SHUXUE

黄琪锋 主编

备战全国高中数学联赛

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

SHUXUE

高中数学竞赛系列丛书

◎ 更高更妙的高中数学思想与方法

◎ 全国高中数学联赛预测卷

◎ 高中数学竞赛真题评析

◎ 全国高中数学联赛冲刺

◎ 备战全国高中数学联赛

ISBN 978-7-308-06995-3

9 787308 069953 >

定价：28.00元

备战全国高中数学联赛

主　编　黄琪锋
副主编　丁之元　童精中　沈云骢
编　著　丁之元　童精中　沈云骢
　　　　郭家胤　杨骥雷　李　恒
　　　　黄琪锋
校　对　卢闽浙

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

编 写 说 明

数学离不开解题.掌握数学首先就意味着善于解题.那么怎样提高自己的解题能力呢?本书的作者们以自己成功的解题经历,合力为我们奉献了一本关于如何解题的书籍.

本书的特点:

1. 新颖性:这本书是效实中学2009届理科创新实验班数学竞赛同学三年奋斗的结晶.我们充分吸收了近几年世界各地优秀数学竞赛试题,从学生的角度,通过对典型试题的剖析、归纳、推广,传授处理数学问题的思想方法.在模拟题部分我们紧扣新联赛模式,试题有一些来源于各种竞赛,更多的是编者们自编,为读者提供了不可多得的针对性训练机会.

2. 基础性:书中的一试专题按照高考章节编写,基础与提高并重,帮助学生从竞赛的角度进一步深化对中学数学内容的认识;书中的二试专题按照新联赛的要求分类讲授,强调提高,帮助学生掌握数学竞赛中的疑难知识,提高学生综合解题能力.本书配有充足的习题,建议读者在看书时不必按部就班,可选择自己的薄弱环节进行练习,对习题灵活应用.

3. 特殊性:本书的编者们都是全国高中联赛(浙江赛区)全国一等奖获得者.

丁之元　2009中国数学奥林匹克竞赛银牌,2007年、2008年全国高中数学联赛浙江赛区全国一等奖

沈云骢　2008年全国中学生物理决赛银牌,2008年全国中学生物理竞赛浙江赛区全国一等奖,2008年全国高中数学联赛浙江赛区全国二等奖

童精中　2008年全国高中数学联赛浙江赛区全国一等奖

郭家胤　2008年全国高中数学联赛浙江赛区全国一等奖

杨骥雷　2008年全国高中数学联赛浙江赛区全国一等奖

李　恒　2008年全国高中数学联赛浙江赛区全国一等奖

由于水平有限,书中错漏难免,敬请专家和读者批评指正.

目录 CONTENTS

一 一试专题

第一讲 集 合

知识概要

一、集合运算律

交换律：$A \cap B = B \cap A$；$A \cup B = B \cup A$.

结合律：$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

求补律：$A \cap \complement_U A = \varnothing$，$A \cup \complement_U A = U$，$\complement_U(\complement_U A) = A$.

反演律：$\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$，$\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$.

例题精讲

例 1 设集合 A 的元素都是正整数，满足如下条件：

(i) A 的元素个数不小于 3，

(ii) 若 $a \in A$，则 a 的所有因数都属于 A，

(iii) 若 $a \in A$，$b \in A$，$1 < a < b$，则 $1 + ab \in A$.

那么，(1) 1，2，3，4，5 是否是集合 A 的元素？

(2) 2005 是否是集合 A 的元素？

【分析】 要反复利用条件解题，此题考查的是对集合的定义的理解.

【解答】 1. (1) 首先由(2) 易知 $1 \in A$.

2. 取 $a \in A$，$b \in A$，$1 < a < b$，若 a，b 中至少有一个是偶数，则 $2 \in A$. 若 a，b 都是奇数，则$1 + ab \in A$，且其为偶数，所以 $2 \in A$.

3. 由条件(1) 可知，存在 a，使得 $a \in A$ 且 $a > 2$，则 $1 + 2a \in A$，从而 $1 + 2(1 + 2a) = 3 + 4a \in A$. 所以$1 + (1 + 2a)(3 + 4a) = 4 + 10a + 8a^2 \in A$. 若 a 是偶数，则 $4 \mid (4 + 10a + 8a^2)$；若 a 是奇数，令 $4 + 10a + 8a^2 = b$，则 b 是大于 2 的偶数，重复以上过程可得 $4 \mid (4 + 10b + 8b^2)$. 故 $4 \in A$.

4. 由于 $1 + 2 \times 4 = 9 \in A$，从而 $3 \in A$.

5. 又 $1 + 2 \times 3 = 7 \in A$，$1 + 2 \times 7 = 15 \in A$，由条件(2)得 $5 \in A$.

综上所述，1，2，3，4，5 都是集合 A 的元素.

