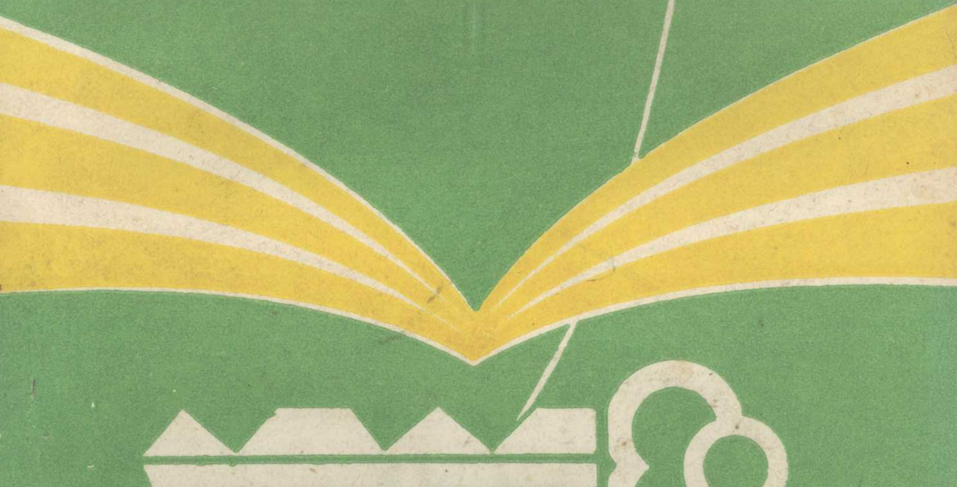
# 初中数学的技能与技巧

江　志　万尔遐　主编

张大受　程自道　马静涛　编



中国地质大学出版社

# 初中数学的技能与技巧

江　志　万尔遐　主编
张大受　程自道　马静涛　　编

中国地质大学出版社

## 内 容 提 要

本书根据初中数学通用教材和教学大纲精神，全面地、系统地概括了初中数学的基础知识，论述了解决初中数学所涉及的各类问题的技能与技巧，例题典型、习题新颖、内容精湛、清晰易懂，是一本水平较高的初中数学教学用书。

为了方便读者，每章还配有各类型习题，在书末附有答案或提示。

本书可作为初中数学教师和各年级学生学习的参考书。

初中数学的技能与技巧

江　志　万尔遐　主　编

张大受　程自道　马静涛　编

责任编辑　汪江松　方　菊

*

中国地质大学出版社出版、发行

武汉市汉阳县印刷厂印刷

*

开本　787×1092　1/32　印张8.5　字数198千字

1989年2月第1版　1989年2月第1次印刷

印数　1-10 000册

ISBN　7-5625-0233-1/G·55

定价：2.45元

# 前　　言

为适应我国四化建设的需要，全国广大青年迫切要求增强自己的数学能力，以便进一步提高自己的科技水平，为满足青年的这种要求，特编写这本书。

本书的主要对象是初中学生，也可供初中数学教师参考。编写本书的宗旨是，使读者通过本书的学习，加深对初中数学的本质的认识，掌握一些基本的解题的技能与技巧，发展逻辑思维能力和创造性思维能力，提高数学水平。

本书按全国通用教材的知识内容，概括成十九个知识专题，分为十九章。每章均扼要介绍该部分的基础知识，论述了解决该部分所涉及的重点问题或难点问题的技能与技巧，配有适量的例题和习题，书末附有习题答案或提示。

本书是作者多年教学实践经验的总结，教学研究成果的荟萃，同时也搜集整理、融汇了湖北、武汉地区的有关资料。武昌水果湖中学翁率武老师为本书审稿，在此表示衷心地感谢。

本书是《高中数学的技能与技巧》一书的姊妹篇，这两本书能够出版，与武汉市现代技术经济研究所的支持和帮助分不开，特别与肖帆同志的支持和帮助分不开。在此表示由衷的感谢。

限于水平，缺点、错误一定不少，希望得到各方面的批评、指正。

作　者

1988年10月于武汉

# 目　　录

# 第一章 实 数

## 一、实数的概念

1. 实数的分类

- 实数
  - 有理数（均可写成分数$\frac{m}{n}$.（$m$、$n$都是整数，且$n \neq 0$））
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无数理（无限不循环小数 不能表为分数。）
    - 正无理数
    - 负无理数

