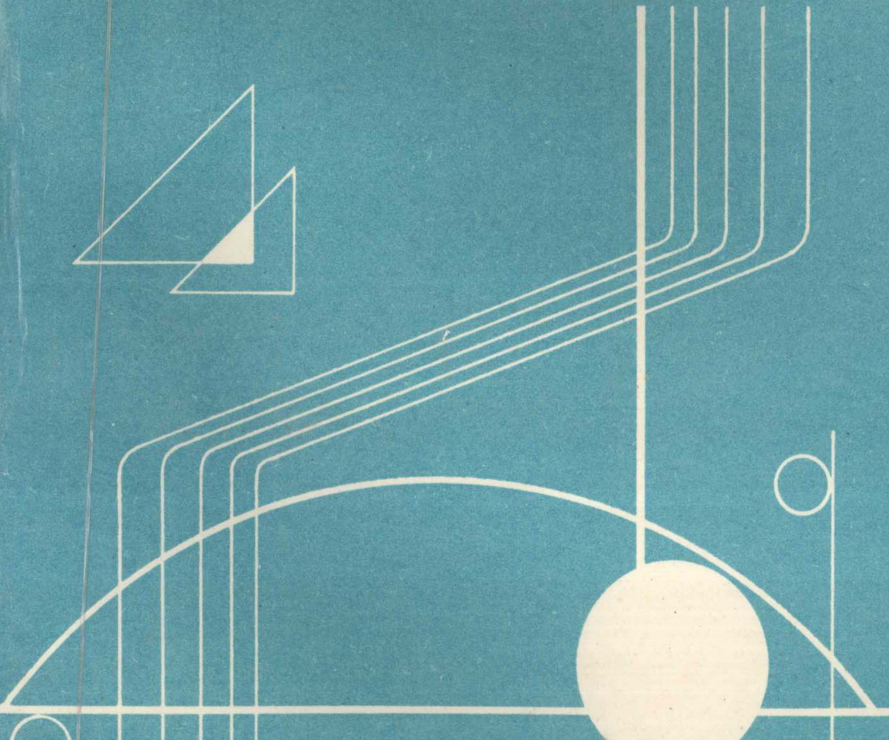
SHULIFANGCHENGJIQIYINGYONG

数理方程及其应用

白凤图　陈宝娟　丁天彪



河南大学出版社

数理方程及其应用

白凤翔　陈宝娟　丁大成

河南大学出版社

(豫)新登字 09 号

内 容 提 要

本书共分七章，主要讲述了三类典型数理方程的定解问题、分离变量法、波动方程的达朗贝尔法、勒让德函数和贝塞尔函数、积分变换、δ 函数和格林函数、变分法。全书注重概念和方法的讲解，而且加强在水工、土木、地下水和动力等专业的应用。本书可供以上这些专业的本科生和研究生作为教材或供其它工科专业作为参考书。

数理方程及其应用

白凤图　陈宝娟　丁天彪

责任编辑　汪远征

河南大学出版社出版

（开封市明伦街 85 号）

河南省新华书店发行

河南大学印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米 1/32　印张:9.5　字数:238 千字

1995 年 12 月第 1 版　　1995 年 12 月第 1 次印刷

印数:1—2200　　定价:9.80 元

ISBN7-81041-285-X/O・100

序

很多自然现象的数学描述是属于数学物理方程方面的问题的。所谓数学物理方程就是指在物理学、力学、化学和工程技术等学科中所得到的、反映客观世界物理量之间相互制约关系的一些偏微分方程。

自从18世纪以来，科学家们不断地将一些实际问题归结为偏微分方程问题，而数学家们经过长期的努力和深入的研究对这些问题找到了一些有效解法和一些基本原理，逐渐形成了偏微分方程的一般理论。这些偏微分方程问题的解决，反过来又促进了科学技术的发展。

随着科学技术的发展，特别由于电子计算机的发明和发展，使得实际学科与尖端技术的科学工作者不必再局限于线性化，小扰动等方法，而是直接地去分析或计算各类非线性问题的数学模型，这样就形成了众多的边缘性的计算学科，如计算力学、计算物理、计算化学、计算生物等。在这些学科里，提出了大量的非线性偏微分方程问题，并要求对它们进行直接的计算，分析它们所描写的极其丰富的规律和现象，从而促进人们从理论上更多地去探索研究这些非线性偏微分方程问题解的性质，为应用提供理论基础。