(2) 由于 $1 + 3 \times 5 = 16$，从而 $8 \in A$，由于 $1 + 4 \times 8 = 33$，从而 $1 + 3 \times 33 = 100$，从而

$1+5\times100=501$,从而 $1+4\times501=2005$.

故 2005 为集合 A 的元素.

【评注】 事实上可以用数学归纳法证明:$A=\mathbf{N}^+$.

1. $1,2,3,4\in A$.

2. 若 $1,2,3,\cdots,n\in A(n>5)$,如果 $n+1=2k+1$ 是奇数,于是 $n+1=1+2k\in A$. 如果 $n+1=2k$ 是偶数,$2k+1\in A$,$1+(2k-1)(2k+1)=4k^2\in A$,故 $2k\in A$.

3. 由 1、2 得,$A=\mathbf{N}^+$.

例 2 将与 210 互质的所有正整数从小到大排列,求这个数列的第 961 项.

【分析】 只需考虑 210 内与 210 互质的数即可,可以用容斥原理.

【解答】 $210=2\times3\times5\times7$.

设 $S=\{1,2,\cdots,210\}$,$A_i=\{a\mid a\in S,且\ i\mid a\}$.则 $|A_2|=|\frac{210}{2}|=105$,$|A_3|=70$,$|A_5|=42$,$|A_7|=30$,$|A_2\cap A_3|=35$,$|A_2\cap A_5|=21$,$|A_2\cap A_7|=15$,$|A_3\cap A_5|=14$,$|A_3\cap A_7|=10$,$|A_5\cap A_7|=6$,$|A_2\cap A_3\cap A_5|=7$,$|A_2\cap A_3\cap A_7|=5$,$|A_2\cap A_7\cap A_5|=3$,$|A_7\cap A_3\cap A_5|=2$,$|A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|=1$.

故在 1 到 210 中,与 210 互质的数有

$|\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_7}|=|S|-(|A_2|+|A_3|+|A_5|+|A_7|)+(|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_5|+|A_2\cap A_7|+|A_3\cap A_7|+|A_3\cap A_5|+|A_5\cap A_7|)-(|A_2\cap A_3\cap A_7|+|A_2\cap A_5\cap A_7|+|A_2\cap A_3\cap A_5|+|A_7\cap A_3\cap A_5|)+(|A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|)=48$.

由 $961=20\times48+1$.可知在 $\{210k+1,210k+2,\cdots,210(k+1)\}(k=0,1,\cdots,19)$ 中均有 48 个数与 210 互质,在 $\{4201,4202,\cdots,4410\}$ 中第一个与 210 互质的数为第 961 项,即 4201.

【评注】 1. 此题用到了容斥原理:

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|=|\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}|=|I|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|-\cdots+(-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|+\cdots.$$

2. 容斥原理在竞赛中经常用到,如著名的欧拉投信问题即可用此解答:

有 n 封不同的信,n 个不同的信箱,信与信箱一一对应,求信都投错的情况的种数.

用容斥原理得数量等于 $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cdot C_n^i\cdot(n-i)!$.

例 3 (2005 年中国西部数学奥林匹克)设 $S=\{1,2,\cdots,2005\}$,若 S 中任意 n 个两两互质的数组成的集合中都至少有一个质数,求 n 的最小值.

【分析】 原问题等价于:求 n 的最大值,使得 S 中存在 $n-1$ 个两两互质的数组成的集合中均无质数.设 A 为满足元素两两互质的集合,$|A|=n-1$,则 A 中的每个元素的质因数构成的集合是小于 2005 的质数构成的集合的某个子集,且满足 A 中任意两个元素没有公共的质因子,因为求 n 的最大值,所以 A 中每个元素应尽量只有一个质因数.可以想到是由质数的平方和 1 构成的集合 $A_0=\{1,2^2,3^2,5^2,\cdots,41^2,43^2\}$,因此猜想答案为 16.

【解答】 $n_{\min}=16$

首先取 S 的子集 $A_0=\{1,2^2,3^2,5^2,\cdots,41^2,43^2\}$不满足条件，故 $n\geqslant 16$.

其次可以证明，任意 $A\subset S, n=|A|=16$，A 中任两数互质，则 A 中必存在一个质数.

反证法：假设 A 中无质数，记 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{16}\}$，分两种情况讨论.

(1) 若 $1\notin A$，则 $a_1,a_2,\cdots,a_{16}$ 均为合数，又 $(a_i,a_j)=1(1\leqslant i<j\leqslant 16)$，故 a_i 与 a_j 的质因数均不相同. 设 a_i 的最小质因数为 p_i，不妨设 $p_1<p_2<\cdots<p_{16}$，则 $a_1\geqslant p_1^2\geqslant 2^2, a_2\geqslant p_2^2\geqslant 3^2,\cdots,a_{15}\geqslant p_{15}^2\geqslant 47^2>2005$，矛盾.

