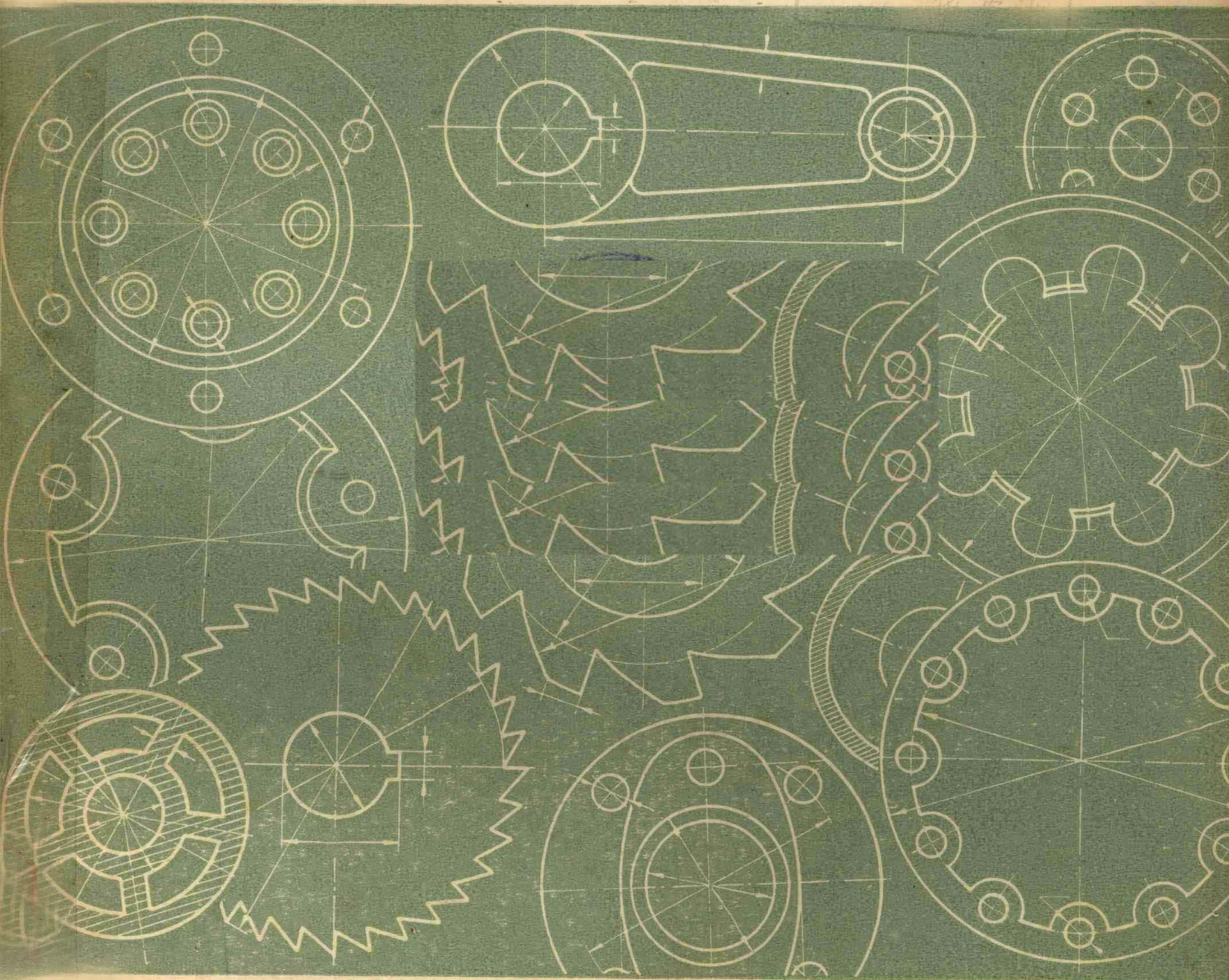
工 程 畫

第 二 卷

陳 子 晴 編 譯



商 務 印 書 館

工　　程　　畫

第二卷

陳子晴編譯

商務印書館

本書主要是參考蘇聯席立甯著"畫法幾何與製圖"(Е. В. Зеленин: Начертательная геометрия и черчение) 1953 年修訂第二版編譯的。全書分應用幾何畫、投影幾何、正投影、機械製圖及附編五編，內容偏重於機械製圖。第二卷爲投影幾何及正投影部分，敍述投影幾何學及正投影的基本知識。其內容、份量和課程進度均配合着高等工業學校中除了機械和土建專業外，其它各專業適用的畫法幾何及機械製圖教學大綱，並適用於中等專業學校機械專業作參考。本書的特點是說理明晰、論證嚴密、舉例詳盡、插圖清楚，書中附有很多問題及習題，插圖 349 幅，便於學校作業或機械製圖技術人員自修。

工　程　畫

第二卷

陳子晴編譯

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新華書店總經售

北京市印刷一廠印刷

(61256·2)