线性和非线性偏微分方程的研究与科学技术的发展和现代化紧密相关，根据自然科学发展的学科之间相互渗透、相互促进的规律，它必然要涉及到数学的各分支，必然要不断开拓新领域，因此线性与非线性偏微分方程的研究已成为理论数学和应用数学发展的重要方向之一。

鉴于数学物理方程与科学技术紧密相关，它是数学解决实际

问题的有力工具，所以高等院校，特别是工科院校，为大学生开设数学物理方程这门课是非常必要的，对于培养他们结合专业应用数学分析和解决实际问题的能力是大有好处的。

本书是为工科院校给水、土类（也适用于动力类）专业的大学生和硕士研究生而编写的。在编写过程中作者们遵循理论与实际相结合的原则，既深入浅出地讲述了数学物理方程的基本理论，又列举了大量实际应用问题，其中许多内容包括了作者们多年教学实践经验和研究成果。全书取材适当，文字简明易懂，是一本好教材。我想它的出版对水工、土木和动力专业的读者以及从事这方面工作的工程技术工作者都是有益的。

陈国旺

1995 年 2 月于郑州大学

前　言

数学物理方程在物理学、力学、化学、生物学和工程技术等科学中有着广泛的应用。自然，它就成为高等工科院校中许多专业和从事这些专业的技术工作者必不可少的理论与应用的基础。本书就是根据多年来为给水、土类（也适于动力类）专业的本科生和硕士研究生授课的讲稿、讲义以及在教学实践经验的基础上编写而成的。内容共分七章：第一章推导了波动方程、热传导方程和拉普拉斯方程三类典型的偏微分方程，它们是物理、力学、电学和水力学等现象的共同本质的数学方法的描述。第二章和第三章阐述了三类方程的古典解法——分离变量法和波动方程的达朗贝尔法。第四、五、六章阐述了勒让德函数、贝塞尔函数、傅氏变换、拉氏变换、杭克尔变换、δ 函数和格林函数。它们在一般基础理论和工程技术中用处最多，是求解数理方程的最广泛的方法。第七章讲变分法，它是为建立振动方程以及后继课程——“有限元法”打下理论基础。

由于工科对这类课程一般安排学时较少，且针对水、土类专业，因此，本书的篇幅不大。在编写过程中，我们充分注意在保证讲述必要的基础理论的同时，主要着重于解决问题的方法和在专业方面的应用。如第一章 § 3 地下水的运动方程的建立，第二章双支梁振动方程的求解方法，第三章至第七章中的应用问题等，都是围绕水、土类和动力类专业的需要选择的内容。特别是地下水的应用问题，是本书作者自己的解法，且于 1977 年 11 月和 1978 年 6 月在煤炭部地质局组织的“全国地下水非稳定流理论”学习班上讲授过，深受学习班上水文工作者的欢迎。

本书所需基础知识是高等数学和复变函数。

根据教学经验，若硕士研究生用，需讲授45—50学时；本科生用，可适当减去与本专业无关的内容，需45—50学时。各章配有习题，书后有习题答案。

郑州大学数学研究所所长陈国旺教授为本书的编写提出了宝贵的意见，在此基础上我们作了修改。在编写过程中得到我院领导的支持和鼓励，并给予出版资助；河南大学出版社的同志们为本书的出版付出了辛勤劳动，在此我们表示衷心的感谢。

由于作者的水平所限，书中的缺点与错误在所难免，恳请同道和读者批评指正。

作 者

1994年12月于华北水利水电学院

目　录

第一章　一些方程的建立和定解问题

对自然界中的许多物理状态和运动规律的研究，都可归结为对偏微分方程进行研究. 数学物理方程就是以这些偏微分方程问题作为研究对象的一门学科. 这一章我们就弦的振动、物体内热量的传导、地下水的运动以及静电场问题中的几个具体问题，来建立三类典型方程——波动方程、热传导方程和拉普拉斯(Laplace)(或泊松(Poisson))方程，而且相应地提出定解条件和定解问题，并介绍定解问题的适定性等概念.

§1　弦的横振动方程

设有两端固定拉紧的弦，平衡时处于水平位置，在某种外力作用后，引起弦上各点在同一平面内作垂直于弦的横振动，求弦上各点的运动规律.

取坐标系如图 1.1，$u(x,t)$是在点 x 处和 t 时刻质点的位移，它是表示弦运动状态即运动规律的函数. 为了求出 $u(x,t)$，就需要建立 $u(x,t)$所满足的偏微分方程，并给出适当的定解条件，然后通过适当的数学方法把满足方程及定解条件的 $u(x,t)$求出来.

