高等学校教学用書

理論流体力学

第一卷 第二分册

Н. Е. 柯 欽
И. А. 基别里 著
Н. В. 罗 斯

高等教育出版社

高等学校教学用書

理論流体力学

第一卷 第二分册

Н. Е. 柯欽　И. А. 基别里　Н. В. 罗斯著
曹俊　余常昭　陈耀松　蔡树棠譯

高等教育出版社

本書系根据苏联技术与理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）1952年出版的柯欽（Н. Е. Кочин）、基别里（И. А. Кибель）、罗斯（Н. В. Розе）合著“理論流体力学”（Теоретическая Гидромеханика）修正第四版譯出。原書經苏联高等教育部审定为綜合性大学教科書。

原書共二卷，譯本每卷分兩册出版，此册为第一卷第二分册，包括理想流体中物体的运动，理想流体中的波动等部份。

本書內容包含很广，可以作为航空、气象、水利等方面的高年級学生，教师及这些方面的科学工作人員的参考書。

本書由曹俊、余常昭、陈耀松、蔡树棠四位同志合譯而成。譯者老师周培源教授曾校閱过本書部份譯稿。

理 論 流 体 力 学

第一卷 第二分册

Н. Е. 柯欽，И. А. 基别里，Н. В. 罗斯著

曹 俊 余常昭 陈耀松 蔡树棠譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇号
（北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号）
京华印書局印刷 新华書店总經售

書号 13010·217 開本 850×1168 1/32 印張 10 5/16 字數 261,000
一九五六年十二月北京第一版
一九五六年十二月北京第一次印刷
印數 0001—8,000 定價（8）¥ 1.20

第二分册目录

第六章　理想流体中物体运动的平面問題

§1. 引言　我們假設流体所占的空間在各方向都是無限大的，而在無穷远处的流体是静止的，試研究固体在这种流体中的运动。运动着的固体引起了物体周圍的流体質点的运动，并且質点之間有相互的作用。那么可以立刻拟出兩个关于固体在流体中运动問題的一般提法。

a）物体的运动是預先知道的，要求确定由物体运动所引起的圍繞物体周圍的流体介質的运动狀态，同时还要确定物体和流体之間的相互作用力。知道了这些力以后，就不难确定要使此物体实現所考虑的已知运动所必須作用在物体上的外力。

б）預先給定作用在物体上的外力，要求确定此物体的运动和流体的运动狀态，以及物体与流体之間的相互作用力。

在問題的兩个提法中，都假設了物体的表面形狀是已知的。因此在所提出的兩种問題中，我們可以將問題分为彼此密切相关的兩方面：运动学方面和动力学方面。

这里我們將只研究理想流体中的运动，并且必須預先指出，对于理想流体中所得到的許多結果，与实际情况有非常大的差别。

这种差别特别是表現在物体在流体中运动时所遭遇的阻力的計算上。問題在于任何实际流体質点之間作用的內摩擦力或粘滯力將在紧鄰物体表面的薄層中極其强烈地表現出来。即使有很小的粘滯性存在，也可以显著的改变速度場，因此也就改变了与速度場有关的圍繞物体的流体动压力場。

在預先知道固体运动的各种类型中，物体在流体中作直綫勻速平

移运动的情形在以后將有特殊的作用。如果以固定在物体上的軸为参考来研究流体的运动，显然，由物体所引起的流体的运动狀态是定常的。为了計算流体动压力場，我們可以根据經典力学中的加利略的相对性原理，取上述固定在物体上的軸作为基本的固定軸。換句話說，設流体在無穷远处是靜止的，我們可以將物体在这种流体中作匀匀直綫平移运动的問題，归結为一种流体对不动物体的定常繞流問題，那种流体在無穷远处的質点的速度在大小和方向上处处都是相同的。

