普通高等教育"十一五"国家级规划教材

线性代数与解析几何教程

（下册）

樊 恽　刘宏伟 编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

线性代数与解析几何教程

(下册)

樊 恽 刘宏伟 编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书讲述了高等院校线性代数与解析几何课程的基本内容，既突出了线性代数作为各专业公共课程的工具性和操作性，也反映了线性代数与解析几何、多项式知识的思想性以及它们之间的内在联系．本书在内容处理上力求翔实流畅、易学易教．本书分上、下两册．下册内容包括实二次型、曲线与曲面、射影几何初步、一般向量空间、欧氏空间、酉空间、矩阵相似标准形等 6 章．每节后配备了一定数量的练习题，章后配备有综合性较强的习题．上、下册均有符号说明、部分习题答案与提示，并附有名词索引，便于阅读查找．

本书为板块结构，遵循按需选取．本书既可作为数学各专业学生的教学用书，也可作为非数学专业学生的教学用书，对其他课程的教师也具有参考价值．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何教程．下册/樊恽，刘宏伟编．—北京：科学出版社，2009

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-03-025045-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①樊… ②刘… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 ②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2 O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 122515 号

责任编辑：李鹏奇 王 静 房 阳／责任校对：朱光光

责任印制：张克忠／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009 年 8 月第一次印刷 印张：16 1/4

印数：1—3 500 字数：316 000

定价：26.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

高等代数、解析几何是大学数学课程中最基础的几门课程中的两门. 它们是大部分专业的公修课, 对数学各专业、师范类数学专业更具基础性和重要性. 高等代数通常包括线性代数和少量多项式内容, 解析几何则主要是以代数方法研究直线、平面、曲线、曲面. 线性代数和多项式也有广泛几何背景. 作者多年来从事这两门课程的合并教学. 在实践基础上, 5 年前曾出版了《线性代数与几何引论》, 在涵盖高等代数与解析几何的标准内容的基础上, 适当考虑了考研等需求, 处理方式上也下了一番功夫, 不足之处主要是操作性差了一点: 编排比较浓缩, 讲述过于简练. 在近几年教学实践的基础上, 作者希望重新编写一部学生比较容易阅读、教师比较容易使用的教材. 本书就是这种努力的产物.

本书内容比较丰富, 共 12 章, 上、下册各 6 章. 选取材料涵盖了高等代数与解析几何的标准内容, 而且不论是正文还是习题都有更广的适应性, 如可作考研复习参考等. 全书基本是板块式结构, 有利于教学安排.

第 1, 2 章和第 8, 9 章是两个解析几何板块. 前者基本是线性部分, 也是线性代数的几何背景; 后者是曲线曲面部分, 二次曲线曲面分类的关键步骤是主轴化, 所以放在第 7 章二次型之后.

第 3, 4 章和第 5, 6 章是两个高等代数基础板块. 前者是最基础的部分; 后者是多项式、特征系和对角化, 特征系需要较多的多项式知识.

第 7 章二次型, 也是高等代数的基础板块.

第 10~12 章则是数学专业的线性代数板块.

可见, 第 3, 4, 6 章相当于一般理工科线性代数课程, 加上第 7 章则可适应较高要求.

四个高等代数板块则构成数学专业高等代数两学期课程.

全书作为数学各专业、师范类数学专业教材, 适合三学期课程: 第 1~4 章 (约 90 课时)、第 5~9 章 (约 90 课时)、第 10~12 章 (约 72 课时), 这个进度是与专业整体课程安排和谐共进的.

考虑教学方便, 本书尽量设计为一个教材节可供一次课 (两课时) 讲授再辅以适当习题课时. 标以 † 的章节是可以不讲授的内容.

尽管编排带有板块性质, 但从上面各板块的介绍已可看出各章之间思想内容的交叉、转换融合. 而且, 章节材料的处理也尽量体现思想的转换融合和提炼, 如最基础的第 4 章, 以线性方程组为导引, 以解析几何向量为实例, 导入数序列向量空间

和矩阵概念；以消去法即矩阵的初等变换为基本思想技巧，推导出矩阵的秩等基本定理；再作为应用得出关于线性方程组的基本理论. 这样，线性方程组与矩阵内容融为一体；思想渊源、基本理论、操作技巧融为一体.

本书包含三个应用实例：里昂捷夫经济模型、列斯里群体模型、极小平方逼近.