(2) 若 $1\in A$，不妨设 $a_{16}=1$，$a_1,a_2,\cdots,a_{15}$ 均为合数，同理，矛盾.

综上，A 中必有质数，故 $n_{\min}=16$.

例 4 (1992 全国数学联赛) 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$，若 X 是 S_n 的子集，把 X 中的所有数的和称为 X 的容量(规定空集的容量为 0)，若 X 的容量为奇(偶)数，则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集.

(1) 求证：S_n 的奇子集与偶子集的个数相等.

(2) 求证：当 $n\geqslant 3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等.

(3) 当 $n\geqslant 3$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

【分析】 与奇子集对应地定义偶子集，考察若干项可发现奇偶子集的个数相同，所有的奇偶子集容量之和相等. 于是通过构造奇偶子集之间的一一映射来证明上述结论.

【解答】 (1) 对任意 $X\subset S_n$，当 $1\in X$ 时，就从 X 中取出 1 得 X'；当 $1\notin X$ 时，就将 X 中添上 1 得 X'. 则 X 与 X' 奇偶性必不相同. 于是奇子集与偶子集一一对应，个数相等.

(2) 设 S_n 中的奇子集，偶子集的个数分别为 a_n, b_n，所有奇子集，偶子集的容量之和分别为 $f(S_n), g(S_n)$，已知 $a_n=b_n=2^{n-1}$.

1. 当 $n\geqslant 3$ 且 n 为奇数时，S_n 中的奇(偶)子集由两部分组成：一是 S_{n-1} 的奇(偶)子集，二是 S_{n-1} 的每个偶(奇)子集与 $\{n\}$ 的并集. 于是，有

$$\begin{aligned} f(S_n) &= f(S_{n-1})+[g(S_{n-1})+nb_{n-1}] \\ &= f(S_{n-1})+g(S_{n-1})+na_{n-1} \\ &= g(S_{n-1})+[f(S_{n-1})+na_{n-1}] \\ &= g(S_n). \end{aligned}$$

2. 当 $n\geqslant 3$ 且 n 为偶数时，$n-1$ 为奇数，由上式有 $a_{n-1}=b_{n-1}$ 且 $f(S_{n-1})=g(S_{n-1})$. 此时，S_n 中的奇(偶)子集由两部分组成：一是 S_{n-1} 的奇(偶)子集，二是 S_{n-1} 的每一个奇(偶)子集与 $\{n\}$ 的并集. 于是有

$$f(S_n)=f(S_{n-1})+[g(S_{n-1})+na_{n-1}]=g(S_{n-1})+[f(S_{n-1})+nb_{n-1}]=g(S_n).$$

综上，当 $n\geqslant 3$ 时，$f(S_n)=g(S_n)$.

(3) 由于 S_n 中每个元素都出现在 2^{n-1} 个子集中，则 S_n 的所有子集的容量为

$$f(S_n)+g(S_n)=(1+2+\cdots+n)2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}.$$

故 $f(a_n)=n(n+1)2^{n-3}$.

【评注】 1. 对于集合计数的问题，有些情况下可以通过找映射的方式，比较集合之间的大小而不需要将确切数量算出来，如下题：

正整数 n 写成若干个 1 与若干个 2 之和，和项的顺序不同认为是不同的写法，所有写法的种数记为 $A(n)$；将正整数 n 写成若干个大于 1 的正整数之和，和项顺序不同认为是不同的写法，所有写法的种数记为 $B(n)$，求 $A(n)$ 与 $B(n+2)$ 的大小关系.

考察若干项会发现 $A(n)=B(n+2)$，因此转而证明此式，需要构造一个 $A(n)$ 与 $B(n+2)$ 映射.

以下是构造的映射：

记集合 P_n 为第一种写法的集合，Q_n 为第二种写法的集合.

$$P_n=\left\{(a_1,a_2,\cdots)\mid \sum a_i=n, a_1=1\text{ 或 }2\right\},$$

$$Q_{n+2}=\left\{(b_1,b_2,\cdots)\mid \sum b_i=n+2, b_i\geqslant 2, b_i\in\mathbf{N}\right\}.$$

$$\begin{aligned}&a_{i_1}=a_{i_2}=\cdots=a_{i_k}=2,\\ &i_0=0, b_j=a_{i_{j-1}+1}+\cdots+a_{i_j},\\ &j=1,2,\cdots,k, b_{k+1}=a_{i_k+1}+a_{i_k+2}+\cdots+2.\end{aligned}$$

然后证明此映射是一一对应，请读者自己证明.