在本章中，我們將研究算是比較簡單的平面流动的情形，在这情況下，移动的物体是無限長的柱形物体，它的母綫是垂直于流动平面。对于流体动压力、它的力矩、动能等所有的动力学的計算，我們都假設作兩个平面平行于流动平面，以切出高度为一單位的一層，这样来进行与这層有关的計算。同时，我們仅限于研究不可压縮流体的無旋运动；可压縮流体的情形，將在本教程的第二卷中研究。

研究不可压縮流体的平面問題时，我們首先注意，当流体繞着不动物体流动或当物体在靜止流体中运动时，怎样建立流动的运动学的圖形。这种运动学的圖形的建立，可归結为找出复势，也就是归結为选擇流动的奇点（即渦点和源点）怎样分布在整个流动平面上，使得流动在物体不存在时也会給予与物体在流动中相同的运动学的流动圖形。構成运动学的流动圖形以后，我們对于定常运动，可以应用伯努利积分，而对于不定常运动可以应用科犀（拉格蘭基）积分以計算被流体繞流的物体上的压力。

§2. 边界条件·狄里赫利与涅曼問題 找出确定的不可压縮流体的平面無旋运动的复势

$$w(z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y)$$

可以归結为找出一个流函数 ψ，因为势 φ 和 ψ 是以科犀-黎曼条件联系的，这样就能够由已知函数 ψ 的积分的形式确定出 φ。假設流函数 ψ 在不可压縮流体的流动的所有各点上都是連續的，此函数并在这些点

上适合拉普拉斯方程式 $\Delta\psi=0$，而在边界上滿足某些已知的条件，这些条件的形式是随平面流动的实际情况而变化的。

我們并不給出各种边界条件的全部分类，我們只指出最簡單的情形。

如果研究在無穷远处静止的無限的流体中由柱形物体运动所引起的平面流动，則流函数 ψ 的边界条件显然將是：а）在無穷远点为

$$a)\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \qquad (2.1)$$

因为在这些点上的速度必須为零。

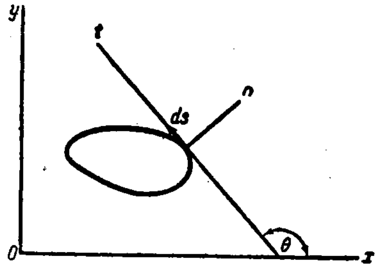

圖 88.

б）在运动物体的周綫上每点的法綫分速度 u_n 必須与紧鄰的液体質点的法綫分速度 v_n 相合（圖 88），注意到

$$v_n=v_x\cos(\widehat{n,x})+v_y\cos(\widehat{n,y})=v_x\sin\theta-v_y\cos\theta=$$
$$=v_x\frac{dy}{ds}-v_y\frac{dx}{ds}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}=\frac{d\psi}{ds}, \qquad (2.2)$$

式中，θ 是流綫元素 ds 和軸 Ox 之間的夾角，我們就可以將所考慮的条件以下列关系式来表示

$$\frac{d\psi}{ds}=u_n=u_x\sin\theta-u_y\cos\theta. \qquad (2.3)$$

如果同时在流体中有其他的不动物体，則显然在它們的周綫上紧鄰的流体質点的法綫分速度必須等于零，換句話說，不动的周綫必須与流綫（一根或几根）相切。在这种情况下我們必須把不动周綫的点上的边界条件

