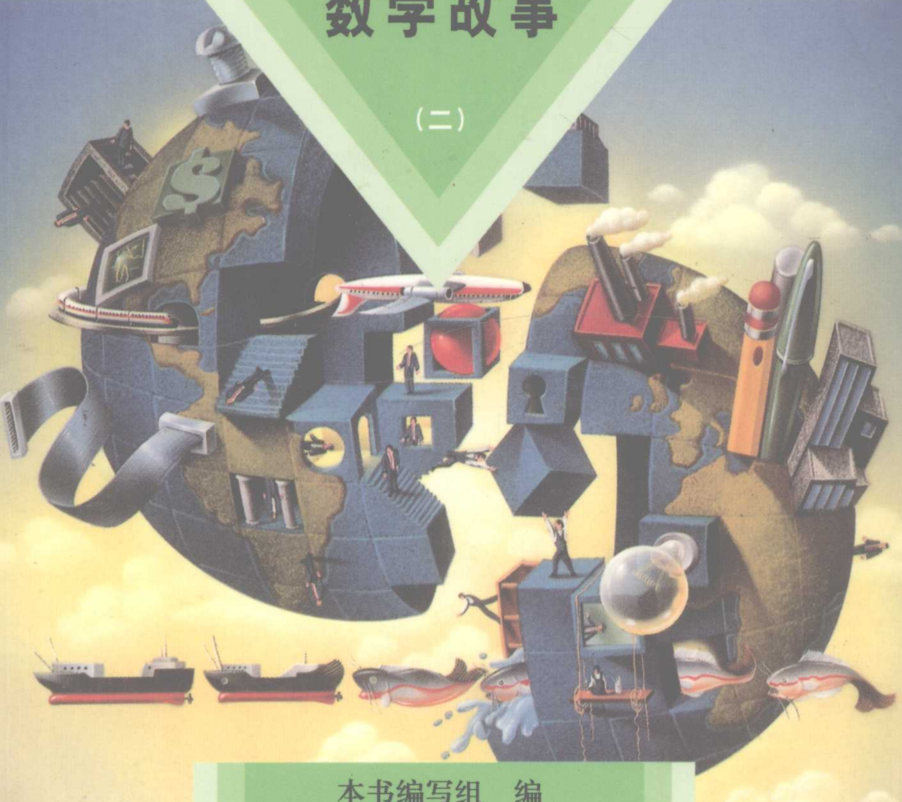
SHIJIE JINGDIAN KEXUE GUSHI

世界经典科学故事 ⑭

数学故事

（二）



本书编写组 编

中国和平出版社

数学故事

（二）

本书编写组　编

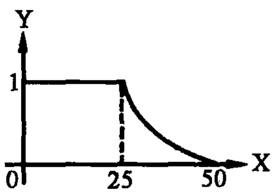
中国和平出版社

模糊数学

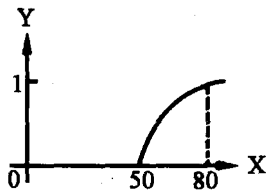
在日常生活中，我们碰到的概念也只有两类。一类是清晰的概念，对象是否属于这个概念是明确的。比如：人、自然数、正方形等等。要么是人，要么不是人；要么是自然数；要么不是自然数；要么是正方形，要么不是正方形。另一类概念对象从属的界限是模糊的，随判断人的思维而定。比如：美不美？早不早？便宜不便宜？等等。西施是我国古代公认的美女，有道是"情人眼里出西施"，这就是说，在一些人看来未必那么美的人，在另一些人眼里，却美得能够与西施相比拟。可见，"美"与"不美"并不存在一个精确的界限的。再说"早"与"不早"，清晨五点，对于为都市"梳妆打扮"的清洁工人来说也许是迟了，但对大多数小学生来说，却是很早的。至于便宜不便宜，那更是随人的感觉而异了！在客观世界中，诸如上述的模糊概念要比清晰概念多得多。对于此类模糊现象，过去早已有的数学模型难以适用，需要形成新的理论和方法，就是在数学和模糊现象之间架起一座桥梁。它，就是我们要讲的"模糊数学"。

计算机科学的迅速发展是加速这座桥梁架设的。人人皆知，人的大脑具有非凡的判别能力和处理模糊事件的能力。就拿一个孩子识别自己的母亲为例，即使这位母亲换了新衣，变换了发式，她的孩子依然能从高矮、胖瘦、音容、姿态等快速