2. 实数与数轴　实数和数轴上的点是一一对应的，即每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反之，数轴上每一个点都表示唯一的一个实数。

3. 绝对值　在数轴上表示一个数的点离开原点的距离叫做这个数的绝对值。一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它相反数；零的绝对值是零。即

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当} a > 0 \text{时；} \\ 0, & \text{当} a = 0 \text{时；} \\ -a, & \text{当} a < 0 \text{时。} \end{cases}$$

4. 实数的大小比较　一种方法是借助数轴：在数轴上表示的两个实数，右边的数总比左边的数大，两数表示同一

点，则相等。另一种方法是由两实数的差值来比较：

$$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b;$$
$$a-b=0 \Longleftrightarrow a=b;$$
$$a-b<0 \Longleftrightarrow a<b.$$

5．奇数与偶数　形如$2n$($n$是整数）这样的数是偶数；形如$2n+1$($n$是整数）这样的数是奇数。

6．质数与合数　只能被1和它本身整除的自然数(除去1)叫做质数(又叫素数)；不仅能被1和它本身整除，还能被其它自然数整除的自然数叫做合数。

例1　把下列各数填在相应的大括号里，并把它们表示在数轴上（对于无理数可以近似表示）：$-3\frac{1}{4}$，$\lg 3$，0，$(-2)^{-2}$，5，$|-\sqrt{2}|$，$(-1)^{111}$，$-\sqrt{36}$，$(\sqrt{27})^{0}$，$\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\operatorname{tg}45°$，$\pi$．其中属于整数的有{　　}；属于无理数的有{　　}；属于分数的有{　　}。

**解**　因为$(-2)^{-2}=\frac{1}{4}$，$|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$，$(-1)^{111}=-1$，$-\sqrt{36}=-6$，$(\sqrt{27})^{0}=1$，$\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{25}{4}$，$\operatorname{tg}45°=1$，所以，属于

整数的有：$\{0，5，(-1)^{111}，-\sqrt{36}，(\sqrt{27})^{0}，\operatorname{tg}45°\}$；

有理数的有：$\{-3\frac{1}{4}，0，(-2)^{-2}，5，(-1)^{111}，-\sqrt{36}，(\sqrt{27})^{0}，\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}，\operatorname{tg}45°\}$；

无理数的有：$\{\lg 3，|-\sqrt{2}|，\pi\}$；

分数的有：$\left\{-3\frac{1}{4}, (-2)^{-2}, \left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}$.

再把它们分别表示在数轴上（略）。

例2 已知 $|a|=2$，$|b|=3$，试确定 $|a+b|$ 的值。

解 $\because |a|=2$，$|b|=3$，$\therefore a=\pm 2$，$b=\pm 3$。

(1) 当$a$、$b$同号时，$|a+b|=|\pm(2+3)|=|\pm 5|=5$；

(2) 当$a$、$b$异号时，$|a+b|+|\pm(3-2)|=|\pm 1|=1$。

例3 （一元选择题）若关于$x$的方程 $||x-2|-1|=a$ 有三个整数解，则$a$的值是（　　）。

(A) 0。 (B) 1。 (C) 2。 (D) 3。

解 $\because$ 当$a=0$时，方程$||x-2|-1|=0$ 有$x=1$、3 两解，$\therefore$ (A)不正确。

当$a=1$时，$||x-2|-1|=1 \Longrightarrow |x-2|=2$或 $|x-2|=0$，解得$x=0$、2、4三个数，又(A)、(B)、(C)、(D)中只有一种正确，$\therefore$ 应选(B)。

例4 化简 $|x+\sqrt{2}|-|2x+3|+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$。