$$\text{в)}\qquad \frac{d\psi}{ds}=0;\ \psi=\text{常数} \qquad (2.4)$$

与前面的条件联立。

如果物体沿 Ox 軸方向，以速度 U 作平移运动，则条件(2.3)取下列形式

$$\frac{d\psi}{ds}=U\sin\theta=U\frac{dy}{ds},$$

当 $U=$常数时，沿周綫积分以后，对于周綫上所有各点就有

$$\psi=Uy+c. \tag{2.5}$$

如果柱形物体作任意运动，则

$$u_x=U-\omega y;\quad u_y=V+\omega x,$$

式中 U 和 V 是固定在物体上的一点 O 在 Ox 軸和 Oy 軸上的速度分量，而 ω 是物体轉动的角速度，因此

$$\frac{d\psi}{ds}=(U-\omega y)\frac{dy}{ds}-(V+\omega x)\frac{dx}{ds},$$

于是在物体的周綫上有

$$\psi=Uy-Vx-\frac{1}{2}\omega(x^2+y^2)+c. \tag{2.6}$$

假設平移流动在無穷远点的速度等于 U，其方向沿 Ox 軸，如果这流动繞流过固定物体，则在無穷远点的边界条件，显然將是

$$\psi=Uy+c, \tag{2.7}$$

并且对于周綫的各点將是

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=0,\quad \psi=\text{常数}。 \tag{2.8}$$

我們將指出，虽然我們所指出的边界条件，主要应用在研究定常运动上，但是对于不定常势流，它們仍然是有效的。在这种情况下，只要在前述公式中引进时間 t，作为参变数，而 U, V, ω, c 都与时間有关。

在某一区域 D 中确定函数 ψ 满足拉普拉斯方程式，并在区域 D 的周綫上取已知值，此問題称为狄里赫利問題。因此我們看出，确定由包圍流动区域的周綫的运动所引起的不可压縮流体的平面無旋运动，可以归結为解某个狄里赫利問題。

在解我們的流体动力学問題时，也可以首先找出速度势 φ。在流

动区域中，它也是必須滿足拉普拉斯方程式 $\Delta\varphi=0$ 的。但是函数 φ 在周綫上的边界条件將取另外的形式。按照速度势的定义，紧接着周綫的流体質点的法綫分速度 v_n 將是

$$v_n=\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

因此函数 φ 的边界条件也就取下列形式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=u_n, \tag{2.9}$$

式中 u_n 是周綫上的点的法綫分速度。特别是在不动的边界的点上我們得到条件

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0. \tag{2.10}$$

在某一区域 D 中确定函数 φ 滿足拉普拉斯方程式，在区域 D 的周綫上函数的法綫方向导数取已知值，此問題称为涅曼問題。因此我們的流体力学問題，可以归結为解某个涅曼問題。

由函数 φ 可以确定函数 ψ，反之亦眞。因此很清楚，涅曼問題可以化为狄里赫利問題，反之亦眞。事实上，記着科厙-黎曼条件，并在这时按照圖 88 取法綫方向为 Ox 軸的方向，而切綫方向为 Oy 軸的方向后，我們立刻得到关系式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial s},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\frac{\partial\psi}{\partial n}.$$

在周綫上給出函数 ψ，立刻就可以給我們定出速度势的法綫方向导数

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial s}$$

也就可以使狄里赫利問題轉变为涅曼問題。相反地，有了涅曼問題，就是在周綫上已知 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 的値，那么在作为流动区域边界的任何周綫上，很容易得到

$$\psi=\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds+\text{常数}。$$

因此也就轉到狄里赫利問題。

在以 k 个周綫为边界的多連通区域的情形中，上述公式內对每个周綫將出現它自己的任意常数；但是这些任意常数中有一个値是可以任意挑选的，因为运动是由函数 ψ 的导数所确定的。因此出現了 $k-1$ 个任意常数。为了确定这些常数就必需給出沿 $k-1$ 个互不相連結的周綫的速度环量。这完全和第一章 § 18 末第一点所指出的相符合的，就是仅在所有的速度环量給定的条件下，才能完全由周綫上已知値 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 确定無旋运动。

我們將研究封閉在椭圓柱內的不可压縮流体的無旋运动，作为最簡單的例子。令椭圓方程式为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.11}$$

令它的运动是以其中心在坐标軸上的速度分量 U 和 V 及旋轉角速度 ω 来表征。那么流函数 ψ 在椭圓(2.11)內必需滿足方程式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \tag{2.12}$$