地作出准确判断。假如这件事让计算机来干,那就非得把这位母亲的身高、体重、行走速度、外形曲线等等,全都计算到小数点后的十几位,然后才能判断。如此的"精确"实在是事与愿违,于是走到了事物的反面。也许就因为这位母亲脸上一时长了一个小疖,使该部位的平均高度,比原来高了零点零几毫米,从而使计算机作出"拒绝接受"的判断呢?难怪模糊数学的创始人,美国加利福尼亚大学教授、自控专家扎德(L.A.Za - deh)说:"所面对的系统越复杂,人们对它进行有意义的精确化能力就越低。"他生动地讲了一个停车问题的例子,他说:如果要把汽车停在拥挤停车场的已有两辆汽车之间的空地上,这对有经验的司机来说,并非什么难事。但若用精确的方法求解,即使是一台大型电子计算机也不够用。



(年轻人)



(年老人)

下面我们再看"年轻"和"年老"这两个模糊概念。扎德教授根据统计资料,拟合了这两个概念的隶属函数图像。图中横坐标表示年龄,纵坐标表示隶属程度,例如,从坐标图可以看出,50 岁以下的人不属于"年老",而当年龄超过 50 岁时,随着岁数的增大,"年老"的隶属程度也随之增大,"人生七十古来稀",70 岁的人"年老"的隶属程度已达 94%,同样,在坐标图中我们可以看到,25 岁以下的人,"年轻"的隶属程度为

100%,超过 25 岁,“年轻”的隶属程度越来越小。40 岁已是“人到中年”,“年轻”的隶属程度仅有 10%。

如果有人问你:“你的数学老师年轻吗?”而你的回答却是:“他的年轻隶属程度为 25%”。这样的答案自然不会有错,但显然很别扭。为了给人一种确切的印象,我们可以固定一个百分数,例如 40%,隶属程度大于或等于 40% 的都属于“年轻”,反之就不属于“年轻”。在这种前提下,你对你朋友的回答也就肯定了,你可以确切地告诉你的朋友,你的数学老师不年轻。因为这时“年轻”一词,已从模糊概念转变为明确的概念。当然,作为隶属程度分界线的固定百分数,应当经过科学的分析,或者经过民意测验的统计来选取。

再以中国古代史的分期为例,“奴隶社会”是个模糊概念。

[奴隶社会] = 1/夏 + 1/商 + 0.9/西周 + 0.7/春秋 + 0.5/战国 + 0.4/秦 + 0.3/西汉 + 0.1/东汉

以 0.5 的隶属程度作为奴隶社会的划分界限,那么属于奴隶社会的,就该是夏、商、西周、春秋和战国。秦、汉则不属于奴隶社会。

在精确数学中,“不”、“很”、“非常”等词都很难将其用数量加以表述。但在模糊数学中,就可以让它们赋于定量化。例如,“很”表示隶属程度的平方,“不”则表示用 1 减去原隶属度等等。例如 30 岁属于“年轻”的隶属程度为 0.5,那么属“很年轻”的隶属程度就只有 $(0.5)^2 = 0.25$,而“不很年轻”的隶属程度则为 $1-(0.5)^2 = 0.75$。

可见在对事物的模糊性进行定量刻划的时候,我们同样需要用到概率统计的手段和精密数学的方法。由此可知,“模糊数学”实际上并不模糊。

模糊数学的诞生，把数学的应用领域从清晰现象扩展到模糊现象，从而使数学进入了很多过去难于达到的“禁区”。用模糊数学的模型来编制程序，让计算机模拟人脑的思维活动，在火箭的发射，气象的预测，疾病的诊断，文字的识别等方面已经获得成功，有着十分诱人的前景。

我国研究模糊数学虽然只有短短十几年，但几十年来，这门新兴的学科发展迅速，表现出了强大的生命力。目前，该学科在工业、农业和国防技术的应用方面，已经吐露锋芒！

齐王赛马

我国劳动人民对于对策的认识有着悠久的历史。如《橘中秘》、《梅花谱》、《韬略元机》等象棋古谱,实际上是对象棋比赛对策的极深入的研究。战国时期“齐王赛马”的故事,就是一个非常精彩的对策例子。

齐王与大将田忌商议赛马,双方约定:各自出上、中、下三种等级的马各一匹。每轮进行三场对抗赛。输者每输一场要付给胜者黄金 1000 两。由于田忌的马稍逊于齐王同等级的马,而在头一轮的比赛中,双方都要用同等级的马进行比赛,因此齐王很快赢了全部三场,得到了 3000 两黄金。

鉴于第一次赛马的惨败,所以当齐王满面春风地再次邀请田忌赛马时,田忌感到很为难。一方面君王的旨意不好违背,另一方面自己对胜负已定的比赛失去了信心。田忌的军师孙膑是位颇有才能的军事家,他得知后,于是给田忌出了一个主意:用自己的下等马对国王的上等马比赛,而用自己的上等马和国王的中等马,中等马和国王的下等马比赛。比赛开始,第一场国王的马以极大的优势战胜了田忌。齐王没有料到田忌的马竟然如此不堪一击,为此仰天大笑,得意不已。但好景不长,在二、三场中田忌的马都取得了胜利。这一轮国王不但没赢,反而输了 1000 金。可笑的是,齐王输了钱还不明白自己是怎样输的呢!