例 5 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 3)$ 是由自然数组成的有限集. 证明：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\frac{1}{C_n^3}\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|\geqslant\frac{2}{C_n^2}\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|.$$

【解答】 设 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$. 设 a_i 恰属于 b_i 个集合，$(i=1,2,\cdots,m)$. 则

$$\sum_{i=1}^{n}|A_i|=\sum_{i=1}^{m}b_i.$$

$$\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|=\sum_{i=1}^{m}C_{b_i}^3.$$

$$\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|=\sum_{i=1}^{m}C_{b_i}^2.$$

只需证

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}b_i+\frac{1}{C_n^3}\sum_{i=1}^{m}C_{b_i}^3\geqslant\frac{2}{C_n^2}\sum_{i=1}^{m}C_{b_i}^2,$$

即

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{n}\cdot b_i+\frac{1}{C_n^3}\cdot C_{b_i}^3-\frac{2}{C_n^2}\cdot C_{b_i}^2\right)\geqslant 0.$$

下证，对 $i=1,2,\cdots,m$ 都有

$$\frac{1}{n}\cdot b_i+\frac{1}{C_n^3}\cdot C_{b_i}^3-\frac{2}{C_n^2}\cdot C_{b_i}^2\geqslant 0.$$

上式

$$\Leftrightarrow\frac{b_i}{n}+\frac{b_i(b_i-1)(b_i-2)}{n(n-1)(n-2)}\geqslant\frac{2b_i(b_i-1)}{n(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow(n-1)(n-2)+(b_i-1)(b_i-2)\geqslant 2(b_i-1)(n-2)$$

$$\Leftrightarrow(b_i-n)[b_i-(n-1)]\geqslant 0$$

显然成立.

【评注】 在出现集合的交、并的问题中,考察每个元素所属于的集合数目,不但是进行不等式估计的有效途径,也是进行组合论证的常用方法.

例 6 设 n 是正整数,并记 X 是含有 n^2+1 个正整数的集合,并且具有如下性质:任何含有 $n+1$ 个元素的子集,一定包含两个元素,使得其中一个元素能整除另一个元素. 证明:X 一定包含一个子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}\}$,满足 $x_i \mid x_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$.

【解答】 设 X' 是 X 的子集,x 是 X' 中的一个元素. 考察满足以下条件的有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_k)$,其中 $x_k=x,x_i \mid x_{i+1}(i=1,2,\cdots,k-1)$. 定义 $f(X',x)$ 为这些数组的元素个数的最大值.

条件转化为:X 中任何一个 $n+1$ 个元素的子集 X' 都包含一个元素 x,使得 $f(X',x)\geqslant 2$. 注意到,若 $f(X,a)=f(X,b)$,则 a,b 不能相互整除. 于是使得 $f(X,x)=k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的元素 x 不超过 n 个. 由于 X 共有 n^2+1 个元素,由抽屉原理,存在一个元素 x,使得 $f(X,x)\geqslant n+1$. 这就证明了结论.

【评注】 本题是 Dilworth 定理的一个特例.

Dilworth 定理:在一个至少有 $mn+1$ 个元素的偏序集中(即一部分元素之间具有顺序,可比较大小),或者有 $m+1$ 个元素可以互相比较,或者有 $n+1$ 个元素是两两不能进行比较的.

此题中将定理用于 $m=n$ 的情形,并且指定的"序"为整除.

例 7 (2007 年全国高中数学联赛)设集合 $P=\{1,2,3,4,5\}$. 对任意 $k\in P$ 和正整数 m,记 $f(m,k)=\sum_{i=1}^{5}\left[m\sqrt{\frac{k+1}{i+1}}\right]$,其中$[a]$表示不大于 a 的最大整数. 求证:对任意正整数 n,存在 $k\in P$ 和正整数 m,使得 $f(m,k)=n$.

【解答】 定义集合 $A=\{m\sqrt{k+1}\mid m\in\mathbf{N}^+,k\in P\}$.

由于当任意 $k,i\in P$ 且 $k\neq i$ 时,$\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$ 是无理数,所以对任意的 $k_1,k_2\in P$ 和正整数 m_1,m_2,$m_1\sqrt{k_1+1}=m_2\sqrt{k_2+1}$ 当且仅当 $m_1=m_2,k_1=k_2$. 这表明 A 中没有重复元素.

注意到 A 是一个无穷集,现将 A 中的元素按从小到大的顺序排成一个无穷数列. 对于任意的正整数 n,设此数列中第 n 项为 $m\sqrt{k+1}$. 下面确定 n 与 m、k 间的关系.

若 $m_i\sqrt{i+1}\leqslant m\sqrt{k+1}$,则 $m_i\leqslant m\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$. 由 m_i 是正整数知,对 $i=1,2,3,4,5$,满足这个条件的 m_i 的个数为$\left[m\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}\right]$,从而 $n=\sum_{i=1}^{5}\left[m\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}\right]=f(m,k)$. 因此对任意的 $n\in\mathbf{N}^+$,存在 $m\in\mathbf{N}^+,k\in P$,使得 $f(m,k)=n$.

