大学公共数学系列教材

高等数学

上册

武汉大学数学与统计学院

齐民友 主编

高等教育出版社

大学公共数学系列教材

高等数学

上册

武汉大学数学与统计学院
齐民友　主　编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成的，分为上、下两册。

上册内容包括极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、反常积分、微分方程等。

下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、含参变量积分、无穷级数等。

本书叙述清晰、层次分明、通俗易懂、例题丰富，可供高等院校工科各个专业作为教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/齐民友主编．—北京：高等教育出版社，2009.8

ISBN 978-7-04-027832-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.齐…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 122048 号

策划编辑 兰莹莹　**责任编辑** 蒋　青　**封面设计** 于文燕
责任绘图 尹文军　**版式设计** 余　杨　**责任校对** 刘　莉
责任印制 尤　静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京铭成印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009年8月第1版
印　　张	23.5	印　　次	2009年8月第1次印刷
字　　数	440 000	定　　价	25.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　27832-00

前　　言

“高等数学”是高等院校非数学类各专业的重要基础理论课，是传授微积分学知识、培养理性思维和创新能力的综合载体，也是弘扬数学文化、培养科学精神的重要平台。本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并结合我们在武汉大学多年来的教学实践经验编写而成的。

本书可作为高等院校工科各专业本科“高等数学”或“微积分”课程教材(年学时180~216学时)，对于少学时的有关专业作适量删减后也同样适用．本书分为上、下两册，上册内容包括极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、反常积分、微分方程等；下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、含参变量积分、无穷级数等。

本书在编写过程中，我们仔细研读了国内外相关优秀教材，并进行了广泛的调查研究，总结分析了多年来讲授“高等数学”的教学经验。我们始终遵循通过知识的传授，着力于培养学生的数学素质，使学生将来有进一步更新知识的能力；着力于培养学生应用知识的意识和兴趣，逐步提高应用数学解决实际问题的能力；渗透现代基础数学和应用数学思想与方法，为进一步了解现代数学知识开辟延伸接口的原则，致力于将本书打磨成既继承传统教材的优点，又积极慎重更新体系与内容，把现代数学思想和观点融入经典内容之中，以适应新世纪对工程技术人才数学素质的要求。

本教材有如下特点：

(1) 在突出微积分的基本思想和基本方法的同时，努力拓宽和加强数学基础理论，以便读者在学习中能够较全面地了解各部分内容的内在联系，从总体上把握学习微积分的思想方法。本书加强了极限理论，从确界原理出发，讲解并证明了极限理论中的几个基本定理；有重点地证明了闭区间上连续函数的几个重要性质；增加了平面点列的极限、二元函数二次极限、多元函数的极限与连续性概念、反常二重积分、曲面积分与曲面形状无关(只与曲面边界有关)的条件；介绍了数值计算的有关概念。教材尽量使用现代数学的语言、术语和符号，为与现代数学对接建立了延伸发展的接口。此外，还增加了一些现代科学技术中颇有用处的数学知识。例如，一致连续、一致收敛、含参变量积分、外微分等。

(2) 注重阐述高等数学基本概念、基本方法和基本理论的实际背景和发

展过程，特别是几何背景和物理背景，并深入剖析彼此的内在联系。使读者不仅了解数学概念的形成过程，理解数学概念的内涵与本质，而且能够领悟其中所蕴含的数学文化和数学精神。

(3) 坚持数学理论的完整性和严谨性，对基本的概念、定理和公式均作严格的、准确的、规范的叙述。同时，还有针对性地选配了一定数量的应用这些定理的思考题与 A、B 两类练习题，并且为读者预留了推广和深化基本概念、定理和公式的拓展空间。着力于发挥本课程培养读者的逻辑推理能力、抽象概括能力、判断辨别能力和综合创新能力以及缜密、准确、精炼的表述能力，开放思维、发散思维、创新性思维诸方面的特殊作用。