開本 787×1092 1/16　印張 15 1/2　插頁 1　字數 263,000

1955 年 9 月初版　印數 1—5,000　定價 (7) ¥1.64

目　　錄

第二編　投影幾何

第三編　正投影

第二編　投影幾何

第六章　關於投影的一般知識

§6.1　引言

投影幾何是工程畫的理論基礎。

任何物體都佔有空間的一部分，是三度空間的立體；所以，要把一立體及其幾何要素在平面上表示出來，即，要畫出這一立體的平面圖形來，就必須有一定的規則和方法。投影幾何就是研究這方面問題的學科。按照了所畫的圖，就可以製作某一物體或機械零件、裝配機器和建築房屋等等。因此，關於圖的工作就有兩方面：把某一目的物畫成圖，即製圖，以及看懂已畫好的圖，即讀圖。

所謂"讀圖"，是指：在看了畫好的圖之後，能想像出圖中所示物體的形狀及其細節。讀圖是比較困難的，需要足够的空間觀念。如果在開始學習時還沒有什麼空間觀念，則要理解和掌握投影幾何的若干問題是比較費力。可是，在學習的過程中，空間觀念就會逐漸培養起來。

投影方法是投影幾何的根本。因此，在學習投影幾何時，也是以有關投影的概念作爲開始。

點的投影　設空間有一點M，並有一平面P。如經過M點引任意一直線，使和P面相交於某一點m（圖6.1, b），則m便是M點在P面上的投影。

直線Mm叫做投射線，而平面P則叫做投影面。

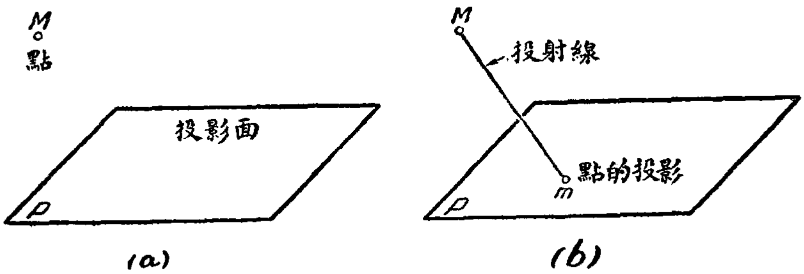


圖 6.1　點及其在某一平面上的投影。

線、面以及幾何體的投影的定義，都可由此推導出來。通過幾何體上各點，引各投射線，使和已知平面相交，便得空間各點的投影，連接各點的投影，便可定出幾何體在這平面上的投影。

隨了所引投射線的不同，投影方法可分爲兩類：中心投影法和平行投影法；而平行投影法又有正投影法和斜投影法之分。用各種不同投影方法所得的投影，就分別叫做：中心投影、正投影和斜投影等。

§6.2　中心投影

某一物體的中心投影，和我們觀察這物體，尤其是用一只眼睛來看這物體時所得的圖形最相似。

可以按下列方法，畫出任一物體的中心投影。在眼睛和這一物體之間，放一塊透明板 P（圖 6.2）；視線自眼睛向物體上各點投射，在 P 面上定出各視線和 P 面的交點。這樣，連接各交點，便得到物體在 P 面上的中心投影❶。

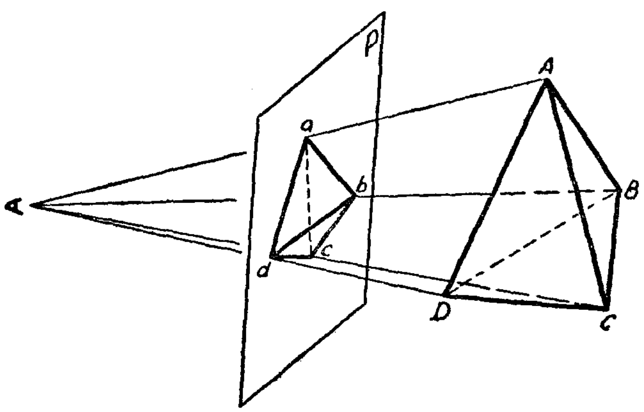


圖 6.2　一角錐體和它的中心投影。

因此，如果所有的投射線都是從同一定點發射出來，而投影面和物體離開這定點又不太遠時，便得到中心投影。這一定點，則叫做投影中心。

如圖 6.2，當人的眼睛自左方來看角錐體 $ABCD$ 時，向各頂點所引的視線分別和 P 面交於 a、b、c 和 d 各點。連接各交點所得的平面圖形 $abcd$，便是角錐體在 P 面上的中心投影，而眼睛則是投影中心。

如果在我們周圍地區中，把一部分物體用它的中心投影來代替，則觀察者眼睛所得到的印象，將不會改變。在軍事情況下的僞裝，有時就採用這一方法。戲院裏的舞台佈景也是按照這一原則進行設計的。在欣賞圖畫的時候，如果我們想使自己得到的印象恰如畫家所希望表達的，則必須站在某一一定的地方（卽所謂以一定的角度）來觀察這圖畫；而這一定的地方就是畫出圖中各個物體時所根據的投影中心。所以，在房間的牆上掛圖片時，這一情况必須加以考慮。此外，應提到：攝影而得的照片也是中心投影。

因此，用中心投影法來表示一物體是很普遍的。可是，如果我們觀察按中心投影法的規則而畫出的圖 6.3，則看到：事實上長短和粗細都是一樣的電線桿，在圖中則成爲——離開觀察者愈遠，它變得愈短而愈細。原來是平行的軌道，在圖中却變成——相交於地平線。這就是說，中心投影和原來的情况改變得很多；這樣，要按照圖來判斷物體的眞實形狀就困難了；因而，要按照所畫的圖，把這物體製造出來就感到很不方便。因此，需要有其他的方法來表示物體，使物體的形狀改變較小。

