XIANGLIANGFA QIAOJIE SHUXUE GAOKAOTI

向量法巧解数学高考题

赵南平 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

向量法巧解数学高考题

XIANGLIANGFA QIAOJIE SHUXUE GAOKAOTI

赵南平 编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书除系统介绍了平面向量和空间向量的基础知识(有的内容还作了拓展)外,还介绍了向量知识与代数、三角函数、解析几何知识的交汇,并全面介绍了向量在代数、三角函数、平面几何、立体几何、解析几何、物理等方面的应用,尤其是重点介绍了向量在立体几何、解析几何中的应用,内容独特、题型全面、针对性强,适合高中生和教师阅读。

图书在版编目(CIP)数据

向量法巧解数学高考题/赵南平编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.7

ISBN 978-7-5603-2925-3

Ⅰ.向…　Ⅱ.赵…　Ⅲ.数学课-高中-解题-升学参考资料　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 131772 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　张永芹　刘瑶
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 22.75　字数 403 千字
版　　次　2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2925-3
印　　数　1～3 000 册
定　　价　28.00 元

作者简介

赵南平，男，1944年9月生人，福建省福州市人。1965年7月毕业于福建师范学院数学系(本科)，1988年被评为中学数学特级教师。赵南平从事数学教学工作已有40多年，他在教学过程中注重培养学生掌握解题规律，提高学生的解题能力，所指导的学生多次在数学竞赛中获奖。赵南平至今已出版著作11种，并在全国各种数学刊物上发表论文30多篇，其中部分被收入上海教育出版社出版的《名师授课录》一书，部分被收入台湾九章出版社出版的《名师授课手记》一书。

赵南平曾担任过福建省重点中学校长，并获得福建省“五一劳动奖章”、“全国优秀教师”等多项荣誉称号。其传略材料及主要业绩介绍已入选由国家人事部专家服务中心组织编写的权威辞书《中国专家大辞典》以及《中国特级教师》、《世纪之光——共和国英才全集》、《三个代表的理论与实践》(人物事迹卷)等多种辞书。

⊙ 前言

伴随着物理学的发展应运而生的向量，已进入中学数学教学内容。用向量方法解决立体几何和解析几何中的有关问题、向量知识与三角函数解析几何等知识的交汇已成为近几年高考数学中的热门考点，越来越成为高考考查考生数学思维能力和分析问题、解决问题能力的一个重要方面。

由于向量集数与形于一身，既有代数的抽象性，又有几何的直观性，使它成为中学数学知识网络的一个交汇点，成为联系众多数学知识的媒介。利用向量可以解决代数、三角函数、平面几何、立体几何、解析几何中的有关问题，而且向量知识在物理和工程技术等方面也有很大的应用价值。因此，在高中阶段能学会用向量方法处理数学及其他学科的有关问题，无疑有利于学生的进一步深造和直接参与实际工作。同学们应树立起利用向量方法解决问题的意识。

运用向量方法处理立体几何问题显得特别有效，它将对空间想象力和逻辑思维能力有较高要求的问题化归为简单的向量运算，大大降低了难度，增强了可操作性，为学生增添了一种理想的代数工具。因此，掌握这种方法对学生解立体几何问题显得尤为重要和实用。

一、本书的独特之处

1.内容系统、全面、独特。本书除系统介绍平面向量和空间向量的基础知识(有的内容还作了拓展)外,还介绍了向量知识与代数、三角函数、解析几何知识的交汇,并全面介绍了向量在代数、三角函数、平面几何、立体几何、解析几何、物理等方面的应用,尤其是重点介绍了向量在立体几何、解析几何中的应用,内容独特,分门别类专门论述,这在其他有关向量的教辅书(更不用说高考复习资料了)中是极为少见的。

2.以"解法指导"为主线。旨在提高读者的解题能力和高考应试能力,某数学大师说得好:"掌握一种解题方法比解一百道题更重要。"本书针对各种题型均总结出了解这种题型的方法、规律和技巧(有的是编者的教研成果,独特的解题方法会令读者有耳目一新的感觉),这是本书的精华所在,其他同类教辅书和高考复习资料极少这样处理,独特的解题方法也极少出现。编者以实用性、针对性和可操作性为原则,教读者怎样解题,读者若掌握了这些解题规律和方法,可以举一反三,触类旁通,解题能力将大大提高。