其实,齐王出马的对策有六种:(上、中、下)、(上、下、中)、(中、上、下)、(中、下、上)、(下、上、中)、(下、中、上)。括号中写的是出马的等级和顺序。田忌的对策也有六种。如此搭配起来便有 36 种对赛的格局。其中齐王赢三千金的格局有 6 种,赢一千金的格局有 24 种,只有 6 种才反输一千金。因此,从总体来看,田忌输的概率为六分之五。赢的概率只有六分之一。

既然田忌赢的可能性是很小的,那么孙膑是靠什么来取胜的呢? 关键在于孙膑摸准了齐王的对策。他想到齐王由于上一次的大获全胜,这一次是不会轻易改变这种对策的。这就使得孙膑在对局前便掌握了主动权,有的放矢地制定了“退一步,进两步”的策略。

齐王失败的关键是自己的策略被对方洞悉。然而,在一般的竞争中,相对的双方都是在互不知对方策略的情况下各自选择自己的最优对策。下面是第二次世界大战期间一个著名的对策战例。

1943 年 2 月,美军获悉:日本舰队集结南太平洋的新大不列颠岛,准备越过俾斯麦海开向伊里安岛。美西南太平洋空军司令肯尼,奉命阻截轰炸日本舰队,从新大不列颠岛去伊里安岛的南北有两条航线,航程约为三天。未来三天北路气候阴雨连绵,南路晴朗。美军在拦截前务必要派侦察机侦察,待发现日舰航线后,再出动大批轰炸机进行轰炸。

对美军来说,全部可能的方案如下:

(N,N)方案:集中侦察北路,派少量侦察机侦察南路,日舰也走北路。虽然天气不好,但可望一天之内发现日舰,有两天时间轰炸;

(N,S)方案:集中侦察北路,派少量侦察机侦察南路,日舰走南路。因南路天气晴朗,少量侦察飞机用一天也能发现日舰,轰炸时间也仅有两天;

(S,N)方案:集中侦察南路,派少量侦察机侦察北路,日舰走北路。少量的飞机在阴雨的北路侦察,发现目标需要两天,轰炸时间仅有一天;

(S,S)方案:集中侦察南路,派少量侦察机侦察北路,日舰走南路。能立即发现日舰,这样便有三天的轰炸时间。

以上各方案,美军赢得的轰炸时间简化如下表:

日 美	NS
N S	$\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$

对于美军来说,最理想的方案是(S,S),因为它能赢得三天的轰炸时间。但由于日方对策预先并不知道,假如冒然集中力量侦察南路,也许会落得最差的(S,N)结果。同样,日方在考虑对策的时候,既要看到自己最佳的方案(S,N),也不能不估计到对自己最不利的方案(S,S)。因此,对于日舰来说,走南路颇为冒险。美军司令肯尼迪将军经常认真研究,毅然决定把重点放在北路。结果这场载入史册的俾斯麦海海战,最终以美军获胜告终。

为叙述方便,我们把美方赢得轰炸的时间表,略去策略部分,只留有矩形的数字阵,简称赢得矩阵。

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$$

如上所示，给出赢得矩阵的对策，叫做矩阵对策。“齐王赛马”是一种矩阵对策。妇孺皆知“锤子，剪刀，布”的游戏，也是一种矩阵对策。如果规定：胜者得1分，负者得-1分，平局得0分，而且双方的策略全部按锤子，剪刀，布的次序。那么简化后其中一方的赢得矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

有趣的智力问题

有一个经过推敲别人的心理状态，而得出自我判断的绝妙事例。问题是这样的：甲、乙、丙三个人在一起午睡。一个好事者在他们的前额上都涂上了黑记。醒后，三人相视大笑。因为每人都看到两个朋友的前额被涂黑了。突然其中更为机灵的某甲停止了笑，急忙用水洗自己的额头。问某甲是怎样断定自己的额头也被涂黑的？