本书习题量较大. 对初学者可适当布置练习，稍难的习题如每章补充习题可供复习选讲、考研训练等. 书后附有部分习题答案与提示.

书中附有符号说明和名词索引，方便阅读查找.

基础教学任重道远，诚盼斧正.

樊　恽　刘宏伟

2008 年 11 月

于武昌桂子山

符 号 说 明

下面对全书使用符号的惯例和在较多地方出现的符号做一简短说明:

$A := B$　表示用 A 记 B

$B =: A$　表示 B 记作 A

$\forall$　表示"对所有"

$\exists$　表示"存在"

$\square$　表示证明完毕, 或证明省略

$\sum\limits_{i=1}^{n}$　表示跑动标识 i 从 1 跑到 n 的和

$\prod\limits_{i=1}^{n}$　表示跑动标识 i 从 1 跑到 n 的积

$f: A \to B$　从集 A 到集 B 的映射

$a \mapsto b$　表示元素 a 映射为元素 b

id　表示恒等映射 (恒等变换)

$\mathrm{Im}(f)$　映射 $f: A \to B$ 的象

$\varnothing$　表示空集

板书黑体 $\mathbb{F}$　表示一个数域,　$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 分别表示有理数域、实数域、复数域

i　表示虚数单位, 即 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ (数学斜体 i, j 等常用来表示跑动标号)

小写英文字母 a, b, c 等　常表示数

大写英文字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 等　常表示矩阵

单位矩阵 (亦称恒等矩阵) 记作 $\boldsymbol{E}$, 零矩阵记作 $\boldsymbol{O}$

大写英文字母 V, U, W 等　常表示向量空间; $W \leqslant V$, 表示 W 是 V 的子空间

小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 等　常表示向量 (很多地方, 多项式的变元 (不定元) 用 λ 表示)

零向量记作 $\mathbf{0}$

花写英文字母 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ 等　常表示线性变换

$\overrightarrow{AB}$　表示以 A 为起点以 B 为终点的向量

$\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$　表示从 n 个东西选取 k 个的组合数

$\deg f(x)$　表示多项式 $f(x)$ 的次数

$\gcd(f(x), g(x))$　表示多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式

$\gcd(m, n)$　表示整数 m, n 的最大公因数

$\mathrm{lcm}(f(x), g(x))$　表示多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的最小公倍式

$\mathrm{lcm}(m, n)$　表示整数 m, n 的最小公倍数

$\min\{a, b, \cdots\}$ 表示 a, b, $\cdots$ 中最小的数

$\max\{a, b, \cdots\}$ 表示 a, b, $\cdots$ 中最大的数

$\mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ 表示对角线元为 $d_1, \cdots, d_n$ 的对角矩阵

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵, $(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 表示列向量

$\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置共轭矩阵

$\boldsymbol{A}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_l \\ j_1, \cdots, j_m \end{pmatrix}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1, \cdots, i_l$ 行, 第 $j_1, \cdots, j_m$ 列决定的子矩阵

$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹

$\det \boldsymbol{A}$ 或 $|\boldsymbol{A}|$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

$\varDelta_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式

$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k)$ 表示由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 生成的子空间

$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$ 表示欧氏空间的内积

$\mathbb{F}[\lambda]$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有多项式的集合