(4) 注意加强分析、代数、几何内容的有机结合，相互渗透，数学本身是一完整体，数学分支之间相互渗透，特别是随着数学科学的发展，科学技术的进步，新的数学分支与传统的数学分支相互渗透、交融结合更加紧密，很难说清属于哪一类，为此我们在教材内容上加大了分析、代数、几何思想的融合，充分运用线性代数中矩阵、行列式等相关知识来表达分析、几何中的有关内容. 如：在介绍概念、定理时，尽量作出几何解释，适当配合图示；在多元函数微积分、空间解析几何等内容中利用矩阵、行列式、克拉默法则等代数知识来简化分析和几何问题；增加向量分析与场论初步、外微分等内容，将第二型线面积分与向量场的研究密切结合；运用外微分形式使格林公式、高斯公式、斯托克斯公式得到统一。这种处理方法，不仅符合现代数学的发展趋势，而且也可以更好地满足现代科技对数学知识的要求，有利于提高读者综合运用数学知识的能力。

(5) 注重理论联系实际，加强数学知识应用能力的培养。在阐述基本内容的同时，力求突出对于解决实际问题有着重要应用价值的数学思想方法，揭示重要数学概念和方法的本质。使学生明了理论来自实践，学习的目的又在于应用。本书遴选了不少诸如在电子、测绘、经济、医学以及其他工程技术领域甚至日常生活方面的例题和习题，并注意应用问题的科学性与趣味性。此外，每章还配备了综合应用题，使读者从建立模型、寻求方法到问题解决的全过程得到初步的训练。

(6) 为适用于不同专业学生的要求，本书对部分内容在标题上标注 * 号，表示该内容可供学生自学。希望这样的处理能给教师留下一定的取舍空间，使他们可根据学生实际情况和教学时数，作出灵活安排。

本书由齐民友教授主持编写，其编写大纲和体系经过集体多次讨论确定，承担编写任务的教师有：胡新启(第 1—3 章，第 7 章)、湛少锋(第 4—6 章)、黄明(第 8,13 章)、杨丽华(第 9,10 章)、桂晓风(第 11,12 章)。

武汉大学数学与统计学院樊启斌教授、陈文艺教授、陆君安教授仔细审阅

了全书，提出了许多宝贵意见和建议。本书的编写自始至终得到高等教育出版社和武汉大学数学与统计学院的大力支持，对此，我们一并深表感谢。

本书虽然在此次正式出版之前经过试用和反复修改，但由于编者水平有限，书中难免有不妥甚至错误之处，敬请读者批评指正，使之在教学实践中日臻完善。

编　者

2009 年 3 月 20 日于武汉大学

目　录

第1章　极限与连续

函数是微积分研究的主要对象，极限理论是微积分的基础．本章首先回顾与复习关于集合与映射的知识，然后讨论数列与函数的极限理论，最后介绍连续函数的概念与性质，为学习微积分及今后进一步学习现代数学奠定基础．

第1节　预备知识

函数是数学最基本的概念，也是微积分研究的主要对象．本书中的函数都是在实数范畴内讨论．这里先介绍有关实数集的一些基本概念、性质和记号，继而讨论函数的概念及一般性态，同时简述基本初等函数的性质．本节的内容是初等数学某些知识的复习、总结和提高，也是学习微积分的基础．

1.1　集合

集合是一个最基本因而不需定义的数学概念，但这并不影响我们对数学的学习与研究．一般将我们所关心的具有某种性质的有限个或无限个对象所组成的总体称为一个**集合**（或简称**集**），而集合中的每一个对象称为该集合的**元素**．如果元素 a 是集合 A 中的元素，则称 a 属于 A，记为 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，则称 a 不属于 A，记为 $a \notin A$．一个集合，若其元素数目是有限的，则称该集合为**有限集**，否则称为**无限集**．