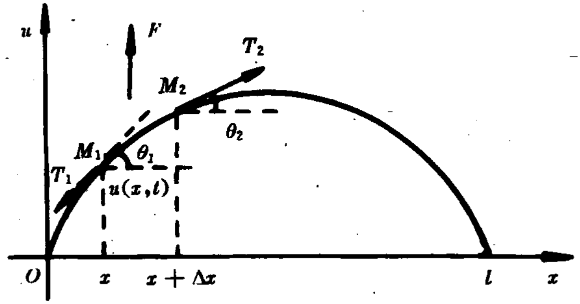


图 1.1

一、偏微分方程的建立

为了导出弦的横振动方程，作如下假设：

(1) 弦的密度(单位长度的质量)$\rho=$常数.

(2) 弦完全柔软，即弦只承受张力，不产生抗弯曲力. 在这一假设下，弦在各点处所受的张力向量，总位于该点处的瞬时切线上.

(3) 弦只作微小振动，振动时的位移 $u(x,t)$ 和切线的倾角 θ (从而 $\operatorname{tg}\theta=\frac{\partial u}{\partial x}$)都是微小的量. 在这一假设下，$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ ($\ll 1$)可忽略不计.

下面推导方程. 首先分析在 t 时刻，$[x,x+\Delta x]\subset(0,l)$ 上小段弦的受力情况.

如图 1.1 所示，$F(\xi,t)$ 表示$[x,x+\Delta x]$内某点 ξ 的力密度. 在振动过程中，根据牛顿第二定律，在 t 时刻，小段弦受水平、铅直方向力的平衡方程为：

$$\sum F_x = T_2\cos\theta_2 + T_1\cos(\pi+\theta_1) = 0,$$

即

$$T_2\cos\theta_2=T_1\cos\theta_1, \tag{1.1}$$

$$\sum F_u = T_2\sin\theta_2 + T_1\sin(\theta_1+\pi) + F(\xi,t)\Delta x = \rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

式中 $T_2=T(x+\Delta x,t)$，$T_1=T(x,t)$表示端点 M_2 和 M_1 所受的张力，$u(\bar{x},t)$表示小段弦$\overline{M_1M_2}$在重心 $\bar{x}$ 处的位移.

现在来证明，在前面的假设下，弦在各点处所受的张力 T 可视为与 x 和 t 无关的常量.

这是因为

$$\cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{1+[u_x(x,t)]^2}}\approx 1,$$

$$\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt{1+[u_x(x+\Delta x,t)]^2}}\approx 1,$$

所以有

$$T(x+\Delta x,t)=T(x,t), \tag{1.3}$$

即 T 与 x 无关.

再考虑在 t 时刻,$[x,x+\Delta x]$上振动弦的长度

$$\Delta s=\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+[u_x(x,t)]^2}\mathrm{d}x\approx\int_x^{x+\Delta x}1\cdot\mathrm{d}x=\Delta x. \tag{1.4}$$

也就是说,在上述假设下,可认为弦在振动过程中并未伸长. 因此,由虎克定律知,弦上每一点处的张力 T 也不随 t 改变. 结合(1.3)式,便得出

$$T(x+\Delta x,t)=T(x,t)=T\quad(常数).$$

下面,从(1.2)式来推导 $u(x,t)$满足的方程.

$$\begin{aligned}\rho\Delta x\,\frac{\partial^2u(\bar{x},t)}{\partial t^2}&=T(\sin\theta_2-\sin\theta_1)+F(\xi,t)\Delta x\\&\approx T(\mathrm{tg}\theta_2-\mathrm{tg}\theta_1)+F(\xi,t)\Delta x\\&=T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+F(\xi,t)\Delta x\\&=T\,\frac{\partial^2u(\xi,t)}{\partial x^2}\cdot\Delta x+F(\xi,t)\Delta x,\end{aligned}$$

即有 $\rho\Delta x\,\dfrac{\partial^2u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\approx T\,\dfrac{\partial^2u(\xi,t)}{\partial x^2}\Delta x+F(\xi,t)\Delta x,\ \xi\in(x,x+\Delta x)$

上式约去 Δx,且令 $\Delta x\to 0$,有 $\xi\to x,\bar{x}\to x$,得 $u(x,t)$满足的非齐次常系数方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{1.5}$$

称为弦的强迫振动方程,其中 $a^2=\dfrac{T}{\rho},f=\dfrac{F}{\rho}$.

若在运动过程中弦不受外力作用,即 $F(x,t)=0$,方程(1.5)化为齐次常系数方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\tag{1.6}$$

称为**弦的自由振动方程**.