【评注】 并不是所有的无穷集合都可以将其中的元素从小到大排成一列,此题中的集合具有上述性质,请读者自行证明.

习　题

1. 对于集合 M、N，定义 $M-N=\{x \mid x\in M$ 且 $x\notin N\}$，$M\otimes N=(M-N)\cup(N-M)$，设 $A=\{y \mid y=x^2-3x, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y \mid y=-2^x, x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\otimes B=$ ________.

2. 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均为正整数等差数列，它们的公差分别为 d_1，d_2，且均大于零. 若集合 $A=\{a_n \mid n\in\mathbf{N}^+\}$，$B=\{b_n \mid n\in\mathbf{N}^+\}$，则两数列首项相等(即 $a_1=b_1$)是集合 $C=A\cap B$ 的元素也是一个正整数等差数列的__________条件.

3. (1995 年全国高中数学联赛) 设 $M=\{1,2,\cdots,1995\}$，A 是 M 的子集且满足条件：当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$，则 $|A|_{\max}=$ __________.

4. (1997 年上海市高中数学竞赛) 设 $S=\{1,2,3,4\}$，n 项的数列：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有下列性质，对于 S 的任何一个非空子集 B，在该数列有连续的 $|B|$ 项恰好组成集合 B，n 的最小值是________.

5. 从自然数集 $\{1,2,3,\cdots,100\}$ 中，随意选出 n 个数来，使得其中一定有两个数，它们中的一个是另外一个的整数倍，n 的最小值是______.

6. 已知 A 与 B 是集合 $\{1,2,3,\cdots,100\}$ 的两个子集，满足：A 与 B 的元素个数相同，且 $A\cap B$ 为空集. 若 $n\in A$ 时总有 $2n+2\in B$，则集合 $A\cup B$ 的元素个数最多为________.

7. 已知 $A\subset\{1,2,\cdots,2000\}$ 且 A 中任意两个数之差的绝对值不等于 4 或 7，求 $|A|$ 的最大值.

8. 集合 $\{2,1,4,6,9\}$ 从大到小排列成 $\{9,6,4,2,1\}$，它的交错和是指 $9-6+4-2+1=6$，$\{5\}$ 的交错和定义为 5，对于集合 $\{1,2,\cdots,n\}$，求它的所有子集的交错和的总和 S.

9. 设 $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{99},\frac{1}{100}\right\}$，$G\subset S$($G$ 非空)，G 之积数定义为 G 中所有元素之乘积，求 S 中所有偶数个元素之子集的积数和 A.

10. (2005年巴尔干地区数学奥林匹克) 已知 $S \subset \{1,2,\cdots,n\}$，且 S 中不存在这样的数对：其中一个数能被另一个数整除，或与另一个数互质. 问集合 S 可能包含的元素最多有多少.

11. (2003年巴西数学奥林匹克) 设 S 是有 n 个元素的集合，$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是任意 k 个两两不同的 S 的子集，且设 $B_i = A_i$ 或 $S - A_i$，$i = 1, 2, \cdots, k$，求 k 的最小值，使得我们可以选择恰当的 B_i，满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i = S$.

12. 求两两不同的三元实数组 (x, y, z)，满足 $\{x, y, z\} = \left\{\dfrac{x-y}{y-z}, \dfrac{y-z}{z-x}, \dfrac{z-x}{x-y}\right\}$.

13. 设正整数 $k(k > 1)$. 一个由正整数构成的集合 S 满足所有的正整数被染为 k 种颜色，使得 S 中没有元素是两个同色的不同整数的和，则称集合 S 是"好的". 求最大的正整数 t，使得对于所有的正整数 a，集合 $S = \{a+1, a+2, \cdots, a+t\}$ 是好的.

第二讲　函　　数

知识概要

几种特殊的映射

若 $f: A \to B$ 是一个映射，且对任意 $x, y \in A, x \neq y$，都有 $f(x) \neq f(y)$，则称 f 是 A 到 B 的一个单射. 显然，若 A、B 都是有限集，且能建立 A 到 B 的单射，则 $|A| \leqslant |B|$.

若 $f: A \to B$ 是一个映射，且对任意 $y \in B$，都有一个 $x \in A$，使得 $y = f(x)$，则称 f 是 A 到 B 的一个满射. 显然，若 A、B 都是有限集，且能建立 A 到 B 的满射，则 $|A| \geqslant |B|$.

若 $f: A \to B$ 是一个映射，并且 f 既是单射，也是满射，则称 f 是 A 到 B 的一个一一对应. 当 A、B 都是有限集时，如能建立 A 到 B 上的一一对应，则 $|A| = |B|$.