通常全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$，全体复数构成的集合记为 $\mathbf{C}$，全体有理数构成的集合记为 $\mathbf{Q}$，全体整数构成的集合记为 $\mathbf{Z}$，全体非负整数构成的集合称为自然数集，记为 $\mathbf{N}$．正实数的全体记为 $\mathbf{R}^+$，正有理数的全体记为 $\mathbf{Q}^+$，正整数的全体记为 $\mathbf{Z}^+$（或 $\mathbf{N}^+$）．

若集合 A 中每一个元素都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的**子集**，或称 A 包含于 B，记为 $A \subseteq B$；或称 B 包含 A，记为 $B \supseteq A$．不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$．我们规定空集是任何一个集合的子集．

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$ 或 $B = A$．

设 A 和 B 是两个集合．称由 A 的所有元素和 B 的所有元素组成的集合为 A 和 B 的**并集**（每个元素只计算一次），记为 $A \cup B$；称由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合为 A 和 B 的**交集**，记为 $A \cap B$；称所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合为 A 与 B 的**差集**，记为 $A \backslash B$（或 $A - B$）．把研究某个问题时所

考虑的对象的全体称为**全集**，记为 U，并称 $U\backslash A$ 为 A 的**补集**或**余集**，记为 A^c.

对于集合 A 和 B，可以定义**直积**(或**笛卡儿积**)，记为 $A\times B$：

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

例如 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记为 $\mathbf{R}^2$.

关于集合的运算法则如交换律、结合律、分配律、德摩根(对偶)律等，这里略去.

在数学的概念和命题的论述中，常使用下面一些逻辑符号：

符号"$\forall$"表示"任意的"或"所有的"；符号"$\exists$"表示"存在某个"；符号"$\Rightarrow$"表示"蕴涵"或"推导出"；符号"$\Leftrightarrow$"表示"等价于"或"充分必要条件是".

1.2 区间与邻域

实数集 $\mathbf{R}$ 的子集称为数集，在微积分中最常见的一类数集就是区间. 设实数 $a<b$，则

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\};\ [a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\};$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\};\ [a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$$

分别称为**开区间**、**闭区间**、**左开右闭区间**、**左闭右开区间**，左开右闭区间和左闭右开区间统称为**半开半闭区间**，a 和 b 称为区间的**端点**. 上述区间都是有限区间(或有界区间)，它们可以用数轴上长度有限的线段来表示，上面四个区间分别如图 1.1 中(a)、(b)、(c)、(d)表示. 此外还有无限区间(或无穷区间). 引入符号 $+\infty$(读作正无穷大)和 $-\infty$(读作负无穷大)，可用类似记号表示无限区间，例如：

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x,x\in\mathbf{R}\};\ (-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{R}\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R},$$

前两个无限区间在数轴上表示如图 1.1 中(e)、(f)所示.

对于非特定的区间，通常用字母 I 表示. 由于实数与数轴上的点的对应是通过坐标来实现的，因此我们不区分实数和它所对应的数轴上的点的坐标，例如数轴上的点坐标为 x，我们常说点 x 或数 x.

邻域是一种常见的集合. 设 $x_0\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，所有包含 x_0 的开区间都称为 x_0 的邻域. 特别地，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为 x_0 的 **δ 邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$，点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 如果把邻域的中心去掉，得到的集合 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的**去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$. $U(x_0,\delta)$ 和 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 也可分别表示为

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\},\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

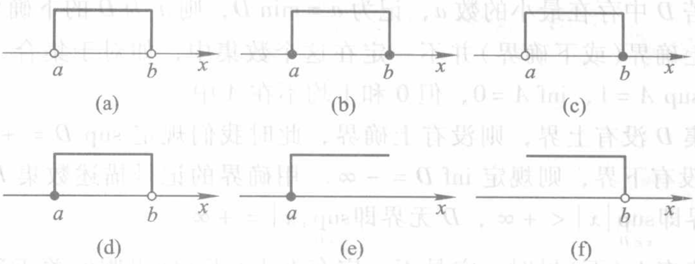

图 1.1

在不必强调邻域半径时，将邻域和去心邻域可简记为 $U(x_0)$ 和 $\mathring{U}(x_0)$. 有时也用 $\mathring{U}_+(x_0)$ 和 $\mathring{U}_-(x_0)$ 分别表示集合

$$\mathring{U}_+(x_0,\delta)=\{x\mid 0<x-x_0<\delta\};\ \mathring{U}_-(x_0,\delta)=\{x\mid -\delta<x-x_0<0\}.$$

1.3 数集的界

对数集，我们引入有界的概念.