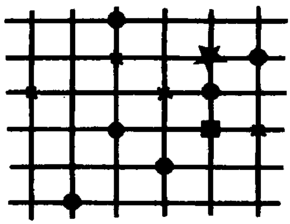
原来，某甲心里想：我看到乙、丙两人的额头都被涂黑，因此发笑。假如我的额头是干净的，那么乙就会只因丙的额被涂黑而笑了！假如我的这种推想是成立的，乙也许就会警觉到自己的额也被涂黑了，因为否则丙看到的两个人的额都是干净的，有什么可值得笑呢？然而事实是，丙在笑，乙也在笑。因此甲断定自己的额一定也被涂黑了。

在对策中，各方的心理状态都是这样的：从最好的结果入手，考虑最坏的可能。

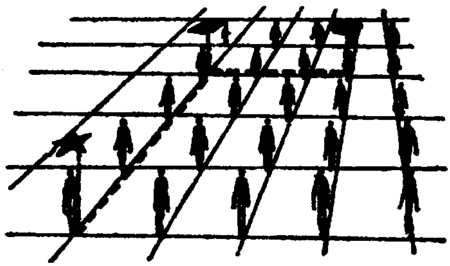
依据上述的指导思想，甲方应在自己的每一个策略中，首先注意那些对自己最不利的赢得。因为必须预测到对方会选取使自己处于最不利地位的策略。不能去走一步险棋，以致于“一着失算，全盘皆输”。但甲方如若能从各个策略的最小赢得中间，去寻找最有利的策略。即从各策略的极小赢得中，去找寻极大的一个，这不仅是明智的，而且能够立于不败之

地。相同的道理,乙方必须从自己的策略会造成对方较大的赢得入手,而从各个极大中去寻找使自己损失最小的方法,即从各方法的对方极大赢得中,去寻找极小的一个。

在继续探讨之前,我们先考虑一个有趣的智力问题:有 m×n个人,排成 m 行、n 列的人阵。今从每行中找出本行最矮的人(右图中⊙表示),再在各行最矮的人中选出最高者(图中用●表示),把这人叫做“矮高”。这时再从每列中找出该列最高的人(图中用*表示,),而从各列最高的人中选出最矮者(图中用★表示),把这人称为“高矮”。现在问:是“高矮”高呢? 还是“矮高”高?



答案是一定的:“高矮”绝不低于“矮高”。



实际上,如果“★”与“●”重合,则“高矮”同“矮高”是同一个人,当然一样高。如果“★”与“●”在同一行或同一列。那么依据他们各自的规定,“矮高”是不会高于“高矮”的。最后,如若像上图那样“★”和“●”在不同的行和列,那么我们取“●”所在行和“★”所在列的交会处为“■”根据规定,同在一行的“●”和“■”,前者不可能比后者高;又在同一列的“■”和“★”,前者也不会比后者高。因此“●”肯定不会高于“★”。即三种情况都有“矮高”不高于“高矮”。尤其当“矮高”与“高矮”同样高时,“★”、“■”和

“●”三者的高度肯定是相等的。

现在回到前面的对策问题上来，如果一个二人对策，甲方的赢得矩阵是：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

这就像上面说的 m×n 人阵一样，对甲方来说，要找的是各行最小赢得中的极大，就是找“矮高”——“●”；而对乙方来说，则需要找各列对方最大赢得中的极小，就是找“高矮”——“★”。如果在矩阵中，“●”与“★”一样大，那么甲乙双方都会一致选择相应于“■”的策略，因为这是在不知对方将采用什么策略的情况下，对双方来说都是最保险和最有利的，这时相应于“■”的策略，叫做对策的最优策略。

诚然，在通常情况下“矮高”是低于“高矮”的，这时最优纯策略不存在。“齐王赛马”是一种没有最优纯策略的对策。“锤子、剪刀、布”的游戏，也是一种没有最优纯策略的对策。游戏中的“高矮”是 1，而“矮高”是 -1，两者明显是不相等的。因此这种游戏的胜负，只能靠随机性而定了。

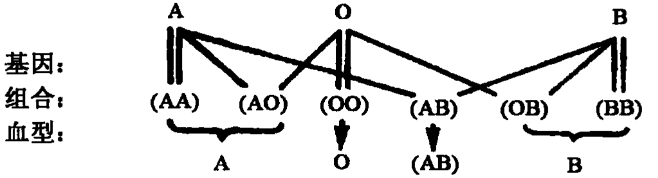
对电视剧《血疑》中的疑问

日本电视连续剧《血疑》,是围绕着血型的问题而展开的。剧中的四个主要人物,相良、理惠、幸子和光夫的血型都为AB、RH阴性。他们之间的血缘关系是:幸子是相良与理惠所生,光夫是相良与多加子所生。多加子的血型在剧中虽说没有说明,但从科学角度上去分析,也不应该是任意的。