---

❶ 一物體的中心投影又叫做這物體的透視畫。

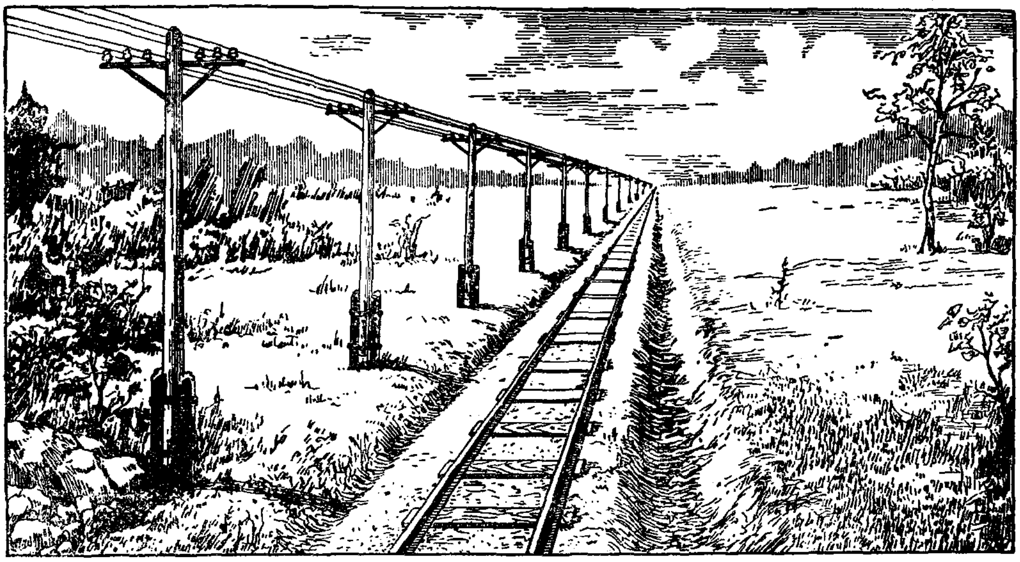


圖 6.3 在中心投影中，尺寸和角度都改變了，相等的電線桿變得愈遠愈小，而平行的軌道相交於地平線處。

§ 6.3 平行投影

如果所有的投射線都彼此平行，便得到平行投影。這也就是說，把前面所講的投影中心，自投影面和物體移向無窮遠處，則各投射線將彼此平行，而中心投影也就變爲平行投影。

要作平行投影，就必須知道投射線和投影面之間的相對方向（圖 6.4）。設這方向由直線 l 所決定。要作 M 點的平行投影，祇須經過這一點，引一直線平行於已知的投射方向（即平行於直線 l），使和 P 面相交於所求的投影 m。

按照投射線和投影面之間傾斜角的不同，平行投影又分爲：正投影和斜投影。如投射線垂直於投影面，便得到正投影；如投射線和投影面之間的夾角不等於直角，則得到斜投影。

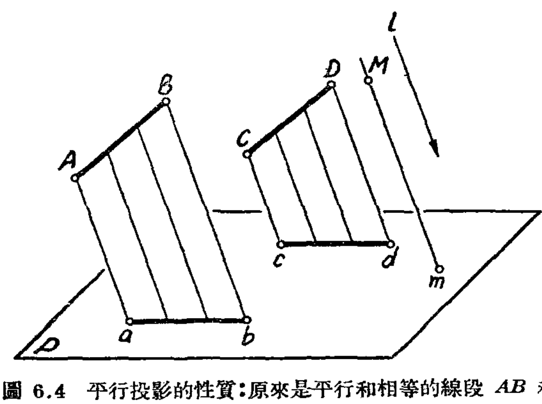


圖 6.4 平行投影的性質：原來是平行和相等的線段 AB 和 CD，投影後仍爲平行和相等的線段 ab 和 cd。

在以後幾章中，主要是討論正投影；因此，如無特別聲明，則所謂“投影”就是指的正投影。

不難看到：比起中心投影來，物體的形狀在平行投影中要改變得比較少些。例如，原來是平行而且相等的線段（見圖 6.4 中的線段 AB 和 CD）投影後仍舊是平行而且相等的線段（ab 和 cd）。因此，平行投影法是工程畫中所採用的主要方法。

§ 6.4 中心投影和平行投影的比較

如要得到關於平行投影的概念，我們可以利用太陽光，使物體遮蔽陽光而得物體的影子，這影子就可以作為物體的平行投影。雖則太陽是一發光的球，但影子還是可以當作物體的平行投影來看待。這是因為太陽光的發光體，離開我們很遠；因此，照到我們附近物體上的光線之間的夾角是非常之小，以致可以略而不計，因而也可以把太陽光當作是彼此平行的。

應該注意：在中心投影法中，投影面離開投影中心愈遠，則物體的中心投影和它的平行投影之間的差別將愈少。投影中心愈接近物體，則所得的圖形將與原來的形狀區別更大。由於這一原因，被攝影的目的物和照相機之間常保持一定的距離。