$M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $m \times n$ 矩阵的集合

$M_n(\mathbb{F})$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶方阵的集合

$GL_n(\mathbb{F})$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶可逆方阵的集合

目　录

前言

符号说明

第 7 章　实二次型 …… 1

7.1　实二次型 …… 1

7.2　实对称矩阵 …… 5

7.3　实二次型标准形 …… 10

7.4　实向量空间的内积 …… 15

7.5　正交矩阵 …… 21

7.6　主轴定理 …… 25

7.7　实二次型的正负性 …… 31

第 7 章补充习题 …… 36

第 8 章　曲线与曲面 …… 38

8.1　空间曲线与曲面的方程 …… 38

8.2　柱面与锥面 …… 44

8.3　旋转面 …… 49

8.4　平面直角坐标变换 …… 53

8.5　平面二次曲线的欧氏分类 …… 56

8.6　空间欧氏变换与二次曲面 …… 63

8.7　空间二次曲面的欧氏分类 …… 67

8.8　空间二次曲面的欧氏性质 …… 73

8.9　二次曲线曲面的仿射分类 † …… 78

第 8 章补充习题 …… 82

第 9 章　射影几何初步 † …… 85

9.1　射影平面　齐次坐标 …… 85

9.2　对偶原理 …… 89

9.3　射影变换, 射影分类 …… 95

第 9 章补充习题 …… 102

第 10 章　一般向量空间 …… 104

10.1　一般向量空间 …… 104

10.2　子空间 …… 108

10.3　基底与维数 ······ 112
10.4　线性映射 ······ 116
10.5　线性映射与基底 ······ 122
10.6　对应定理 ······ 126
10.7　基底变换定理 ······ 130
10.8　子空间的和 ······ 135
10.9　子空间的直和 ······ 138
10.10　线性变换的不变子空间 ······ 144
10.11　线性变换的特征系 ······ 148
第 10 章补充习题 ······ 152
第 11 章　欧氏空间、酉空间 ······ 154
11.1　一般欧氏空间 ······ 154
11.2　欧氏空间的线性变换 ······ 159
11.3　酉空间 ······ 163
11.4　谱定理 ······ 168
11.5　谱定理 (续) ······ 172
11.6　正交矩阵的实标准形 ······ 176
11.7　极小平方逼近 † ······ 184
第 11 章补充习题 ······ 190
第 12 章　矩阵相似标准形 ······ 192
12.1　λ 矩阵的子式因子组 ······ 192
12.2　λ 矩阵的不变因子组 ······ 197
12.3　λ 矩阵的初等因子组 ······ 201
12.4　矩阵相似判别准则 ······ 206
12.5　若尔当标准形 ······ 211
第 12 章补充习题 ······ 217
部分习题答案与提示 ······ 219
索引 ······ 248

第7章　实 二 次 型

任意多元二次函数可分为二次齐次部分、一次齐次部分、常数项三部分之和. 一次齐次函数即线性函数已在第 4 章讨论. 本章研究二次齐次函数, 即二次型. 化二次曲线和二次曲面为标准形是重要研究背景, 矩阵是重要研究工具, 内积与度量是重要概念并将在第 11 章得到发展.

本章的数域全是实数域, 即讨论实数域上的函数与矩阵.

7.1　实 二 次 型

考虑 n 个变量的变量组 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)$. 实数域上一次齐次函数 $f(\boldsymbol{X})=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$, 其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是实系数, 称为实数域上的一个**线性型**, 简称实线性型.

实数域上的齐次二次函数 (其中 b_{ij} 是实系数)

$$\begin{aligned}q(\boldsymbol{X})=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}b_{ij}x_ix_j=b_{11}x_1^2&+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+\cdots+b_{1n}x_1x_n\\&+b_{22}x_2^2+b_{23}x_2x_3+\cdots+b_{2n}x_2x_n\\&+\cdots\\&+b_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

称为实数域上的一个**二次型**, 简称实二次型, 或称实**二次齐式**. 上式 “$\sum$” 的跑动标识 i,j 的跑动范围 “$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$” 表示 i 与 j 都从 1 跑到 n 但限定 $i\leqslant j$, 这个限定是为了排除重复项, 如 $i=2,j=1$ 与 $i=1,j=2$ 表达的是同一个项因为 $x_2x_1=x_1x_2$.

约定　本章中未加定语的 “二次型” 都是实二次型.

最简单的二次型是仅含平方项的二次型: $b_1x_1^2+\cdots+b_nx_n^2$, 称这种二次型为 “平方和”.

一种初等代数技巧, **逐步配方法**, 可以把任何二次型变为 “平方和”.

例 1　用逐步配方法化三元二次型 $q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 为平方和.

解　逐步变换如下:

$$
\begin{aligned}
& x_1^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 && (\text{原二次型 } q(x_1,x_2,x_3))\\
=\ & x_1^2+x_1(x_2+x_3)+\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}x_2^2-\frac{1}{4}x_3^2+\frac{1}{2}x_2x_3 && (\text{将 } x_1 \text{ 配入一个完全平方})\\
=\ & \left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{1}{4}(x_2^2+x_3^2-2x_2x_3) && (\text{使剩下的项都不再含 } x_1)\\
=\ & \left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\left(\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2, && (\text{将 } x_2 \text{ 配入一个完全平方})
\end{aligned}
$$