例题精讲

例 1　(2006 年中国香港数学奥林匹克) 对任一正整数 k，设 $f_1(k)$ 是 k 的各位数字之和的平方(例如，$f_1(123) = (1+2+3)^2 = 36$). 若 $f_{n+1}(k) = f_1(f_n(k))$，求 $f_{2007}(2^{2006})$ 的值.

【解答】　因为 $2^{2006} < 8^{700} < 10^{700}$，所以 $f_1(2^{2006}) < (9 \times 700)^2 < 5 \times 10^7$. 因此，

$$f_2(2^{2006}) < (4 + 9 \times 7)^2 < 4900, f_3(2^{2006}) \leqslant (3 + 9 \times 3)^2 = 30^2.$$

由 $2^6 \equiv 1 \pmod 9$ 知 $2^{2006} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 9$. 于是，

$$f_1(2^{2006}) \equiv 4^2 \equiv 7 \pmod 9, f_2(2^{2006}) \equiv 7^2 \equiv 4 \pmod 9.$$

从而，$f_3(2^{2006}) = n^2$，其中，$n \leqslant 30$ 且 $n \equiv f_2(2^{2006}) \equiv 4 \pmod 9$. 因此，$f_3(2^{2006}) = 16, 169$ 或 484. 这表明，$f_4(2^{2006}) = 49$ 或 256，$f_5(2^{2006}) = 169$，$f_6(2^{2006}) = 256$，$\cdots$，$f_{2007}(2^{2006}) = 169$.

【评注】　*在应对一些函数迭代题时，当迭代次数较多时，可以从次数较少的情形入手，慢慢尝试，并通常通过发现其中的函数周期，便将高次迭代的函数值转化为较低次的问题，本题便采取了这种策略.*

例 2　(2005 年罗马尼亚数学奥林匹克) 已知 $n(n \geqslant 3)$ 为整数，求满足以下性质的函数 $f: \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ 的个数：

$$f(f(k)) = (f(k))^3 - 6(f(k))^2 + 12f(k) - 6$$

对所有的 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 都成立.

【解答】　令 $y = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} f(k)$，则 $f(y) \leqslant y$. 由 $y^3 - 6y^2 + 12y - 6 \leqslant y$ 得 $(y-1)(y-2)(y-3) \leqslant 0$，于是 $y \in \{1, 2, 3\}$. 设 f 的值域为 A，显然有 $A \subseteq \{1, 2, 3\}$.

若 $a\in A$，则存在 b 使得 $f(b)=a$，将 b 代入原式，可得 $f(a)=a$. 若 $a\notin A$，$f(a)$ 可取 A 中所有的值.

当 $|A|=1$ 时，这样的函数有 3 个；

当 $|A|=2$ 时，这样的函数有 $3\times 2^{n-2}$ 个；

当 $|A|=3$ 时，这样的函数有 $3\times 2^{n-3}$ 个.

综上所述，满足条件的函数共有 $3+3\times 2^{n-2}+3\times 2^{n-3}$ 个.

例 3 设 $S=\{1,2,3,4,5\}$. 问：有多少个函数 f：$S\to S$ 具有如下性质：对任意 $x\in S$，均有 $f^{(50)}(x)=x$？

【分析】 首先要证明此函数是一个一一映射，由此函数的周期必定小于等于 5，可引入一个圈长的概念进行讨论.

【解答】 对任意 $x,y\in S$，其中 $x\neq y$，若 $f(x)=f(y)$，则 $x=f^{(50)}(x)=f^{(50)}(y)=y$，导致 $x=y$，矛盾. 这表明 f 是在 S 上的单射. 对任意 $n\in \mathbf{N}^{+}$，均有 $f^{(n)}(S)=f(f^{(n-1)}(S))\subseteq f(S)$，由 $f^{(50)}(x)$ 为满射，可知 f 为满射（这里 $f(S)$ 表示 f 的值域）. 从而 f 是 $S\to S$ 的一一对应.

其次，对任意 $x\in S$，设 r 是使得 $f^{(r)}(x)=x$ 的最小正整数，称 r 是 x 对函数 f 的圈长，则 r 有如下性质：$r\leqslant 5$，并且 $r\mid 50$. 以下说明上述性质.

事实上由于 f 是一一对应，$f^{(50)}(x)=x$，故 r 存在，可知 $x,f(x),\cdots,f^{(r-1)}(x)$ 是 r 个不同的数，从而 $r\leqslant 5$.

另一方面，若 r 不整除 50，即 $r=rq+m$，$0<m<r$，则 $f^{(50)}(x)=f^{(m)}(f^{(qr)}(x))=f^{(m)}(x)\neq x$，矛盾. 故圈长 r 只能为 1,2,5.