在圖 6.5 中，畫着立方塊的二個中心投影(a 和 b)，以及一個平行投影 (c)。作第一個投

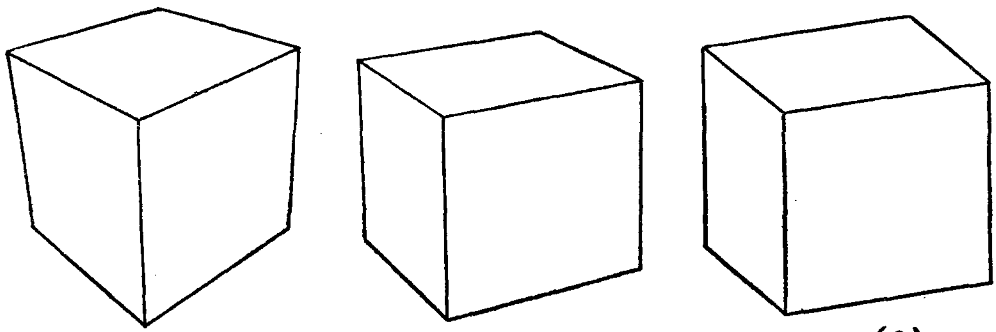


圖 6.5 立方體的三個投影：(a)和(b)是中心投影(在第一種情形下，投影中心和立方體本身之間的距離，較第二種情形下的為近)；(c)是平行投影。

影(a)時，投影中心十分接近於物體，而在作(b)時，則距離相當遠。可以看到：立方體的二個投影(b)和(c)，彼此區別不太大；但與投影(a)，則就不能說了。所以，如投影中心取得足够遠，則物體的中心投影是可以用來代替平行投影的。

因此，在表示離我們很遠而又不太大的物體時，平行投影可以給我們足够眞實的概念。而比起中心投影來，平行投影較諸物體的眞實形狀改變較少。這就是為什麼：雖然我們觀察周圍物體所得到的都是中心投影，而平行投影還是工程畫或技術草圖的基本。

投影幾何係由若干部分所組成。本書的這一編，將討論投影幾何的兩部分。其中第一部分是在兩個或三個投影面上的正投影，自第七章至第十九章。這幾章中所討論的方法，是工程畫的理論基礎。第二部分是軸測投影，它在第二十章中討論。這章所講，是按平行投影法畫直觀圖，以幫助建立空間概念。

在有些場合，當物體的尺寸很大，例如在研究機車、飛機或者像在建築圖中研究建築物時，則直觀圖都按中心投影法(即透視畫)畫出。這一問題將在第五編中討論。雖然透視畫

也是投影幾何的一部分，但把它放在"建築畫概要"中討論，比較合適。

§ 6.5　若干幾何體的正投影

點的投影　A點在P面上的正投影，就是自這點向P面所引垂線Aa的垂足a（圖 6.6，a）。

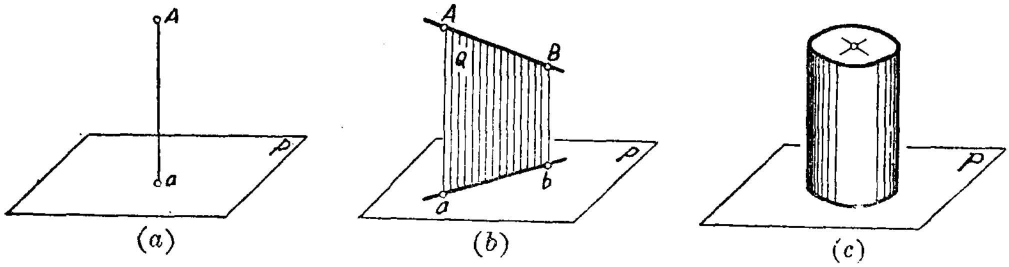


圖 6.6　正投影：(a)點的投影(Aa 是投射線)；(b)直線的投影(Q 是投射面)；(c)圓周的投影（圓柱面是投射表面）。

這P面，即把某一點或某一圖形投影上去的平面，叫做投影面。自A點所引的垂線Aa，叫做投射線。

點在一個平面上的投影並不能決定這一點在空間的位置。事實上，如已知某一點A的投影a（圖 6.6，a），則可以很容易地定出投射線來。但是，至於A點位在這投射線上那一處，我們就無法肯定。

如還知道這一點在另一投影面上的投影，則就可以方便地定出這點的位置。關於這一方法，將在下一章中討論。

直線的投影　要得到直線AB在P面上的投影（圖 6.6，b），就必須通過AB線上的所有各點，引垂直於P面的投射線。所有這些投射線都位在某一平面Q內，而Q面垂直於P面❶。這Q面和P面的交線ab，便是直線AB在P面上的投影。這Q面把直線AB投射到P面上去，因此，它叫做投射面。

圓周的投影　設有某一圓周，平行於投影面P（圖 6.6，c）。如把這圓周投射到P面上，即通過這圓周上各點引投射線，我們便得到一圓柱面，它所有的母線（投射線）都垂直於P面。因此，在目前場合，這正圓柱面就可以作爲投射面。這投射面把已知圓周投射到P面上。