所以只要用线性变换

$$
\begin{cases}
y_1=x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3,\\
y_2=\qquad\ \dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3,\\
y_3=\qquad\qquad\qquad\ x_3,
\end{cases}
\tag{7.1.1}
$$

则三元变量 x_1,x_2,x_3 的二次型 q 可以化为三元变量 y_1,y_2,y_3 的二次型

$$q(x_1,x_2,x_3)=q(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2+0y_3^3=y_1^2-y_2^2\ ,$$

它作为 y_1, y_2, y_3 的二次齐次函数是平方和. □

注意, 虽然这题的最后结果表达式中只有两个非零平方项, 但是应该明白它是三元变量的二次型: $y_1^2-y_2^2+0y_3^2$.

逐步配方法有两个要点:

(1) 每步配方要使得获得完全平方后剩下的项少去一个变元. 例如, 例 1 第一步配方, 需要把所有含 x_1 的项收集起来配成一个完全平方, 这样剩下的项都不再含 x_1. 参看本节习题 1.

(2) 如果二次型表达式中没有平方项, 可用下述办法处理.

例 2　化下述二次型为平方和:

$$q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\ .$$

解　先作线性变换

$$
\begin{cases}
x_1=z_1-z_2,\\
x_2=z_1+z_2,\\
x_3=z_3,
\end{cases}
\quad \text{即} \quad
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},
$$

把该二次型化为关于变量 (z_1,z_2,z_3) 的二次型后出现平方项

$$
\begin{aligned}
& x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\\
=\ & (z_1-z_2)(z_1+z_2)+(z_1+z_2)z_3+z_3(z_1-z_2)\\
=\ & z_1^2-z_2^2+2z_1z_3\ ,
\end{aligned}
$$

再作配方处理

$$z_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_3 = (z_1 + z_3)^2 - z_2^2 - z_3^2,$$

所以, 令 $y_1 = z_1 + z_3$, $y_2 = z_2$, $y_3 = z_3$, 矩阵形式就是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

两步线性变换合成的线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \tag{7.1.2}$$

其中

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

它把二次型 $q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ 化为平方和:

$$q = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2. \qquad \square$$

在上述二次型的变形化简过程中, 作了变量的线性变换, 最初关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数最后变成了关于 $y_1, \cdots, y_n$ 的函数, 作为 $y_1, \cdots, y_n$ 的函数时, 它才是平方和. 这种做法的合理之处在于: **变量的线性变换是可逆的**. 这使得 $x_1, \cdots, x_n$ 的取值与 $y_1, \cdots, y_n$ 的取值是一一对应的, 因此没有改变函数的本质.

上述例 1 的线性变换 (7.1.1) 是可逆的因为变换矩阵是可逆的, 即反过来 x_1, x_2, x_3 也可以表写成 y_1, y_2, y_3 的齐次线性函数.

例 2 的线性变换 (7.1.2) 也是可逆的, 同样因为其中矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的, 反过来 y_1, y_2, y_3 也可以表写成 x_1, x_2, x_3 的齐次线性函数.

可逆的线性变换使得 (x_1, x_2, x_3) 的取值与 (y_1, y_2, y_3) 的取值是一一对应的.

事实上, 只要按上述要点逐步配方, 变量的线性变换总是可逆的.

为了说明化简二次型所使用的**变量的线性变换必须是可逆的**, 举例如下.

例 3 化下述二次型为平方和:

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2. \tag{7.1.3}$$

一种误解如下.

解　作线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ y_3 = x_3 - x_1 \end{cases} \tag{7.1.4}$$

就把二次型 (7.1.3) 变成如下平方和:

$$q = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 . \tag{7.1.5}$$

评注　这个解答是错误的, 因为得到的函数 (7.1.5) 不能通过线性变换 (7.1.4) 与函数 (7.1.3) 正确联系起来. 例如, 在函数 (7.1.5) 中取 $y_1 = 1, y_2 = y_3 = 0$, 此时函数值为 1, 但是通过线性变换 (7.1.4) 却不能找到对应的 x_1, x_2, x_3 的值, 原因在于线性变换 (7.1.4) 是不可逆的, 因为它的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是不可逆的.

正确解答如下.