3.例题类型、题型全面。本书所选例题大多来自高考试题,其题型全面,极具典型性和代表性,例题的解答均以本章节所总结出的解题方法和规律为指导,体现通性通法,读者可从中体会该题型的解题方法,丰富解题经验。

4.针对性强,本书各章节除"解法指导"栏目外,还设置有"走进考场"栏目,编者将近几年高考试题中的相关问题集中到一起提供给读者练习,希望读者尽早接触高考试题。读者可通过相应的练习检查自己对该题型解题方法的掌握程度。

二、本书使用说明

1.读者可根据自己的实际情况选做"走进考场"中的练习题(本省出的试题最好全做),若解题时思路受阻,可先回头看看本章节的"解法指导"中所介绍的解题方法,看能否从中受到启发;若还不行,再看看后面的"答案与提示"栏目。

2.本书可作为高中一年级学生学习《数学必修(4)》和高中二年级理科学生学习《数学选修2-1》时的教辅读物,更可作为高中三年级学生总复习学习《平面向量》和《空间向量》时的参考读物,也可作为教师的教学参考资料。编者相信,书中所总结出的解题方法对读者提高解题能力一定会有所帮助,因而本书不仅是广大学生的良师益友,也是教师的得力帮手。

本书编者对向量法解题情有独钟,并作了潜心研究,除对高考试题作研究外,还参阅了大量的数学资料,从中吸收了许多有用的东西。编者虽倾心尽力,但疏漏不妥之处在所难免,敬请广大读者和数学同行不吝指正。

愿此书伴随考生走进理想大学的校门!

赵南平

2009年3月于福州

目录

第一篇　知识篇

第二篇　交汇篇

第三篇　应用篇

第一篇

知识篇

本书所讲的“向量”既有同学们在高一《数学必修(4)》中所学的平面向量,又有在高二理科《数学选修 2－1》中所学的空间向量.

平面向量的基础知识包括:平面向量的概念与线性运算、平面向量的基本定理及坐标运算,平面向量的数量积等.其中,向量运算的几何意义,两向量共线、垂直的充要条件,平面向量数量积的运算及应用是高考中常考的知识点.

空间向量的基础知识主要是空间向量的概念及运算.其中,直线的方向向量,平面的法向量在空间向量的应用中常用到.

第一章 平面向量

第一节 平面向量的概念与线性运算

一、高考内容

(一)向量的概念

1.向量 既有大小又有方向的量叫向量.

2.有向线段 具有方向的线段叫有向线段.通常在有向线段的终点处画上箭头表示它的方向.以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$,线段 AB 的长度也叫有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度,记作$|\overrightarrow{AB}|$.有向线段包含三个要素:起点、方向、长度.

3.向量的表示 向量常用一条有向线段来表示,有向线段的长度表示向量的大小,箭头所指的方向表示向量的方向.向量也可用字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 等表示,或用表示向量的有向线段的起点和终点字母表示.

4.向量长 向量$\overrightarrow{AB}$的大小,也就是向量$\overrightarrow{AB}$的长度(或称模),记作$|\overrightarrow{AB}|$.长度为 0 的向量叫零向量,记作 $\mathbf{0}$.长度等于 1 个单位长度的向量,叫单位向量.

5.平行向量 方向相同或相反的非零向量叫平行向量.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.我们规定 $\mathbf{0}$ 与任一向量平行.

6.相等向量 长度相等且方向相同的向量叫相等向量.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

7.共线向量 任一组平行向量都可平移到同一直线上,因此平行向量也叫共线向量.

(二)向量的加法与减法

1.向量的加法.

(1)定义 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,在平面内任取一点 A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则向量$\overrightarrow{AC}$叫 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 1.1),即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$(称为向量

加法的三角形法则).

(2)运算律　向量的加法满足交换律与结合律,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(3)平行四边形法则　以同一点 A 为起点的两个已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边作▱$ABCD$,则以 A 为起点的对角线 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和.这种作两个向量和的方法叫向量加法的平行四边形法则.

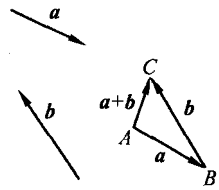

图 1.1

2. 向量的减法.