在此椭圓上适合边界条件

$$\psi=Uy-Vx-\frac{\omega}{2}(x^2+y^2)+\text{常数}。 \tag{2.13}$$

我們將用二次多項式的形式来找函数 ψ

$$\psi=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F.$$

从方程式(2.12)得到关系式

$$A+C=0.$$

从条件(2.13)我們得到方程式

$$A(x^2-y^2)+Bxy+Dx+Ey-Uy+Vx+\frac{\omega}{2}(x^2+y^2)=\text{常数}$$

必須是由(2.11)得来。从这里得出关系式

$$\left(A+\frac{\omega}{2}\right)a^2=\left(-A+\frac{\omega}{2}\right)b^2,\quad A=-\frac{\omega}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

$$B=0,\quad D=-V,\quad E=U.$$

因此所求的流动由下列函数决定

$$\psi=\frac{\omega}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(y^2-x^2)+Uy-Vx. \tag{2.14}$$

我們找出速度分量的数値

$$\begin{aligned} v_x&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\omega\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y+U;\\ v_y&=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\omega\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x+V, \end{aligned} \tag{2.15}$$

从这里我們不难得到

$$\varphi=Ux+Vy+\omega\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy. \tag{2.16}$$

在圓柱作純平移运动的最簡單的情况下，即当 $\omega=0$ 时，我們得到

$$\varphi=Ux+Vy;\quad v_x=U;\quad v_y=V, \tag{2.17}$$

也就是流体和圓柱作为整体而运动。

在純轉动的情况下，即当 $U=V=0$ 时，有

$$\psi=\frac{\omega}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(y^2-x^2) \tag{2.18}$$

絕对运动的流綫是双曲綫。

我們要着重指出，我們所得确定流体絕对运动的公式是确定流体相对于运动坐标軸 Oxy 的。如果我們从絕对速度分量(2.15)中减去轉移速度分量

$$v_{ex}=U-\omega y;\quad v_{ey}=V+\omega x;$$

就可决定相对于运动坐标軸的流体的运动；最后我們就得到相对速度的分量

$$v_{rx}=\frac{2\omega a^2y}{a^2+b^2};\qquad v_{ry}=\frac{-2\omega b^2x}{a^2+b^2}. \tag{2.19}$$

將此方程式

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\omega a^2}{a^2+b^2}y;\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{2\omega b^2}{a^2+b^2}x$$

积分可以得到相对运动的迹綫，是与边界相似的橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\text{常数。}$$

相对运动已不再是無旋运动。

§3. **圓柱运动** 平面問題的最簡單的情况之一是在無限流体中的圓柱运动的問題。

取平面 Oxy 垂直于柱体的母綫，并將坐标原点放在平面 Oxy 和圓柱面相交所得的圓 C 的中心上。令圓的半徑等于 a。显然我們来到求由此圓的运动所引起的圓 C 外的無旋运动的平面問題。令圓作平移运动，在坐标軸上的速度分量以 U 和 V 表示。那么作为 z 的解析函数的复势

$$w=\varphi+i\psi$$

的虛数部分在圓上必須滿足前段曾經提出的条件

$$\psi=Uy-Vx+\text{常数。}\tag{3.1}$$

速度分量 v_x 和 v_y 是 x 和 y 的單值函数，并且当 P 点趋于無穷远时，它們趋于零，因为按假設流体在無穷远是靜止的。因此复速度

$$\frac{dw}{dz}=v_x-iv_y$$

在圓 C 外是 z 的單值解析函数，在無穷远点变为零。当此函数以罗朗級数形式展开时：

$$\frac{dw}{dz}=\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z^2}+\frac{C_3}{z^3}+\cdots\tag{3.2}$$