解 (1) 当$x \leqslant -1.5$时，

原式$=-x-\sqrt{2}+2x+3+\sqrt{2}-1=x+2$；

(2) 当$-1.5<x\leqslant -\sqrt{2}$时，

原式$=-x-\sqrt{2}-2x-3+\sqrt{2}-1=-3x-4$；

(3) 当$x>-\sqrt{2}$时，

原式$=x+\sqrt{2}-2x-3+\sqrt{2}-1$

$=-x+2\sqrt{2}-4$。

附注 在解题过程中，如计算、化简、解方程、解不等式、作函数的图象等，常遇到含有绝对值符号的数或者式子，要去掉绝对值符号时，必须考虑绝对值符号内的数的符

号，特别是题目对于绝对值符号内的字母取值范围没有限定的时候，要分别对绝对值符号内的式子大于零，等于零和小于零几种情况加以讨论。

例5　$9+\sqrt{11}$ 与 $9-\sqrt{11}$ 的小数部分分别是 $a$，$b$。求 $ab-3a+4b-7$ 值。

**解**　$\because$ $9+\sqrt{11}=12+a$，$\therefore$ $a=\sqrt{11}-3$；

$\because$ $9-\sqrt{11}=5+b$，$\therefore$ $b=4-\sqrt{11}$。

故　原式 $=a(b-3)+4b-7$

$=(\sqrt{11}-3)(1-\sqrt{11})+4(4-\sqrt{11})-7$

$=-5$。

例6　求有理数 $x$、$y$，使 $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=x+y\sqrt{2}$。

**解**　两边立方，并整理得

$$7+5\sqrt{2}=(x^3+6xy^2)+(3x^2y+2y^3)\sqrt{2}。$$

要使上式成立，必须并且只须

$$\begin{cases}x^3+6xy^2=7\\3x^2y+2y^3=5\end{cases}$$

成立，解之得，$x=1$，$y=1$。

例7　若整数 $n>1$，试证 $n^4+4$ 必为合数。

**证明**　$\because$ $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2$

$=[(n+1)^2+1][(n-1)^2+1]$，

又 $\because$ 整数 $n>1$，$\therefore$ $(n+1)^2+1\neq1$，$(n-1)^2+1\neq1$，由合数的定义知 $n^4+4$（整数 $n>1$）必为合数。

例8　证明实数 $\lg2$ 是无理数。

**证明**　用反证法。设 $\lg2$ 是有理数，则可表为 $\lg2=\dfrac{q}{p}$，其中 $p$、$q$ 是互质正整数，依对数的定义，$10^{\frac{q}{p}}=2$，

$\therefore 10^q=2^p$，而左边的数末位为0，右边的数末位只是2、4、6、8。

两边不能相等，矛盾。因此lg2不是有理数。

二、实数的运算

1．根据有关的运算法则、定律来进行运算，但要注意运算顺序及合理的简便运算。

2．实数的开方，主要是研究二次方根的求法。正数$a$的正的平方根，叫做$a$的算术平方根，记作$\sqrt{a}$。零的算术根仍是零。由算术根的意义可知

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\ -a(a<0).\end{cases}$$

例9 计算下列各式：

(1) $-\sqrt{\dfrac{4}{9}}\div(-2)^2\times\left(-\dfrac{1}{2}-1\right)^2$；

(2) $\sqrt{2}+\dfrac{\pi}{2}+0.4\dot{7}-\dfrac{2}{3}$（精确到0.01）；

(3) $(-4)\times\sqrt{7}+\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}$；（结果保留三个有效数字）。

解 (1) 原式$=\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{9}{4}=-\dfrac{3}{8}$；

注 要注意运算顺序，特别是乘、除法是同一级运算，应按顺序计算，若这样计算

原式$=\left(-\dfrac{2}{3}\right)\div 4\times\dfrac{9}{4}=-\dfrac{2}{27}$是错误的。

(2) 原式$\approx 1.414+\dfrac{3.142}{2}+0.478-0.667$

$=2.796\approx 2.80$；

(3) 原式$\approx(-4)\times 2.646+\dfrac{1}{2}\times 2.449$

$=9.359\approx 9.36$。

例10 指出下列各题运算中的错误，并加以改正：

(1) 计算：

$$-3^2+\sqrt{(\log_{\frac{1}{2}}2)^2}-\cos120^\circ-0.001^{-\frac{1}{2}}$$

$$=9+\log_{\frac{1}{2}}2-\frac{\sqrt{3}}{2}-(10^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$=9-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-10=-2-\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解 $-3^2\neq(-3)^2$，而应是 $-3^2=-9$；

∵ $\log_{\frac{1}{2}}2<0$，∴ $\sqrt{(\log_{\frac{1}{2}}2)^2}=-\log_{\frac{1}{2}}2=1$；