(1)相反向量　与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等、方向相反的向量叫 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量,记作 $-\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{a}$ 互为相反向量.零向量的相反向量仍是零向量,于是 $-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.任一向量与它的相反向量的和是零向量,即 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.如果 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是互为相反的向量,那么 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(2)减法定义　向量 $\boldsymbol{a}$ 加向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量,叫 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.求两个向量差的运算,叫向量的减法.

(3)差向量的作法　如图 1.2,已知 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量.

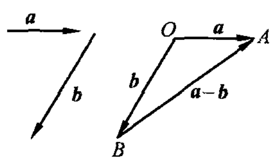

图 1.2

(三)实数与向量的积

1. 向量的数乘　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量,这种运算叫向量的数乘,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的长度与方向规定如下:① $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;②当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

2. 运算律　设 λ,μ 为实数,那么① $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;② $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;③ $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

3. 共线定理　向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线,当且仅当有且只有一个实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

二、高考要求

1. 了解向量的实际背景,理解平面向量的概念,理解两个向量相等的含义,理解向量的几何表示.

2. 掌握向量加法、减法的运算,并理解其几何意义.

3. 掌握向量数乘的运算及其意义,理解两个向量共线的含义.

4. 了解向量线性运算的性质及其几何意义.

三、解法指导

(一)牵涉到向量概念问题的解法

依据有关的向量概念来解.

例 1　如图 1.3, O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心.

(1)与 $\overrightarrow{OA}$ 相等的向量有哪些?

(2)与 $\overrightarrow{OA}$ 相反的向量有哪些?

(3)与 $\overrightarrow{OA}$ 共线的向量有哪些?

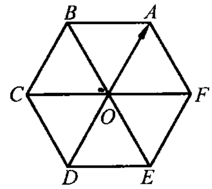

图 1.3

解　(1)有 $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}$;

(2)有 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{FE}$;

(3)有 $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{EF}; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{FE}; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AD}$.

(二)向量的加法、减法运算

一般是依据相应的运算法则进行,但应注意如下的一些解题技巧:

1.在作向量的加、减法运算时,为了利用求和的三角形法则或平行四边形法则,在求和且用三角形法则时,应使两向量首尾相接,在求和且用平行四边形法则及求差且用三角形法则时,应将两向量起点变成一样.利用相反向量可进行加、减法的互换.

2.在作多个向量的加法运算时,为了利用求和的多边形法则,应尽量将几个向量的首尾顺次相接,然后再相加.若几个向量首尾相接能构成多边形,则它们的和为零向量.

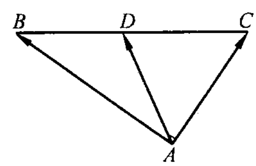

图 1.4

3.当题设中有出现线段中点(或三角形中线)或对称的条件时,应考虑利用中点公式.即如图 1.4,设 D 是线段 BC 的中点,则 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.

例 2　在△ABC 中,点 D 是 BC 边上的中点,则 $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=$　(　　)

A. $\overrightarrow{AD}$　　B. $3\overrightarrow{AD}$　　C. $\mathbf{0}$　　D. $2\overrightarrow{AD}$

解一　$3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.应选 D.

解二　原式 $=\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.应选 D.

解三 原式 $=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\mathbf{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$. 应选 D.

例 3 如图 1.5,在正方形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,求作向量:(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

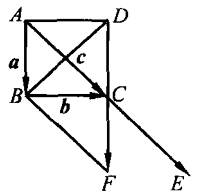

图 1.5

解 (1)由已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,又$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,所以延长 AC 到E,使$|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{AC}|$,则$\overrightarrow{AE}$即为所求作的向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(2)由已知 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$,作$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}$,则$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(三)求实数与向量的积的方法

1.向量的加法、减法、实数与向量的积的混合运算称为向量的线性运算,也叫向量的初等运算,它的运算方法与代数中代数式的运算方法相同,要求合并同类项.

2.要注意向量及向量线性运算的几何意义的应用,对向量要注意从方向和长度两个方面去考虑,在解向量与平面几何、解析几何的综合问题时,要注意将向量的等式或不等式转化为几何元素间的位置关系,再利用几何知识来解.