弦的横振动方程又称一维波动方程.这种方程虽是以"弦振动"为物理模型,但却有着广泛的物理背景.它可以描述不同本质的物理现象,如杆的纵振动、弹簧振动、高频传输线的电流、电压等不同领域的物理现象.

类似地可以导出二维波动方程(如膜振动)和三维波动方程(如电磁波、声波的传播),它们的形式分别为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t)\tag{1.7}$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t).\tag{1.8}$$

二、定解条件

方程(1.5)和(1.6)是满足前面假设(1),(2),(3)的任一条弦横振动的偏微分方程,它仅是物体内部各部分运动相互之间的联系所满足的规律.只有方程还不能完全确定所考察弦的运动状况,这是因为它的运动还与初始状态以及边界所处的状况有关,因此,还必须给出初始条件和边界条件.现讨论如下:

1. *初始条件*

设弦在初始时刻 $t=0$ 的位置和速度为

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0}=u(x,0)=\varphi(x) \\ u_t(x,t)|_{t=0}=u_t(x,0)=\psi(x), \end{cases}\quad (0\leqslant x\leqslant l)\tag{1.9}$$

它称为**初始条件**.其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为已知函数,分别表示弦上每一点在 $t=0$ 时刻的位置和速度.如同常微分方程一样,初始条件的个数与方程中未知函数关于时间偏导数的最高阶数相等,即是给出未知函数及其关于时间的各阶偏导数(直至较方程中关于时间偏导数的最高阶数低一阶)在初始时刻的值.

2. 边界条件

外部的作用常常通过物体(或场)的边界"传"到内部去,以影响内部各点的运动.如振动的弦两端固定,当弦振动按波动的形式传到两端时,必然要引起波的反射,这是边界条件对内部各点运动的作用.

(1) 对两端固定的弦振动,边界条件有

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{x=0} = u(0,t) = 0 \\ u(x,t)\big|_{x=l} = u(l,t) = 0. \end{cases} \quad (t \geqslant 0) \qquad (1.10)$$

这种边界条件称为**第一类齐次边界条件**.这里的第一类,是指给出了 $u(x,t)$在边界(端点)处的函数值;齐次,指它是 $u(x,t)$的一次齐次式.

边界条件与初始条件都是**定解条件**.把弦振动方程(1.5)(或(1.6))和定解条件(1.9)、(1.10)结合起来,就得到两端被固定在 $x=0$ 及 $x=l$ 两点的弦振动的定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad (0 < x < l, t > 0) & (1.11) \\ \left.\begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{array}\right\} \quad (0 \leqslant x \leqslant l) & (1.12) \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \quad (t \geqslant 0) & (1.13) \end{cases}$$

上述定解问题也叫第一边值问题.求其解,就是寻求在区域 $0 \leqslant x \leqslant l, t \geqslant 0$ 上的连续函数 $u = u(x,t)$,它在区域 $0 < x < l, t > 0$ 中满足方程(1.11),在 $0 \leqslant x \leqslant l\ (t=0)$ 上满足初始条件(1.12),在边界 $x=0$ 及 $x=l$ 上满足(1.13).

弦振动方程的边界条件还有以下两种:

(2) 弦的一端固定,另一端(例如 $x=l$)可以在垂直于 x 轴的直线上自由滑动,不受垂直方向外力的作用,这种边界称为"自由边界".因而这个端点在位移方向的张力应为零,所以自由边界时应有 $T\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0$,即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=u_x(l,t)=0. \tag{1.14}$$

在一般情况下，若端点位移方向的张力是 t 的一个已知函数，这时相应的边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=u_x(l,t)=\mu(t). \tag{1.15}$$

这种边界条件称为**第二类边界条件**. 而(1.14)是齐次的，(1.15)是非齐次的. 其中，第二类是指给出了边界上 u 的法向导数值.

(3) 如果弦在 $x=l$ 处固定在弹性支承上，且支承原来的位置为 $u=0$，则 $u|_{x=l}$就表示支承在该点的伸长. 由虎克定律可知，此时弦在 $x=l$ 处沿位移方向的张力 $T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$应等于$-ku|_{x=l}$，即

$$u_x(l,t)=-\frac{k}{T}u(l,t),$$

或
$$u_x(l,t)+hu(l,t)=0. \quad \left(h=\frac{k}{T}\right) \tag{1.16}$$

其中 k 是弹性系数.