按 $f(x)$ 的圈长进行讨论，分别求函数 f 的个数.

若 $r=5$，f 为 1,2,3,4,5 的圆排列，共 $4!=24$ 个. 若 5 个数的圈长均为 1，则 $r=1$，即 $f(x)=x$，仅 1 个. 若 3 个数的圈长为 1，2 个圈长为 2，共 $C_5^2=10$ 个. 若 4 个数圈长为 2，其余一数圈长为 1，共 $\dfrac{C_5^2C_3^2}{2}=15$ 个.

综上，共 50 个这样的函数.

【评注】 本题目巧妙地引入了圈长的概念帮助解题.

例 4 $\triangle ABC$ 的三边长 a,b,c 满足 $a+b+c=1$. 求证：

$$5(a^2+b^2+c^2)+18abc\geqslant \frac{7}{3}.$$

【分析】 此题直接入手较难，根据条件知 $a^2+b^2+c^2=1-2(ab+bc+ca)$，故待证式中出现 $ab+ac+bc,abc$，由此联系到三次函数，可以用构造函数法解题.

【证明】 由题设得 $a^2+b^2+c^2=1-2(ab+bc+ca)$，等价于证明

$$\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc\leqslant \frac{4}{27}.$$

构造三次函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-x^2+(ab+bc+ca)x-abc$.

由于 $a+b+c=1$，且 a,b,c 是三角形三条边的长，故 $0<a,b,c<\dfrac{1}{2}$，从而 $0<a,b,c<$

$\frac{5}{9}$. 一方面，$f\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{125}{729}-\frac{25}{81}+\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc$，另一方面，

$$f\left(\frac{5}{9}\right)=\left(\frac{5}{9}-a\right)\left(\frac{5}{9}-b\right)\left(\frac{5}{9}-c\right)\leqslant\left[\frac{\frac{5}{3}-a-b-c}{3}\right]^3=\frac{8}{729}.$$

故$\frac{125}{729}-\frac{25}{81}+\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc\leqslant\frac{8}{729}$，所以$\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc\leqslant\frac{4}{27}$.

例 5 是否存在一个 $\mathbf{N}$ 上的双射 f，满足下述性质：

(1) $f(n+2006)=f(n)+2006(n\in\mathbf{N})$；

(2) $f(f(n))=n+2(n=1,2,\cdots,2004)$；

(3) $f(2549)>2550$?

【解答】 定义一个函数 f.

$$f(n)=\begin{cases}n-1, & n=2,4,\cdots,2006;\\ n+3, & n=1,3,\cdots,2003;\\ 2, & n=2005;\\ f(n-2006)+2006, & n\geqslant 2007.\end{cases}$$

当 $n=1,2,\cdots,2006$ 时，此映射可表示如下：

$$1\to4\to3\to6\to5\to\cdots\to2004\to2003\to2006\to2005\to2\to1.$$

则 f 为$\{1,2,\cdots,2006\}$上的双射. 由 $f(n)=f(n-2006)+2006(n>2006)$，知 f 也是

$$\{2006k+1,2006k+2,\cdots,2006(k+1)\}(k=0,1,2,\cdots)$$

上的双射.

因此，f 为 $\mathbf{N}$ 上的双射.

容易验证，f 满足题中要求的三条性质.

因此，存在满足题意的双射 f.

【评注】 在此类题目中，构造出相应的函数便可解决问题，但是这种做法通常非常考验解题技巧；而在更多的情况下，题目旨在考察考生的证明能力，此时构造函数的方法显然行不通了. 因此我们需要对原题进行考察之后选择适当的方法.

例 6 （2008 年全国高中数学联赛）设函数 $f(x)$ 对所有的实数 x 都满足 $f(x+2\pi)=f(x)$，求证：存在 4 个函数 $f_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$满足：

(1) 对 $i=1,2,3,4$，$f_i(x)$ 是偶函数，且对任意的实数 x，有 $f_i(x+\pi)=f_i(x)$；

(2) 对任意的实数 x，有 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)\cos x+f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$.

【解答】 记 $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$，$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$，则 $f(x)=g(x)+h(x)$，且 $g(x)$ 是偶函数，$h(x)$ 是奇函数，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$g(x+2\pi)=g(x)$，$h(x+2\pi)=h(x)$.

令
$$f_1(x)=\frac{g(x)+g(x+\pi)}{2},$$

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(x+\pi)}{2\cos x}, & x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{h(x)-h(x+\pi)}{2\sin x}, & x\neq k\pi,\\ 0, & x=k\pi,\end{cases}$$

$$f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{h(x)+h(x+\pi)}{2\sin 2x}, & x\neq \dfrac{k\pi}{2},\\ 0, & x=\dfrac{k\pi}{2},\end{cases}$$

其中 k 为任意整数.