例 4 [2007·全国卷Ⅱ理-(5),文-(6)]如图 1.6,在△ABC 中,已知 D 是AB 边上一点,若$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$,则 λ 等于 ( )

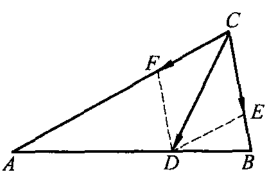

图 1.6

A.$\frac{2}{3}$ B.$\frac{1}{3}$

C.$-\frac{1}{3}$ D.$-\frac{2}{3}$

解 过点 D 作$DE/\!/CA$ 交BC 于E,作 $DF/\!/BC$ 交AC 于F,则$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}$. 由题意知$\frac{BD}{DA}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}=\frac{1}{2}$,所以$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$,则 $\lambda=\frac{2}{3}$,应选 A.

例 5 [2007·江西理二(15)]如图 1.7,在△ABC 中,点 O 是BC 的中点,过点 O 的直线分别交直线AB,AC 于不同的两点M,N,若$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$,则 $m+n$ 的值为________.

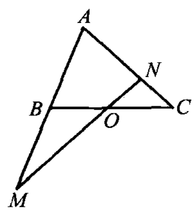

图 1.7

解一 (特殊值法)过点 O 的直线取为BC,显然有$\overrightarrow{AB}=1\cdot\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}=1\cdot\overrightarrow{AC}$,即 $m=n=1$,所以 $m+n=2$,应填 2.

解二　因为点 O 为边 BC 的中点,所以$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.因为$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$,所以$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN})$.因为三点 M,O,N 在一条直线上,所以$\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1$,即 $m+n=2$.

例 6　[2006·全国卷一理一(9)]设平面向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的和 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$,如果平面向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 满足$|\boldsymbol{b}_i|=2|\boldsymbol{a}_i|$,且 $\boldsymbol{a}_i$ 顺时针旋转 30°后与 $\boldsymbol{b}_i$ 同向,其中 $i=1,2,3$.则　　(　　)

A. $-\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}$　　B. $\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}$

C. $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}$　　D. $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}$

解　(数形结合法)作△ABC,设其重心为 G,则$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{0}$,不妨设$\overrightarrow{GA}=\boldsymbol{a}_1$,$\overrightarrow{GB}=\boldsymbol{a}_2$,$\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{a}_3$,以重心 G 为中心将△ABC 顺时针旋转 30°后并将向量 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,3)$的模扩大为原来的 2 倍,可得△$A'B'C'$(图 1.8),这时设三个新向量 $\boldsymbol{b}_1=\overrightarrow{GA'}$,$\boldsymbol{b}_2=\overrightarrow{GB'}$,$\boldsymbol{b}_3=\overrightarrow{GC'}$.因为点 G 仍为△$A'B'C'$ 的重心,所以 $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}$.应选 D.

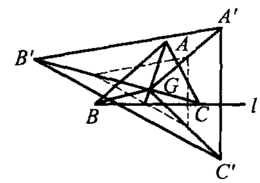

图 1.8

例 7　[2005·全国卷一理二(15)]△ABC 的外接圆的圆心为 O,两条边上的高的交点为 H,$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$,则实数 $m=$________.

解一　(特殊值法)如图 1.9,当△ABC 为直角三角形时,O 为 AC 的中点,AB,BC 边上的高的交点 H 与 B 重合,$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}$,所以 $m=1$.

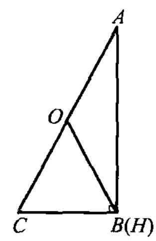

图 1.9

解二　如图 1.10,取 BC 的中点 D,则$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$,且 $OD\perp BC$,$AH\perp BC$,由$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$得$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=m(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD})$,所以$\overrightarrow{AH}=(m-1)\overrightarrow{OA}+2m\overrightarrow{OD}$,而$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(m-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+2m\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}$,即$0=(m-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+0$,所以 $m=1$.