如果我們不是把這圓周，而是把這圓周所包圍的整個圓的平面，投射到P面上去，則將得到投射體，因爲投射線把這正圓柱體的全部容積都塡滿了。

---

❶　如一個平面包含了對另一平面的垂直線，則兩平面相互垂直。在目前這場合，Q面包含了許多P面的垂直線，所以，它們相互垂直。

第七章　點

§ 7.1　點在兩個投影面上的投影

兩個投影面　試取兩個相互垂直的平面(圖 7.1,a),其中一個是水平放着的，叫做横投影面或簡稱横面，而另一個則是直立着的，並叫做縱投影面或簡稱縱面❶。横面用字母H代表，而縱面則用字母V代表。這兩投影面的交線叫做投影軸,並註以字母x(“x-軸”)。

設在空間有任意一點A(圖 7.1,a); 把這A點投影到兩個投影面上,即自這A點向投影面H和V分别引垂線Aa和Aa'。在H面上的投影a叫做A點的横面投影，而在V面上的投影a'則叫做A點的縱面投影。

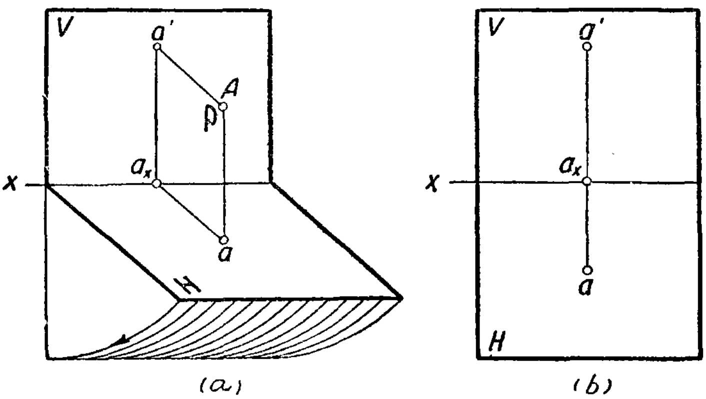


圖 7.1　A點在兩相互垂直平面H和V上的投影。

符號　在投影幾何中，被投影的點是用大寫拉丁字母A、B、C… 等代表的,點的横面投影分别用小寫字母a、b、c… 等代表,而點的縱面投影也分别用小寫字母，但上面加一“ ′ ”，如a'、b'、c'… 等代表。

有時，也用羅馬字I、II、… 等等代表點,它們的投影則分别用相應的阿拉伯字 1、2…和 1′、2′… 等代表。

點的投影圖　如把H面繞了x-軸轉過 90°(圖 7.1,a),便可以使兩個投影面H和V與圖紙的平面相重合(圖 7.1,b)。這時,便得到點的投影圖❷。

現在來討論:點的投影在投影圖上的位置。試通過垂線Aa和Aa'，引一平面P(圖 7.1,a)。這一平面P,垂直於H和V面，因爲它通過了分别垂直於這兩投影面的垂線Aa和Aa'。同時,P面也垂直於兩投影面的交線，即x-軸。P面和H面的交線是aa_x，而它和V面的交線則是$a'a_x$。這兩直線(aa_x和$a'a_x$)也垂直於x-軸(因爲它們位在垂直於x-軸的平面P內)。這樣,圖形Aaa_xa'是一矩形。

因此，在投影圖上,任意一點A的投影a和a',總是位在一根垂直於x-軸的直線上。

---

❶　横投影面或横面也叫做水平投影面；縱投影面或縱面也叫做垂直投影面。

❷　投影圖 эпюр,源自法文 épure,即圖的意思。在這裏，我們一般地指：設法使某幾個投影面和圖紙平面重合後所得的圖。

已知任意一點A的兩個投影a和a'，便可以完全肯定這A點在空間的位置(圖 7.1)。在事實上，如果從投影a引一直線垂直於H面，則，顯然，這一垂線必通過A點。同樣，如果從投影a'引一直線垂直於V面，則這垂線也必然通過A點。因此，A點要同時位在這兩條完全肯定的垂線上。所以，A點的位置也是完全肯定的，它就是這兩垂線的交點。