《血疑》的故事情节,当然是虚构的,本文就是要想从科学的角度去研究一下《血疑》中的血型构造,究竟有多大的现实可能性。

1900年美籍奥地利生物学家朗德斯特纳(Land—steiner)发现了血球的凝结现象。此后,学者们又不断发现了人类的血液能够按照凝结与否而分为若干大类,并称它为血型。1924年,波斯汀(Bernstein)提出了“三复等位基因”的学说。这一著名学说的关键是:人类的血型受体细胞第七对染色体中的A基因、B基因和O基因控制。在一个位点上,A、B、O三种基因必居其一。这样,在受精过程中,两条染色体相结合,能够体现出六种基因的基本组合,OO,OA,OB,AA,AB,BB。因为A、B基因属于显性,O基因属于隐性,所以A、B能表现出来,O却不能表现出来。因此,上述六种基因组合中,OA与AA均表现为A型,OB与BB均表现为B型加上O型(OO)与AB型,一共有四种表现型:

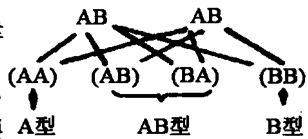
据有关资料统计,地球上差异人种中的血型分布有很大的不同。以黄色人种为例,血型为A的占28%,血型为B的占29%,AB的占8%,O型占35%。血型中Rh阴性者占1%。



因为《血疑》的故事是发生在黄种人的日本,所以在人口中出现AB、Rh阴性的概率为:

$P_1 = 8\% \times 1\% = 8 \times 10^{-4}$

即万分之八,而同是AB、Rh阴性的相良和理惠结合的概率为:$P_2 = P_1 \times P_1 = (8 \times 10^{-4})^2 = 6.4 \times 10^{-7}$。他们的子女的血型,按奥地利遗传学家孟德尔(Mendel,1822~1884)的分离自由组合定律,或许有A型、B型和AB型三种。如下图所示,自由组合中AB型占$\frac{2}{4}$。观察到幸子是女性,又其血型不仅是AB型,而且还是R_h阴性等各种独立的限制,能够获得这一情形出现的概率为:



$$P_3 = \frac{2}{4} \times 1\% \times \frac{1}{2} = 2.5 \times 10^{-3}$$

综上所述,相良、理惠以及他们的女儿幸子这一血缘链中,三者血型均为AB、Rh阴性的概率为:

$P_4 = P_2 \times P_3 = 6.4 \times 10^{-7} \times 2.5 \times 10^{-3} = 1.6 \times 10^{-9}$

接下来我们看另一条血缘链。由于相良和光夫父子的血型都是AB型,因而尽管不知道母亲多加子的血型,但能够肯

定她的血型不可能是 O 型。因为假如是 O 型，就不会分离组合出 AB 型的子代。这样，多加子的血型组合基因只能是 AO，AA，BO，BB，AB 五种。

对多加子的上述五种可能的血型基因组合，像前面那样利用孟德尔分离组合定律，逐步进行计算。考虑到黄种人的多加子，能够得到各种基因组合的百分比，便可算得光夫血型为 AB、Rh 阴性的概率如下表所示：

多加子血型基因	血型基因所占比例	相应光夫 AB、Rh 阴性概率
AO	14%	0.000175
AA	14%	0.00035
BO	14.5%	0.000181
BB	14.5%	0.000363
AB	8%	0.0002
	65%	$P_5 = 0.001267$

这就表明，在相良血型为 AB 的前提下，光夫血型为 AB，Rh 阴性的概率为：

$$P_5 = 1.267 \times 10^{-3}$$

最后，我们来研究相良、理惠、幸子和光夫四人血型同为 AB、Rh 阴性的可能性。很显然，幸子与光夫之间的血型，是不会没有关系的。因为他们毕竟是同父异母的兄妹。所以，当我们测得相良、理惠和幸子的血型同为 AB、Rh 阴性的概率 P_4 之后，继而计算光夫的血型概率时，就必须注意“同父”的条件。好在当我们计算 P_5 时，已经把相良血型是 AB 作为前提。于是，我们最终得出四人血型同为 AB、Rh 阴性的概率：

$$P = P_4 \times P_5 = 1.6 \times 10^{-9} \times 1.267 \times 10 - 3$$

$$= 2 \times 10^{-12} = \frac{1}{5 \times 10^{11}}$$

五千亿分之一！这比百年不遇的“生日相同五同胞”的概率还要小三十倍。由此，我们可以肯定：电视剧《血疑》中的血型构造，完全是一种臆造和夸张，在现实世界上是不会发生的。这，就是关于电视连续剧《血疑》的质疑的科学结论。