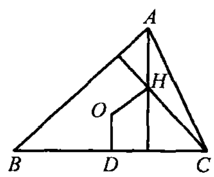

图 1.10

例 8　设 O 是△ABC 内部的一点,且$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$,则△$ABC$ 和△OBC 的面积之比为　　(　　)

A. 3∶2　　B. 5∶2　　C. 4∶1　　D. 5∶1

解　因为$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$,所以$\overrightarrow{OA}=-2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.如图 1.11,过 B 作 $BE/\!/OC$,过 C 作 $CE/\!/OB$.联结 OE 交 BC 于 D.因为 $OBEC$ 是平行四边形,所以 $OD=DE$,且$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OD}$.所以$\overrightarrow{OA}=-4\overrightarrow{OD}$,即$|\overrightarrow{OA}|=$

$4|\overrightarrow{OD}|$.设 A,O 到 BC 的距离分别是 h,h_1,则 $\frac{h_1}{h}=\frac{1}{5}$,又因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle OBC$ 同底,所以 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle OBC}}=5:1$,应选 D.

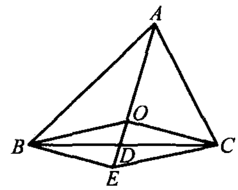

图 1.11

例 9 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,求证:$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$.

证一 如图 1.12,设 D,E,F 分别是 BC,CA,AB 的中点,则

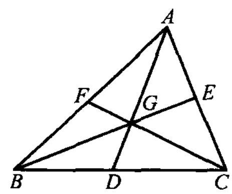

图 1.12

$$\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{BG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{CG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=&-\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF})=\\&-\frac{2}{3}[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})]=\\&-\frac{1}{3}[(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB})]=\\&-\frac{1}{3}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

证二 设 A,B,C 分别对应向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,重心 G 对应向量 $\boldsymbol{g}$,由三角形重心公式知 $\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$.因为

$$\overrightarrow{GA}=\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}=\frac{2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{GB}=\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}=\frac{2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}}{3},\overrightarrow{GC}=\frac{2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{3}$$

所以

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\frac{2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{3}+\frac{2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}}{3}+\frac{2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{3}=\mathbf{0}$$

说明 此例是三角形重心的一条重要性质,在解题时常用到,其逆命题也成立.

(四)向量方程的解法

由于向量具有许多与整式相类似的运算性质(如:也可像多项式那样合并

"同类项"或去括号),因此我们可以按照一元一次方程的解法来解关于向量的方程.

例 10 解关于向量 $\boldsymbol{x}$ 的方程:$2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x})=3(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})$.

解 由已知 $2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{x}$,$5\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{x}=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$.

(五)两向量共线充要条件的应用

1.已知条件中有(或要判定)两向量平行(或共线)时,要考虑利用两向量共线的充要条件来帮助解题.

2.求与一已知向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量时,采用待定系数法更为简单,即设所求向量为 $\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R})$,然后结合其他条件列出关于 λ 的方程,求出 λ 值后代入 $\lambda\boldsymbol{a}$ 即可得到欲求向量.

3.两向量共线的充要条件常用于解决三点共线问题:要证 A,B,C 三点共线,可证$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$.

注意 零向量与任一向量都共线,因此对于两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的问题,首先要考察其中没有零向量.

例 11 [2005·山东理一(7),文一(8)]已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,且$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,则一定共线的三点是 ( )

A. A,B,D B. A,B,C C. B,C,D D. A,C,D

解 因为$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})+(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{AB}$,所以 A,B,D 三点共线,应选 A.

例 12 求证:向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$的终点$A,B,C$ 共线的充要条件是存在实数λ,μ,且 $\lambda+\mu=1$,使得$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$.

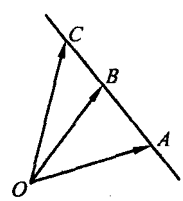

图 1.13

证明 (必要性)若向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$的终点共线(图 1.13),则$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$,于是存在唯一的实数 m,使得$\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{AB}$.又$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,则有$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$,$\overrightarrow{OC}=-m\overrightarrow{OA}+(1+m)\overrightarrow{OB}$.令 $\lambda=-m$,$\mu=1+m$,则 $\lambda+\mu=1$,且$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$.

(充分性)若$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,其中 $\lambda+\mu=1$,则 $\mu=1-\lambda$,$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$,$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}$,所以 A,B,C 三点共线,即向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$的终点在同一直线上.

说明 此题的结论在解决点共线的问题时经常用到.

例 13 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是任意的两个共线向量,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$,判断向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否共线.