如果弹性支承也按位移为 $u_0(t)$的规律运动，则弹性支承实际伸长是 $u_0(t)-u(l,t)$，于是有

$$u_x(l,t)+hu(l,t)=hu_0(t). \tag{1.17}$$

这种边界条件称为**第三类边界条件**. 而(1.16)是齐次的，(1.17)是非齐次的. 其中，第三类是指给出了边界上$\frac{\partial u}{\partial n}$及 u 的线性组合的值.

对于二维和三维振动方程的定解条件，这里不叙述了.

§2 热传导方程

设有一个各向同性的热传导介质，且占有一定的空间区域，由于介质中温度分布不均匀而产生热传导现象. 现在讨论热传导过

程中介质各点处的温度分布规律.

一、方程的建立

设传热介质占有的空间区域为 Ω，边界为 Σ，如图 1.2. 又设介质内点 $M(x,y,z)$ 处，t 时刻的温度为 $u(x,y,z,t)$.

为建立 $u(x,y,z,t)$ 满足的方程，在 Ω 内部取包含点 M 的小区域 V. V 的边界为 S. 我们在 V 内分析并建立热平衡方程.

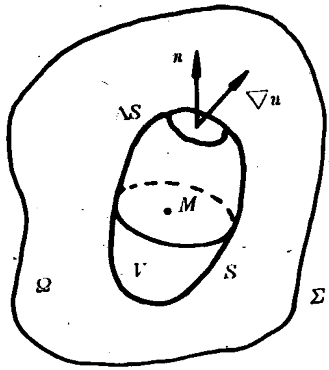


图 1.2

为说明问题方便起见，考虑在某一段时间 $[t_1,t_2]$ 内，V 内介质的温度较其邻接介质的温度为低，则在该段时间内，有热量从邻接介质流进 V 内. 再设 V 内各点处有热源，则 V 内所得到的总热量将用于 V 内各点处温度的升高. 根据能量守恒原理，应有等式

$$Q_3=Q_1+Q_2, \tag{1.18}$$

其中 Q_1 为外部经界面 S 流入 V 的热量，Q_2 为 V 的内部热源所产生的热量，Q_3 为 V 内介质因温度升高所需要的热量. 下面，我们给出 Q_1,Q_2,Q_3 的具体数量形式.

为此，设界面元素 ΔS 上的某一点处，热流密度向量为 $\vec{q}$，温度梯度为 $\nabla u=\left(\vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)u$，根据热力学中傅里叶(Fourier)定律，有

$$\vec{q}=-K\nabla u, \tag{1.19}$$

其中 $K>0$ 是热传导系数，而负号是由于热流方向与温度梯度方向相反. 于是通过全表面 S 流入 V 的热量为

$$Q_1=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\oiint_S\vec{q}\,\mathrm{d}\vec{s}=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\oiint_S K\nabla u\,\mathrm{d}\vec{s}$$

（由高斯(Gauss) 公式）

$$=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint\limits_V \nabla\cdot(K\nabla u)\mathrm{d}v. \tag{1.20}$$

其次，假定 V 内的热源密度为 $F(x,y,z,t)$，，则在$[t_1,t_2]$内由热源所产生的热量为

$$Q_2=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint\limits_V F(x,y,z,t)\mathrm{d}v. \tag{1.21}$$

再考虑 V 内获得热量后介质温度升高的情况. 点 M 处温度升高的速度为$\frac{\partial}{\partial t}u(M,t)$，体积 $\mathrm{d}v$ 在时间 $\mathrm{d}t$ 内温度升高所需的热量为

$$C(\rho\mathrm{d}v)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\right),$$

其中 C 为比热，ρ 为介质体密度. 因此，在$[t_1,t_2]$中 V 内介质因温度升高所需热量为

$$Q_3=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint\limits_V C\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}v. \tag{1.22}$$

将(1.20)，(1.21)和(1.22)代入(1.18)，便得

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla\cdot(K\nabla u)+F(x,y,z,t). \tag{1.23}$$

称此方程为非均匀各向同性**热传导方程**. 若区域 Ω 内介质是均匀的，则此时 K,ρ,C 皆为常数，方程(1.23)改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\nabla^2u+\frac{F(x,y,z,t)}{C\rho}.$$

或写作 $$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\nabla^2u+f(x,y,z,t),\quad (M\in\Omega,t>0) \tag{1.24}$$

其中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$称为拉氏算符，$a^2=\frac{K}{C\rho}$，$f=\frac{F}{C\rho}$. 方程(1.24) 称为**非齐次热传导方程**. 如果 Ω 内无热源，即 $F(x,y,z,t)=0$，则方程(1.24)化为