點和投影面之間的距離　在研究矩形Aaa_xa'(圖 7.1，b)之後，便可得出下列結論：

1) A點和縱面V之間的距離，等於點的橫面投影a和x-軸之間的距離，即：

$$Aa' = aa_x。$$

2) A點和橫面H之間的距離，等於點的縱面投影a'和x-軸之間的距離，即：

$$Aa = a'a_x。$$

因此，雖然點本身在投影圖上是沒有的，但祇要根據它的兩個投影，就可以知道：這一點和兩投影面之間的距離。

空間四象限　兩個投影面把整個空間劃分成四部分，每一部分叫做象限(圖 7.2)。

x-軸把H面分成前和後，而把V面分成上和下各部分。

四個象限的名稱和位置，分別如下(圖 7.2，a)：

第 1 象限——H面的前半部分和V面的上半部分所包容的空間；

第 2 象限——H面的後半部分和V面的上半部分所包容的空間；

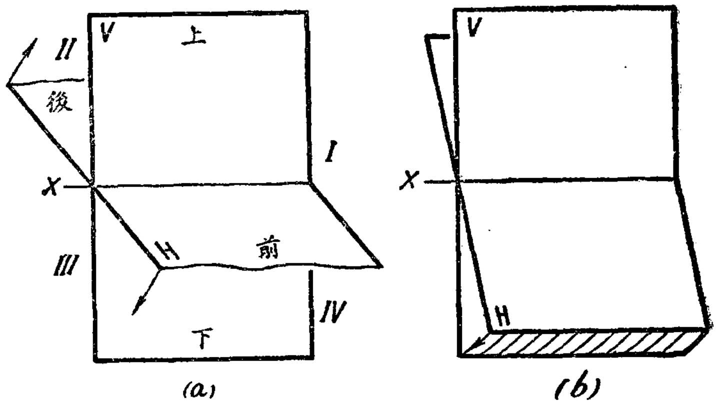


圖 7.2　(a)H和V面把整個空間分為四個象限；(b)使H和V面重合而得投影圖。

第 3 象限——H面的後半部分和V面的下半部分所包容的空間；

第 4 象限——H面的前半部分和V面的下半部分所包容的空間。

為了得到投影圖，我們使H面繞了x-軸迴轉而和V面重合(圖 7.2，b)。在這時，H面的前半部分和V面的下半部分相重合，而H面的後半部分則和V面的上半部分重合。

在四個象限內的點　在圖 7.3—7.6 中，畫出了位在各個不同象限內的A、B、C和D四點。A點位在第 1 象限內，B點在第 2，C點在第 3 以及D點在第 4 象限內。

如點位在第 1 或者第 4 象限內，則點的橫面投影將位在H面的前半部分內，因此，在投影圖上，它將處在x-軸之下(如圖 7.3 中的A點以及圖 7.6 中的D點)。如果點位在第 2 或者第 3 象限內，則點的橫面投影將位在H面的後半部分內，而在投影圖上，它將處在x-軸之上(如圖 7.4 和 7.5 中的B和C點)。

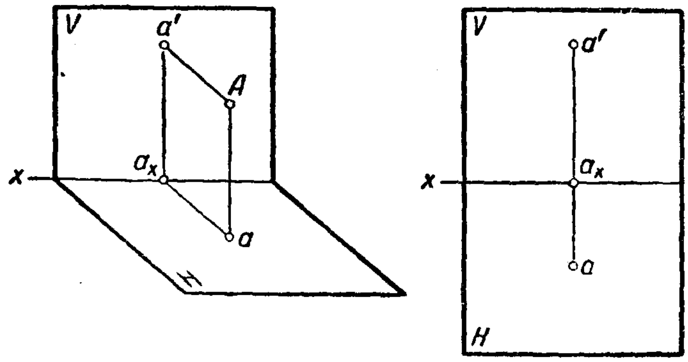


圖 7.3　位在第一象限內的 A 點。

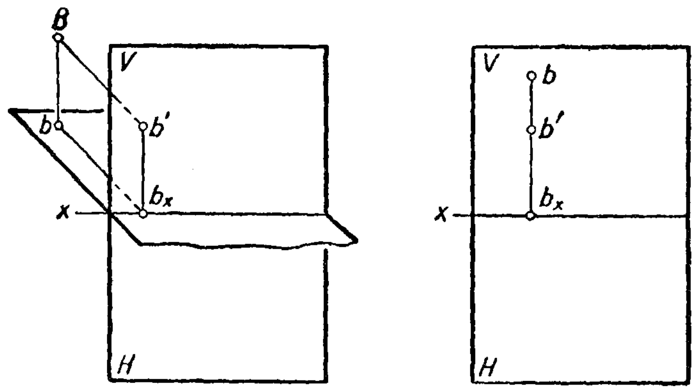


圖 7.4　B 點，位在第 2 象限內。

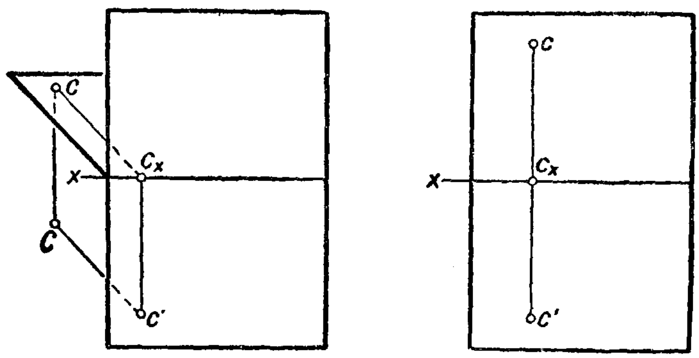


圖 7.5　C 點，位在第 3 象限內。

位在第 1 或者第 2 象限內各點的縱面投影，都在 V 面的上半部分，因此，在投影圖上，它們的縱面投影就處在 x-軸之上(如圖 7.3 和 7.4 中的 A 和 B 點)。如果點在第 3 或者第 4 象限內，則它的縱面投影將位在 x-軸以下(如圖 7.5 和 7.6 中的 C 和 D 點)。