容易验证 $f_i(x)(i=1,2,3,4)$ 是偶函数,且对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$f_i(x+\pi)=f_i(x)$,$i=1,2,3,4$.

下证对任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $f_1(x)+f_2(x)\cos x=g(x)$.

当 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时,显然成立;

当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时,因为

$$f_1(x)+f_2(x)\cos x=f_1(x)=\frac{g(x)+g(x+\pi)}{2},$$

而
$$g(x+\pi)=g\left(k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=g\left(k\pi+\frac{3\pi}{2}-2(k+1)\pi\right)$$
$$=g\left(-k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=g(x),$$

故对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$f_1(x)+f_2(x)\cos x=g(x)$.

下证对任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x=h(x)$.

当 $x\neq\dfrac{k\pi}{2}$ 时,显然成立;

当 $x=k\pi$ 时,$h(x)=h(k\pi)=h(k\pi-2k\pi)=h(-k\pi)=-h(k\pi)$,

所以 $h(x)=h(k\pi)=0$.

而此时 $f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x=0$,故

$$h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x;$$

当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时,

$$h(x+\pi)=h\left(k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=h\left(k\pi+\frac{3\pi}{2}-2(k+1)\pi\right)$$
$$=h\left(-k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-h\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-h(x),$$

故 $f_3(x)\sin x=\dfrac{h(x)-h(x+\pi)}{2}=h(x)$，又 $f_4(x)\sin 2x=0$，从而有

$$h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x.$$

于是，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，我们有

$$h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x.$$

综上所述，结论得证.

【评注】 熟练应用三角函数的周期性，是解题的关键.

例 7 (1994 年保加利亚数学奥林匹克)$\mathbf{N}$ 是所有非负整数的集合，$f(n)$ 是一个函数，$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，且对于每个 $n\in\mathbf{N}$，有 $f(f(n))+f(n)=2n+3$，求 $f(1993)$.

【分析】 首先猜想 $f(n)=n+1$，若想不到可先猜想 $f(n)$ 是个多项式，然后待定系数得到，然后根据 $f(n)=n+1$ 的单调性等性质得出结论.

【解答】 首先证明 $f(x)$ 是一一对应的，用反证法.

设 $m,n\in\mathbf{N}$，$m\neq n$. 如果 $f(m)=f(n)$，则 $f(f(m))=f(f(n))$，由题设条件可得，

$$2m+3=f(f(m))+f(m)=f(f(n))+f(n)=2n+3,$$

故 $m=n$，矛盾. 再求 $f(0)$.

设 $f(0)=x$，$x\geqslant 0$. 令 $n=0$，故在题目给定的关系式中，$f(x)+x=3$，即 $f(x)=3-x$，故 $x\leqslant 3$. 令 $n=x$，故 $f(f(x))+f(x)=2x+3$，即 $f(3-x)=3x$. 令 $n=3-x$，代入关系式，

$$f(f(3-x))+f(3-x)=2(3-x)+3.$$

故 $f(3x)=9-5x$，由 $f(3x)\geqslant 0$，$9-5x\geqslant 0$. 解得 $x=0$ 或 1. 若 $f(0)=0$，令 $n=0$，则

$$3=f(f(0))+f(0)=f(0)=0,$$

矛盾. 故 $f(0)=1$.

以下用数学归纳法证明 $f(n)=n+1$.

(1′) $n=0$ 时，$f(0)=1$.

(2′) 若 $n=k$ 时 $f(k)=k+1$，$n=k+1$ 时 $f(f(k))+f(k)=2k+3$，故 $f(k+1)=k+2$.

(3′) 由(1′)，(2′) 得，$f(n)=n+1$，$n\in\mathbf{N}$.

故 $f(1993)=1994$.

【评注】 1. 对于抽象函数的题，如果可以想到一个具体函数(经常出现的是常值函数、一次函数)，应以此函数为标准，发现抽象函数的性质，并尝试去证明.

2. 证明抽象函数的单射，满射，单调性是常用的手段.

3. (2003 年罗马尼亚数学奥林匹克)如下题：在下列情况下，求函数 $f:\mathbf{N}^{+}\to M$，满足：

$$1+f(n)f(n+1)=2n^2(f(n+1)-f(n)),\ n\in\mathbf{N}^{+}.$$

(1) $M=\mathbf{N}$；(2) $M=\mathbf{Q}$.

经过化简得到 $\dfrac{f(n+1)-f(n)}{1+f(n+1)f(n)}=\dfrac{1}{2n^2}$，就可以猜想 $f(x)$ 是分式函数，然后求出 $f(n)$ 关于 $f(1)$ 和 n 的表达式，为 $f(n)=\dfrac{n(a+1)-1}{a-n(a-1)}$，通过设定适当的 $f(1)$ 的值，就可满足条件.