积分此等式并略去不重要的附加常数，我們就得到

$$w=C_1\ln z-\frac{C_2}{z}-\frac{C_3}{2z^2}+\cdots\tag{3.3}$$

为了决定系数 C_k 必需分出虛数部分 ψ，并使它在圓 C 上的数值和表示式(3.1)的数值相等。

我們引用極坐标 r 和 θ。設

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=re^{i\theta}$$

并令

$$C_k=A_k+iB_k,$$

于是就从(3.3)不难得到

$$\varphi=A_1\ln r-B_1\theta-\frac{A_2\cos\theta+B_2\sin\theta}{r}-\frac{A_3\cos 2\theta+B_3\sin 2\theta}{2r^2}-\cdots$$

$$\psi=A_1\theta+B_1\ln r+\frac{A_2\sin\theta-B_2\cos\theta}{r}+\frac{A_3\sin 2\theta-B_3\cos 2\theta}{2r^2}+\cdots.$$

在最后公式中令 $r=a$, 并使所得的表示式与由(3.1)所給出的 ψ 値相等:

$$\psi=Ua\sin\theta-Va\cos\theta+\text{常数},$$

就得到結論

$$A_1=0,\quad A_2=Ua^2,\quad B_2=Va^2,\quad A_3=B_3=0,\quad A_4=B_4=0,\cdots$$

再設

$$B_1=-\frac{\Gamma}{2\pi},$$

我們就得到所研究的問題的普遍解成下列形式

$$w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z-(U+iV)\frac{a^2}{z},\tag{3.4}$$

$$\varphi=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta-(U\cos\theta+V\sin\theta)\frac{a^2}{r},\tag{3.5}$$

$$\psi=\frac{-\Gamma}{2\pi}\ln r+(U\sin\theta-V\cos\theta)\frac{a^2}{r}.\tag{3.6}$$

在最簡單的情况下 $\Gamma=0, V=0$, 我們得到

$$w=-\frac{Ua^2}{z},\tag{3.7}$$

而在圓柱中心放置矩为 $M=2\pi Ua^2$ 并且軸指向 Ox 軸正方向的偶極子(第四章 §18 圖 54)所产生的流动的复势正好就是这样的。在这兩种

情况下流綫將是一样的，并且我們得到由圖 89 上所表示的流动圖形。

复势

$$w = -\frac{(U+iV)a^2}{z} \tag{3.8}$$

正对应于在原点的偶極子，其矩的方向和圓柱运动的速度方向一致。

复势

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z \tag{3.9}$$

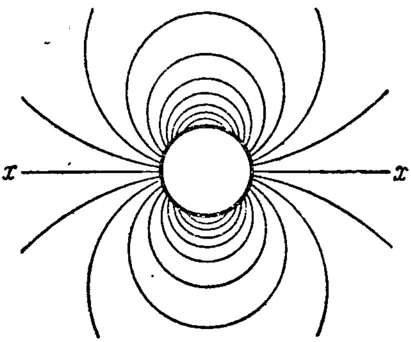

圖 89.

确定位于坐标原点强度为 Γ 的旋渦。于是我們所研究的由圓柱运动所得到的流动，可以在圓柱中心放置一个任意强度的渦点与在同一点上的一个偶極子叠加而得到，此偶極子具有方向与圓柱速度方向一致，矩为 $2\pi qa^2$，这里 q 是圓柱的速度。

从已得到的解答中，不难得出另一問題的解，也就是在無穷远处速度的数値和方向为已知的流体繞不动圓柱流动的問題的解。我們用

$$v_\infty = U + iV \tag{3.10}$$

表示此速度，在坐标軸上的分速度为 U 和 V 的平移流动具有复速度。

$$\frac{dw}{dz} = U - iV = \bar{v}_\infty,$$

所以复势为

$$w = (U - iV)z = \bar{v}_\infty z. \tag{3.11}$$

如果圓以速度

$$-v_\infty = -U - iV$$

作平移运动并且在無穷远处的流体是靜止的，則在圓外所得到的流动，按以前所述由下列复势确定

$$w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z+(U+iV)\frac{a^2}{z}. \tag{3.12}$$