解　把二次型 (7.1.3) 的表达式中括号展开后再按前面叙述的要点逐步配方如下:

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \\ = & 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3 \\ = & 2x_1^2 - 2x_1(x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 - 3x_2x_3 \\ = & 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) \\ = & 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 - x_3)^2, \end{aligned}$$

作线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \\ y_2 = \qquad\quad x_2 - \quad x_3, \\ y_3 = \qquad\qquad\qquad\ \ x_3, \end{cases}$$

则 $q = 2y_1^2 + \dfrac{3}{2}y_2^2$. □

评注　虽然在上述例题中不能对所给二次型直接进行线性变换, 但是, 对二次型 $q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 却可以用变量线性变换 $y_1 = x_1 - x_2, y_2 = x_2 - x_3, y_3 = x_3 + x_1$, 化为平方和 $q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, 因

为这个变换的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是可逆的. 所以, 问题的一般表述如下.

二次型的标准形问题 对 n 元变量 $\boldsymbol{X}$ 的二次型 $q(\boldsymbol{X})$, 是否存在可逆的线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$, 这里 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ 写作列向量, 使得 $q(\boldsymbol{X})=q(\boldsymbol{PY})$ 表达为 n 元变量 $\boldsymbol{Y}$ 的平方和? 能得到的最简单平方和是什么形式?

该最简形式称为该**二次型的标准形**.

逐步配方法已经给出了此问题的第一问的肯定回答. 以下将把二次型表达为矩阵形式, 然后全部解决这个问题.

习 题 7.1

1. 某人对二次型 $q(\boldsymbol{X})=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ 如下配方:

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{X}) &= 2(x_1+x_2)^2+3x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3+8x_2x_3 \\ &= 2y_1^2+3x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3+8x_2x_3, \end{aligned}$$

他想不通为什么出现了四个变量 y_1,x_1,x_2,x_3, 比原来的多出了一个, 他不知道怎么往下做, 你能帮助他吗?

2. 求满秩的线性变换化下列二次型为平方和:

(1) $q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_1x_2-3x_2x_3$;

(2) $q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4$.

3. 求可逆线性变换化二次型 $q(\boldsymbol{X})=x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}$ 为平方和.

4. 求可逆线性变换化二次型 $(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2$ 为平方和.

5. 求可逆线性变换化下列二次型为平方和:

(1) $q(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2$;

(2) $q(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2$.

7.2 实对称矩阵

本节首先把二次型转化为矩阵形式, 再讨论对应的矩阵问题. 设

$$q(\boldsymbol{X})=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} b_{ij}x_ix_j$$

是实二次型, 其中 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$. 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } a_{ij}=\begin{cases} b_{ii}, & i=j\,, \\ b_{ij}/2, & i<j\,, \\ b_{ji}/2, & i>j\,, \end{cases}$$

则在 $i<j$ 时有 $a_{ij}=b_{ij}/2=a_{ji}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 而且, 因 $i<j$ 时有 $b_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$, 故

$$q(\boldsymbol{X})=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} b_{ij}x_ix_j=\sum_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j\,,$$

其中第 2 个 "$\sum$" 的跑动标识的跑动范围 "$1\leqslant i, j\leqslant n$" 与第 1 个 "$\sum$" 的跑动标识的跑动范围的差别就是没有了 "$i\leqslant j$" 的限定, 参看 7.1 节开头对跑动范围 "$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$" 的解释, 即 $\sum\limits_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}$ 与 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}$ 是同样的和式. 再按照矩阵运算规则就得到 (见习题 4.1 第 5 题)

$$q(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

定义 7.2.1　记号如上. 上述实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**实二次型** $q(\boldsymbol{X})$ **的矩阵**, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为该**二次型的秩**. 如果二次型的矩阵是满秩的, 则称该二次型是**满秩二次型**, 或称**非退化二次型**.

称 $q(\boldsymbol{X})=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j$ 为二次型的函数形式.

称 $q(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为二次型的矩阵形式.

二次型是平方和当且仅当它的矩阵是对角矩阵.

例 1　把二次型 $x_1^2-x_3^2+2x_1x_2+3x_2x_3+4x_3x_1$ 写成矩阵形式.