在大多數場合下，都把所討論的圖形放在空間第 1 象限內。

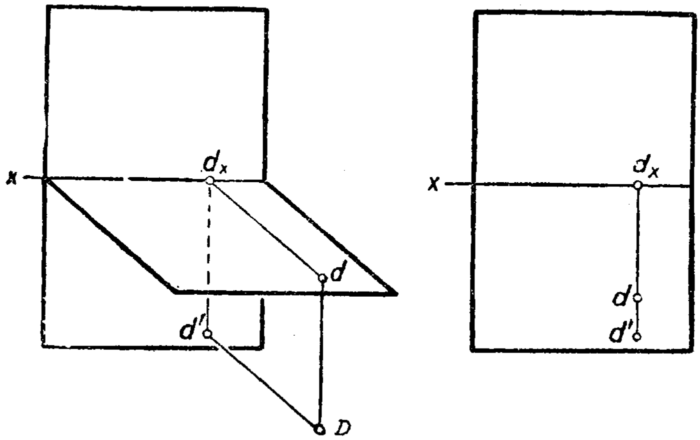
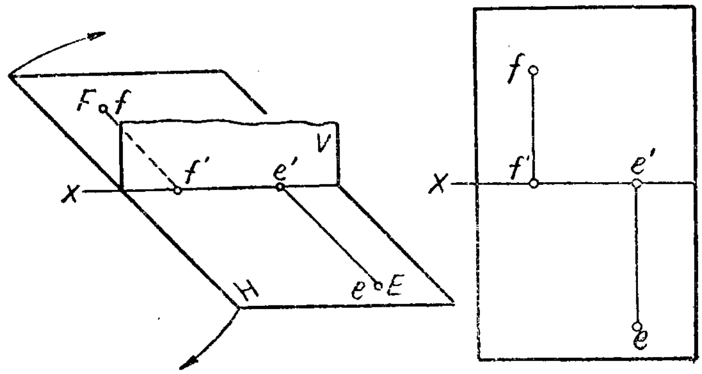


圖 7.6　D點，位在第4象限內。

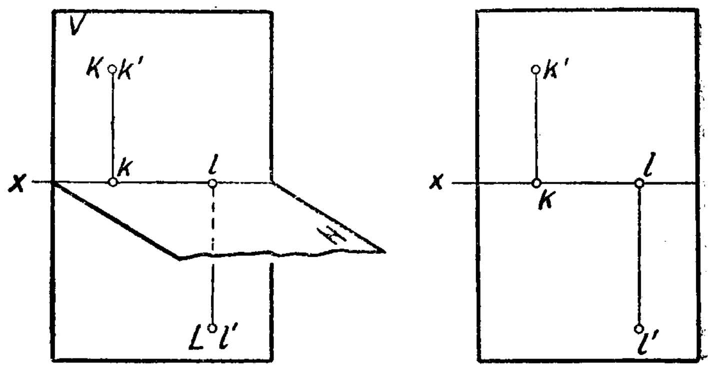
在特殊位置的點　1)位在H面上的點——如E點位在H面上(圖7.7)，則E點本身將和它的橫面投影e相重合。位在H面上各點的縱面投影，則都位在x-軸上。

2)位在V面上的點——如K點位在V面上(圖7.8)，則它的橫面投影k將位在x-軸



(a)　(b)

圖 7.7　位在H面上的點。



(a)　(b)

圖 7.8　位在V面上的點。

上，而它的縱面投影 k' 將指出這 K 點的實際位置(即 k' 和 K 點本身是重合在一起的)。

總之，如點位在一個投影面上，則它的一個投影將位在 x-軸上。

3) 位在 x-軸上的點——在這種情形下，點本身和它的兩個投影都重合在一起。

綜上所述，我們可以按照下列規則，從點的兩個投影在投影圖上對 x-軸的位置，來決定點本身在空間相對於 H 和 V 面的位置:

1) 如在投影圖上，點的橫面投影是位於 x-軸之下，則該點在空間一定位於第 1 或者第 4 象限內，即它是在 V 面之前的；反之，如它的橫面投影是位在 x-軸以上，則它一定是在第 2 或者第 3 象限內，即在 V 面之後；

2) 如在投影圖上，點的縱面投影是位於 x-軸之上，則該點在空間一定位於第 1 或者第 2 象限內，即它是在 H 面之上；反之，則在第 3 或者第 4 象限內，即在 H 面之下；

3) 如在投影圖上，點有一個投影位在 x-軸上，則該點在空間一定位於某一投影面上；

4) 如在投影圖上，點的兩個投影都位在 x-軸上，則該點本身，在空間也一定位在 x-軸上。

如果點不位在任意一投影面上，則我們叫這點是在一般位置上。以後，如果沒有特別說明，則所給的點都是在一般位置。

沒有投影軸的情形 在作投影圖的時候，我們知道：連結 A 點兩個投影 a 和 a' 的直線，一定垂直於 x-軸。如果在已知的投影圖上沒有定出 x-軸的位置(圖 7.9, a)，則我們就祇能知道 x-軸的方向：在投影圖上，x-軸垂直於直線 aa'。由於 x-軸的位置不能肯定，在空間 A 點和投影面的相對位置也就無法確定。如任意引一 x-軸垂直於直線 aa'，沿了這 x-軸，把圖紙折成直角，而組成相互垂直的 H 和 V 面。自 a 和 a' 分別向 H 和 V 面引垂線，兩垂線的交點便是 A 點在空間的位置。顯然，引不同位置的 x-軸，便可得到在空間不同位置的 A 點。可是，以後會看到：這投影軸的位置雖不確定，但它並不影響空間若干點之間的相對位置。

