + \eta)(p) = \sigma(p) + \eta(p),$$

$$(\lambda\sigma)(p)=\lambda\cdot\sigma(p),\qquad\forall\, p\in M.$$

容易验证 $C^k(\xi)$ 在上述加法和数乘下形成一个 $\mathbf{R}$ 上的向量空间. 如果 $m\geqslant 1$，设 (U,φ)，$\{x^i\}$ 为 M 的局部坐标系，使 $C^m(1)=\{x\in\mathbf{R}^m\mid |x^i|\leqslant 1,\ i=1,\cdots,m\}\subset\varphi(U)$，$(\pi^{-1}(U),\psi)$ 为 E 的丛图卡. 再选 C^∞ 函数 $f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$，使得 $f|_{C^m(\frac{1}{2})}=1$，$f|_{\mathbf{R}^m-C^m(1)}\equiv 0$. 显然，$\{(x^1)^l f\circ\varphi(p)\psi_p^{-1}(e_1)\mid l=0,1,2,\cdots\}$（自然视作 ξ 上的整体 C^k 截面）是线性无关的（事实上，对任何 l，令 $u=x^1$，可选 $u_1=x_1^1,\cdots,u_{l+1}=x_{e+1}^1$ 满足

$$\begin{vmatrix}1 & u_1 & u_1^2 & \cdots & u_1^l\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & u_{l+1} & u_{l+1}^2 & \cdots & u_{l+1}^l\end{vmatrix}=\prod_{i<j}(u_j-u_i)\neq 0).$$

因此，上述向量空间是无限维的. 除上述加法外，对 $\lambda\in C^k(M,\mathbf{R})$（$M$ 上 C^k 函数的全体），$\sigma,\ \eta\in C^k(\xi)$. 我们定义：$(\lambda\sigma)(p)=\lambda(p)\cdot\sigma(p)$，$\forall\,p\in M$，于是，$C^k(\xi)$ 成为 $\mathbf{R}$ 值函数的代数上的一个模.

例 1.1.2　我们知道，M 上每一点 p 处，所有的切向量形成了一个 n 维的切空间 T_pM. 自然从沿 M 的一族切空间得到一个秩为 n 的 C^∞ 向量丛，称为切丛，它是 $2n$ 维 C^∞ 流形.

设 $(M,\mathfrak{D})$ 是 n 维 C^∞ 流形，M 的**切丛** $\xi=\{TM,M,\pi,\mathrm{GL}(n,\mathbf{R}),\mathbf{R}^n,\mathscr{E}\}$ 定义如下：

$$TM=\bigcup_{p\in M}T_pM,$$

$\pi:TM\to M$，$\pi(T_pM)=\{p\}$，即 $\pi(X_p)=p$，$X_p\in T_pM$. $\pi^{-1}(p)=T_pM$ 为 p 点处的纤维. 对任何 (U,φ)，$\{x^i\}\in\mathfrak{D}$，定义局部平凡化为 ψ：$\pi^{-1}(U)=\bigcup_{p\in U}T_pM\to U\times\mathbf{R}^n$，$\psi(X_p)=\psi\Big(\sum_{i=1}^n a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big)=(p,a^1,\cdots,a^n)$，而 $\psi_p=\psi|_p:\pi^{-1}(p)=T_pM\to\{p\}\times\mathbf{R}^n$ 为线性同构. 由于 ψ 为一一映射，故从 $U\times\mathbf{R}^n$ 的拓扑自然导出了 $\pi^{-1}(U)$ 的拓扑，使 ψ 为同胚. 显然，$\tau^*=\{\pi^{-1}(U)$ 中的开集 $\mid(U,\varphi)\in\mathfrak{D}\}$ 为 TM 的拓扑基，它唯一地确定了 TM 的一个拓扑 τ. 明显地，TM 为 T_2（Hausdorff）空间，$\pi^{-1}(U)$ 为其开子集，且 $(\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})\circ\psi:\pi^{-1}(U)\to\varphi(U)\times\mathbf{R}^n$，$(\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})\circ\psi(X_p)=(\varphi(p),a^1,\cdots,a^n)=(x^1,\cdots,x^n,a^1,\cdots,a^n)$ 为同构，因而 TM 为 $2n$ 维拓扑流形.

令 $\mathscr{E}'=\{(\pi^{-1}(U),\psi)\mid(U,\varphi)\in\mathfrak{D}\}$，如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}\in\mathfrak{D}$，

(U_β, φ_β), $\{y^i\} \in \mathfrak{D}$, 则当 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ 时,有

$$\begin{aligned}(p, b^1, \cdots, b^n) &= (p, g_{\beta\alpha}(p)a) = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, a^1, \cdots, a^n) \\ &= \psi_\beta\left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = \psi_\beta\left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} a^i\right)\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p\right] \\ &= \left(p, \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^1}{\partial x^i} a^i, \cdots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^n}{\partial x^i} a^i\right),\end{aligned}$$

其中

$$g_{\beta\alpha}(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)} \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R}),$$

显然, $g_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ 为 C^∞ 的映射. 又因为

$$\begin{aligned}&(y^1, \cdots, y^n, b^1, \cdots, b^n) \\ &= ((\varphi_\beta, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) \circ \psi_\beta) \circ ((\varphi_\alpha, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) \circ \psi_\alpha)^{-1}(x^1, \cdots, x^n, a^1, \cdots, a^n) \\ &= \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x^1, \cdots, x^n), \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^1}{\partial x^i} a^i, \cdots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^n}{\partial x^i} a^i\right)\end{aligned}$$

(简记为 $(y, b) = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), g_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(x))a)$, 故 TM 为 $2n$ 维 C^∞ 流形,而 $\mathscr{E}' = \{(\pi^{-1}(U), (\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) \circ \psi) \mid (U, \varphi) \in \mathfrak{D}\}$ 为其微分构造的基. 由

$$(x^1, \cdots, x^n) = \varphi \circ \pi \circ ((\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) \circ \psi)^{-1}(x^1, \cdots, x^n, a^1, \cdots, a^n)$$

和

$$(\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) \circ \psi \circ ((\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) \circ \psi)^{-1} = \mathrm{Id}_{\varphi(U) \times \mathbf{R}^n}$$

可知, π 和 ψ 分别为 C^∞ 映射和 C^∞ 同胚. 于是,由 $\mathscr{E}'$ 唯一地确定了 TM 的一个丛图册 $\mathscr{E}$,使 ξ 或 TM 成为 M 上的一个秩为 n 的 C^∞ 向量丛,即**切丛**.

M 上 $C^k(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$ 截面 $X: M \to TM$ ($\pi \circ X = \mathrm{Id}_M: M \to M$ 或对 $\forall\, p \in M$,在映射 X 下对应于 $X_p \in T_pM$) 称为 M 上的 C^k **切向量场**. 记 M 上的 C^k 切向量场的全体为 $C^k(TM)$.

容易证明:

定理 1.1.1 设 $(M, \mathfrak{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形,则

(1) X 为 M 上的 $C^k(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$ 切向量场 $\Leftrightarrow$ 对任何 (U, φ), $\{x^i\} \in \mathfrak{D}$, $X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$, $p \in U$,有 $a^i \in C^k(U, \mathbf{R})$;

(2) X 为 M 上的 C^∞ 切向量场 $\Leftrightarrow$ 对任何 $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ 有 $Xf \in$