解　使用上面的记号, 那么 $n=3$, 且

$$b_{11}=1\,,\quad b_{22}=0\,,\quad b_{33}=-1\,,\quad b_{12}=2\,,\quad b_{13}=4\,,\quad b_{23}=3\,,$$

所以

$$a_{11}=1\,,\quad a_{22}=0,\quad a_{33}=-1\,,\quad a_{12}=a_{21}=\frac{1}{2}b_{12}=1\,,$$

$$a_{13}=a_{31}=\frac{1}{2}b_{13}=2\,,\quad a_{23}=a_{32}=\frac{1}{2}b_{23}=\frac{3}{2}.$$

因此

$$x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 4x_3x_1 = (x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \dfrac{3}{2} \\ 2 & \dfrac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

注 容易验证以下表达式也是正确的:

$$x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 4x_3x_1 = (x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

但右端的矩阵不是对称的, **不称为**该二次型的矩阵.

为什么要取对称矩阵作为二次型的矩阵? 因为对一个二次型 $q(\boldsymbol{X})$, 使得 $q(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是唯一的. 反过来, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是一个二次型, 即有如下结论.

结论 n 元变量的实二次型与 n 阶实对称矩阵一一对应.

另一个原因是, 对称矩阵易于处理. 以下多处将显示这一点.

用矩阵的形式, 在满秩线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 之下, 二次型变形如下:

$$q = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y},$$

其中矩阵 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 显然仍是对称矩阵 (4.3 节对称矩阵性质).

结论 一个 n 元变量 $\boldsymbol{X}$ 的二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 通过变量的满秩线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 化为 n 元变量 $\boldsymbol{Y}$ 的二次型 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}$, 其矩阵是 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

进一步思考: 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆当且仅当它是初等矩阵之积, 即 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_k$, 那么

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}} \cdots \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_k.$$

而 $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_1$ 是对 $\boldsymbol{A}$ 作了一个列初等变换同时又作了一个相应的行初等变换, 称为对称矩阵的**行列对称的初等变换**. 具体来说是下述三种变换之一:

行列对称的初等变换

(SE1) 把第 i 行的 a 倍加到第 j 行, 并把第 i 列的 a 倍加到第 j 列, $i \neq j$;

(SE2) 将第 i 行乘以非零数 c, 并将第 i 列乘以 c;

(SE3) 将第 i 行与第 j 行对换, 并将第 i 列与第 j 列对换, $i \neq j$.

有限个行列对称的初等变换的合成称为**合同变换**. 也就是说, 把对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变为对称矩阵 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 称为合同变换. 因此引入如下概念.

定义 7.2.2 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶对称矩阵. 称 $\boldsymbol{A}$ **合同**于 $\boldsymbol{B}$, 记作 $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}$, 如果存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$. 等价地, $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}$ 就是说 $\boldsymbol{A}$ 可以通过有限步行列对称的初等变换化为 $\boldsymbol{B}$.

7.1 节末的问题换为矩阵方式陈述如下.

二次型的标准形问题 (矩阵形式) 对于对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 是否存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对角形? 能得到的最简单对角形是什么? 该最简形式称为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**合同标准形**.

作为例子, 用矩阵方法重解 7.1 节例 2.

例 2 求二次型 $q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 并用合同变换化 $\boldsymbol{A}$ 为对角形.

解 该二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}$, 即

$$q=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

作行列对称的初等变换逐步化 $\boldsymbol{A}$ 为对角形, 并且, 为了记录行变换以便得到合同变换所用的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 把单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 放在 $\boldsymbol{A}$ 的右边, 在对左边方阵作行初等变换的同时也对右边方阵作了同样的行变换. 过程如下:

把第 2 行加到第 1 行,

$$\begin{pmatrix}0&1/2&1/2&1&0&0\\1/2&0&1/2&0&1&0\\1/2&1/2&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1/2&1/2&1&1&1&0\\1/2&0&1/2&0&1&0\\1/2&1/2&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

再把第 2 列加到第 1 列,

$$\begin{pmatrix}1/2&1/2&1&1&1&0\\1/2&0&1/2&0&1&0\\1/2&1/2&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1/2&1&1&1&0\\1/2&0&1/2&0&1&0\\1&1/2&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

这就完成了一个行列对称的初等变换 (这个变换的目的是使 (1,1) 位置非零).

再把第 1 行的适当倍加到第 2 行、第 3 行使左边方阵的第一列第一位置以下变为零, 同时把第 1 列的相同倍加到第 2 列、第 3 列,

$$\begin{pmatrix}1&1/2&1&1&1&0\\1/2&0&1/2&0&1&0\\1&1/2&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1/2&1&1&1&0\\0&-1/4&-1/2&-1/2&1/2&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{pmatrix},$$