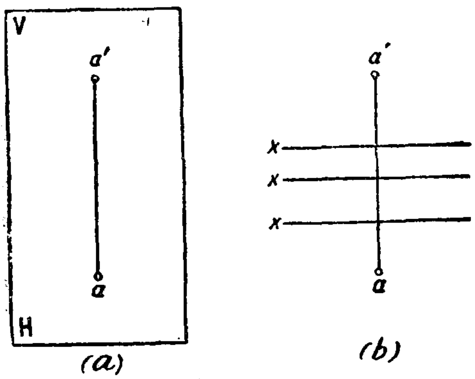


圖 7.9 (a)祇有點的投影而沒有投影軸；(b)投影軸可以放在任意位置，祇要它垂直於 aa' 直線。

§ 7.2 點在三個投影面上的投影

側投影面 在兩個相互垂直投影面 H 和 V 上的投影，通常已能決定所討論那個圖形的位置，並在大多數場合下，能够據之而知道圖形的眞實尺寸和形狀。可是，有時兩個投影是不够的。這時，就不得不作第三個投影。

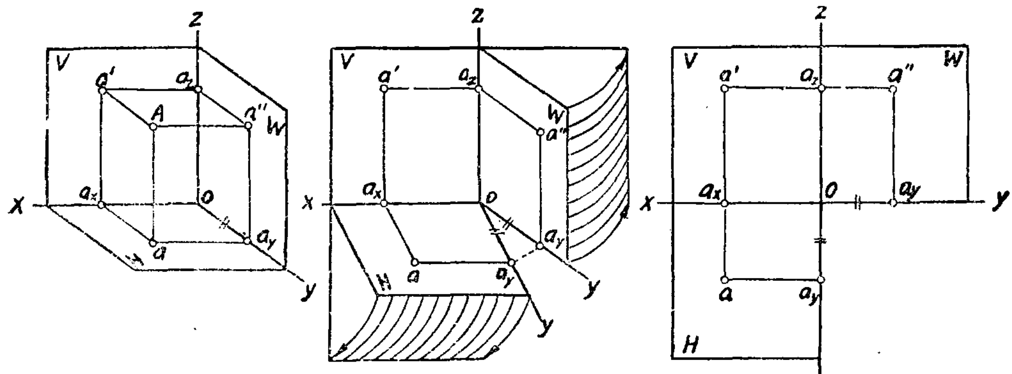
第三個投影面同時垂直於前面所講過的兩個投影面 H 和 V (圖 7.10)。這第三個投影面

W 叫做側投影面或者簡稱側面。

H 和 V 面的交線是 x-軸，H 和 W 面的交線是 y-軸，而 V 和 W 面的交線則是 z-軸。三投影軸的交點 O 叫做座標的原點。

點的第三個投影 在圖 7.10 中，畫出了 A 點及其三個投影，在 W 面的投影 a'' 叫做側面投影，並用拉丁字母 a 上加兩撇"$''$"，即 a'' 來代表。

點的投影圖 為了得到由 a、a' 和 a'' 三個投影所組成的 A 點的投影圖，我們把由 H、V 和 W 面所組成的三面角，沿了 y-軸剪開，並使其餘的投影面和 V 面重合。使 H 面仍舊繞了 x-軸，和以前一樣迴轉；使 W 面繞了 z-軸按圖 7.10,b 中箭頭所示的方向迴轉。圖 7.10,c 表示出：當 H、V 和 W 三個投影面都和圖紙平面重合時，A 點三個投影 a、a' 和 a'' 的位置。



(a) (b) (c)

圖 7.10 點在三個相互垂直的投影面 H、V 和 W 上的投影。

因為是沿了 y-軸把三面角剪開的，所以，在投影圖上，y-軸出現在兩個不同的位置。在 H 面上，y-軸是在鉛直位置(垂直於 x-軸)，而在 W 面上，它却在水平位置(垂直於 z-軸)。像 y-軸一樣，a_y 也在投影圖上出現兩次。

自圖 7.10，c 中可以看到：在投影圖上，A 點三個投影 a、a' 和 a'' 之間的相互位置不是任意的，而服從下列條件：

1) 橫面投影 a 和縱面投影 a' 總位在一條鉛垂線上，它垂直於 x-軸。

2) 縱面投影 a' 和側面投影 a'' 總位在一條水平線上，它垂直於 z-軸。

3) 如通過橫面投影 a 引一水平線(aa_y)，而通過側面投影 a'' 引一鉛垂線($a''a_y$)，則這兩直線的交點(點 a_0)必位在兩投影軸夾角的等分角線上，因為圖形 $Oa_ya_0a_y$ 是一正方形。

在作點的三個投影時，必須檢查：對於每一點，上述三條件是否滿足。

題 7-1 按已知的兩個投影，作第三個投影 a'' (圖 7.11)。

我們是根據了前述條件，按已知的 A 點的兩個投影 a 和 a'，來作它的側面投影 a''。

所求的第三投影 a'' 和已知的 a'，必須位在一條垂直於 z-軸的直線上(條件 2)。因此，