∵ $\cos120^\circ=-\cos60^\circ\neq\cos60^\circ$，

∴ $\cos120^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

∵ $0.001\neq10^{-2}$，而应是 $0.001=10^{-3}$。

∵ $-2-\frac{\sqrt{3}}{2}\neq-2\frac{\sqrt{3}}{2}$，而应是 $\frac{-4-\sqrt{3}}{2}$。

(2) 计算：

解 $\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-7^3(7^{-\frac{2}{3}}\times7^{\frac{1}{3}})\div7^{\frac{7}{6}}$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-(7^3\times7^{\frac{2}{3}})(7^3\times7^{\frac{1}{3}})\div7^{\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{1}{6}-7^{-2}\times7^{1}\div7^{\frac{7}{6}}=\frac{1}{6}-7^{-2}\div7^{\frac{7}{6}}$$

$$=\frac{1}{6}-7^{-2\times\frac{6}{7}}=\frac{1}{6}-7^{-\frac{12}{7}}.$$

解 $\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\neq\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$，应为

$$\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{7}{36}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{6};$$

$7^3(7^{\frac{2}{3}}\times7^{-\frac{2}{3}})\neq(7^3\times7^{-\frac{1}{3}})(7^3\times7^{\frac{1}{3}})$，且 $7^3\times7^{-\frac{2}{3}}\neq7^{-2}$

$7^3\times 7^{\frac{1}{3}}\neq 7^1$,应为$7^3\times(7^{-\frac{2}{3}}\times 7^{\frac{1}{3}})=7^{3-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=7^{\frac{8}{3}}$；

$7^{-2}\div 7^{\frac{7}{6}}\neq 7^{(-2)\times\frac{7}{6}}$,应为$7^{-2}\div 7^{\frac{7}{6}}=7^{-2-\frac{7}{6}}$。

结果为$-\dfrac{41\sqrt{7}}{6}$。

附注　以上错误有的属于运用基本概念出错，有的属于运用基本运算律或运算法则出错。如果从正面能进行正确运算，从反面又能检查错误，能力就会增强.

例11　若$a$、$b$分别表示$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$的整数和小数部分，以$a$、$b$为根，求作一个一元二次方程.

解　因为$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}=2+\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$，又$2<\sqrt{7}<3$；所以$\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}<1$，因而整数部分$a=2$，小数部分$b=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$，则$ab=\sqrt{7}-1$，$a+b=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$。以$a$、$b$为根的一元二次方程为$x^2-\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}x+\sqrt{7}-1=0$。

例12　在什么条件下，实数$a$的倒数比$a$大？比$a$小？与$a$相等？

解　$\because$ 零没有倒数，$\therefore$ $a\neq 0$。

又$\because$ $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{(a+1)(a-1)}{a}$,分六种情况讨论.(见表1-1)

故　当$a>1$ 或 $-1<a<0$时，$a>\dfrac{1}{a}$；

当$a<-1$ 或 $0<a<1$时，$a<\dfrac{1}{a}$；

当$a=\pm 1$时，$a=\dfrac{1}{a}$。

表1-1

| 代数式 \ 符号 \ 范围 | $a<-1$ | $a=-1$ | $-1<a<0$ | $0<a<1$ | $a=1$ | $a>1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a+1$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | 2 | $+$ |
| $a-1$ | $-$ | $-2$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $\frac{(a+1)(a-1)}{a}$ | $-$ | 0 | $+$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $a$与$\frac{1}{a}$ | $a<\frac{1}{a}$ | $a=\frac{1}{a}$ | $a>\frac{1}{a}$ | $a<\frac{1}{a}$ | $a=\frac{1}{a}$ | $a>\frac{1}{a}$ |

附注 对于字母表示的数，在解题过程中应注意讨论各种情况。

## 习 题 一

1．下列各题给出A、B、C、D四种解答，其中有且只有一种是正确的，将正确解答的代号填入题后的括号内，并说明理由：

(1) $(6-\sqrt{5})^0\div(\text{tg}60°)^{-2}\times|\lg1+\lg0.01|+\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$是(　　)。