將此复势与复势(3.11)相加，就得到

$$w=(U-iV)z+(U+iV)\frac{a^2}{z}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z. \tag{3.13}$$

显然，所得到的流动在無穷远处的速度分量为 U 和 V。显然，同样也滿足在圓 C 上的繞流条件，因为(3.11)和(3.12)所表示的流动，在此圓上給出了相互抵消的法綫方向的速度分量。利用表示式(3.10)我們还可以將表示式(3.13)写成下列形式

$$w=\bar{v}_{\infty}z+\frac{a^2 v_{\infty}}{z}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z. \tag{3.14}$$

如果在無穷远流动的速度是沿 Ox 軸的方向，并且速度环量 Γ 为零，则就得到

$$w=U\left(z+\frac{a^2}{z}\right). \tag{3.15}$$

因此，最后这个表示式确定平移流动繞圓柱的無环量的流动。

再利用極坐标 r,θ，对于后面这种情况不难得到

$$\begin{aligned}\varphi&=U\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta=Ux\left(1+\frac{a}{x^2+y^2}\right);\\ \psi&=U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta=Uy\left(1-\frac{a}{x^2+y^2}\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

从最后这个表示式，首先可以看出，$r=a$ 的圓周 C 上是流綫 $\psi=0$，其余的流綫是三次曲綫(圖 90)：

$$\left(1-\frac{a^2}{x^2+y^2}\right)y=\text{常数}。$$

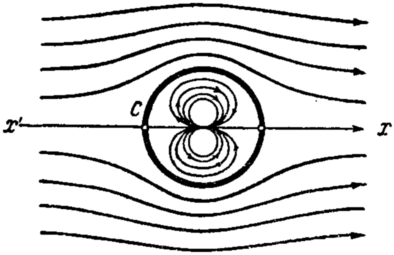

圖 90.

在圓周 C 上

$$\varphi=2aU\cos\theta \tag{3.17}$$

所以我們得到沿圓周 C 的切綫方向的速度的数値

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-2U\sin\theta. \tag{3.18}$$

因此在周綫 C 的点上的速度的数値为 $2U|\sin\theta|$。在与無穷远处速度方向垂直的直徑的端点上达到它的最大値 $2U$。在圓周 C 上对称于 Ox 軸的以及对称于 Oy 軸的各点上的速度具有相同的数値。因为在無質量力时(如無特别預先声明,我們將經常这样假定),对于不可压縮流体的定常無旋运动的压力 P 由伯努利积分来确定

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=C. \tag{3.19}$$

因此显然，在圓周 C 上与 Ox 軸对称的点以及与 Oy 軸对称的点上的压力將相等。这样,显然,作用在圓周 C 的元素上的压力是相互平衡的。

因此在連續繞流的假設下，理想流体的無环量的平移流动在圓柱上并不發生任何总压力。

在純环行的定常流动中

$$w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z,$$

所有的流体質点沿同心圓运动,并且每一質点都以速度

$$v=\frac{|\Gamma|}{2\pi r}$$

作均匀运动。

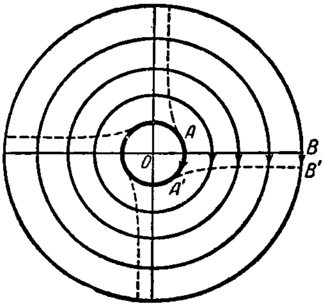

圖 91.

在某一开始时刻位于半徑 AB 上的質点,經过某时間后分布于曲綫 $A'B'$ 上(圖 91),其方程为

$$r^2\theta=\text{常数}。$$

显然,当繞流圓柱时,純环行流动并不發生任何总压力。

如果在繞流不动的柱体的平移流动上,叠加一个純环行流动,則最