(A) 自然数。(B) 整数。(C) 无理数。(D) 分数。

(2) $-2^2$的所有平方根是(　　)。

(A) $\pm2$。(B) 2。(C) $-2$。(D)以上都不是。

(3) $\sin150°$与$\cos120°$的关系是(　　)。

(A) 互为质数。　　(B) 互为有理化因式。

(C) 互为相反数。　　(D) 互为倒数。

(4) 与数轴上的点成一一对应的数是(　　)。

(A) 实数。　　　　　　(B) 无理数。

(C) 有理数。　　　　　(D) 整数。

(5) 若$a$、$b$是实数，下面四个命题中正确的命题是(　　)。

(A) 若$a^2>b^2$，则$a>b$。(B) 若$|a|>|b|$，则$a^2>b^2$。

(C) 若$a\neq b$，则$a^2\neq b^2$。(D) 若$a>b$，则$a^2>b^2$。

2。判别正误：

(1) 无限小数是无理数；

(2) 有不是正整数或负整数的整数；

(3) 当$a$不是10的整数次幂时，$\lg a$是无理数；

(4) 任一正数的倒数比它本身小；

(5) 两个有理数进行加、减、乘、除四则运算时，其结果仍是有理数；

(6) 零不是自然数；

(7) 1是最小的质数；

(8) 绝对值相等的两个实数相等；互为相反数的两个实数不相等。

3。比较大小(填空)：

(1) 若$a>b>0$，则$\frac{1}{a}$\_\_\_\_\_\_$\frac{1}{b}$；若$b<a<0$，则$\frac{1}{a}$\_\_\_\_\_\_$\frac{1}{b}$；

(2) 若$m<n<0$，则$m^2$______$n^2$；

(3) 若$a<1$，则$|a-1|$______$a-1$；

(4) 若$a<0$，则$-a$______$a$；

(5) 若$a+b\geqslant 0$，$ab<0$，$a<b$，则$a$____0，$b$____0，$|a|$____$|b|$；

(6) $\log_{\frac{1}{2}}4$ ____ $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$；

(7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ ____ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$；

(8) 若$n$为整数，$a$为实数，只有$a$ ____ 0，$n$为 ____ 数，才能使$a^n<0$恒成立；

(9) $4\sqrt{5}$ ____ $\sqrt{75}$；

(10) 若$x^2>4$，则$-|x|$ ____ $-2$。

4．计算下列各题：

(1) $-1-\{1\div(-1)-(1-0.5\times\frac{1}{3}+0\div35)\}\cdot\{3-(-3)^2\}$；

(2) $-|(-3)^3|+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\sqrt{(-3)^2}$；

(3) $\sqrt{15}\div\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times30^{-\frac{1}{2}}$；

(4) 若$\sqrt{1.477}=1.215$，$\sqrt{14.77}=3.843$，求$\sqrt{0.01477}$；

(5) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-(\sqrt{3}-2)^{-1}+\sqrt{\{(\frac{1}{2})^{-6}\}^{\frac{2}{3}}}$；

5．求$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$的不足近似值和过剩近似值(精确到0.01)。

6．已知$\frac{1}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$的整数部分为$a$，小数部分为$b$，求$a$和$b-\frac{4}{b}$的值．

7．比较两正整数$m$、$n$的和$m+n$与积$mn$的大小。

8．化简下列各式：

(1) $\sqrt{-a}\cdot\sqrt[3]{a}$；

(2) $\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;

(3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$;

(4) $\sqrt{60-24\sqrt{6}}+\sqrt{4-\sqrt{21}}$;

(5) $(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})\div(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

9．(1) 当$x$为何值时等式$|x-5|+\sqrt{x^2-2x+1}=-1$成立。

(2) 当$\frac{1}{2}<a<2$时，化简$2\sqrt{a^2-4a+4}+|2a-1|$.

(3) 化简：$y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

(4) 化简：$\sqrt{(x-\sqrt{x^2})^2}$ $(x<0)$.

(5) 化简：$|x-2|+|x+1|$.

# 第二章　整　式

## 一、代数式的概念

1. 代数式的定义　用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数字或表示数字的字母联结而成的式子，叫做代数式。

2. 代数式的值　用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做代数式的值。

3. 代数式的分类　代数式是以运算种类为主要根据进行分类的。

$$
\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}
$$

## 二、整式的概念

1. 单项式　没有加减运算的整式，叫做单项式，在单项式里，数字因数叫做单项式的系数，所有字母的指数和叫做单项式的次数。

2. 多项式　几个单项式的和叫做多项式．在多项式里，每个单项式叫做多项式的项，有几项就是几项式；次数最高的项的次数，就是这个多项式的次数．

3. 同类项　多项式里的某些项，如果所含的字母相同，并且相同字母的指数也分别相同，那么这些项叫做同类项．合并同类项时，把同类项的系数相加，所得的结果作为