定义 1.1 对非空数集 $D\subseteq\mathbf{R}$，若 $\exists M\in\mathbf{R}$，使得 $\forall x\in D$，有 $x\leqslant M$，则称数集 D 是**有上界**的，称 M 为 D 的一个上界；若 $\exists m\in\mathbf{R}$，使得 $\forall x\in D$，有 $x\geqslant m$，则称数集 D 是**有下界**的，称 m 为 D 的一个下界；若数集 D 既有上界又有下界，则称 D 是**有界**的.

也可这样定义有界：

数集 D 有界 $\Leftrightarrow\exists M\in\mathbf{R}$，使得 $\forall x\in D$，都有 $|x|\leqslant M$.

容易说明有界的这两个定义是等价的.

如果这样的 M 不存在，则称 D 是**无界**的. 换言之，若对任意的正数 M（不论它多大），总 $\exists x\in D$，使得 $|x|>M$，则 D 是无界的.

显然，若一个数集有上界，则它有无穷多个上界. 事实上，若 M 是 D 的一个上界，则 $M+c$（c 为任一正数）也是 D 的上界，在这些上界中，有一个具有特别重要的作用，称它为数集 D 的上确界：

定义 1.2 设非空集合 $D\subseteq\mathbf{R}$，若存在 $\beta\in\mathbf{R}$，满足

(1) $\forall x\in D$，有 $x\leqslant\beta$；

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in D$，使得 $x_\varepsilon>\beta-\varepsilon$，

则称 β 为数集 D 的**上确界**，记为 $\beta=\sup D$.

根据定义，上确界是数集 D 的最小的上界，即：一方面它是数集 D 的上界，另一方面数集 D 没有比它更小的上界. 同理可以定义数集 D 的**下确界** α，记为 $\alpha=\inf D$. 下确界是数集 D 的最大下界. 上确界和下确界统称为**确界**.

若一个数集 D 中存在最大的数 b，记为 $b=\max D$，显然 b 就是 D 的上确

界；同样若 D 中存在最小的数 a，记为 $a=\min D$，则 a 为 D 的下确界．但是一个数集的上确界(或下确界)并不一定在这个数集中，如对于集合 $A=(0,1)$，不难得到 $\sup A=1$，$\inf A=0$，但 0 和 1 均不在 A 中．

若数集 D 没有上界，则没有上确界，此时我们规定 $\sup D=+\infty$．同样，若数集 D 没有下界，则规定 $\inf D=-\infty$．用确界的记号描述数集 D 有界更方便，D 有界即 $\sup\limits_{x\in D}|x|<+\infty$，$D$ 无界即 $\sup\limits_{x\in D}|x|=+\infty$．

在数集有上(下)界时，它是否一定存在上(下)确界呢？关于这一点，有下面的确界存在定理：

定理 1.1(确界存在定理) 若非空数集 $D\subseteq\mathbf{R}$ 有上(下)界，则 D 必存在上(下)确界．

从直观上看，一个数集 D 是数轴上的一个点集，上界代表着这样的点：它的右边没有 D 中的点，因此它的右边全是 D 的上界；换言之，D 的所有上界点的集合是数轴上的一根正向射线，射线的端点恰好是 D 的上确界．确界的存在性反映了实数集的连续性这一重要而基本的性质，即实数充满了数轴而连续不断．如果实数间留有不是实数的“空隙”，那么“空隙”点左边的数集就没有上确界，“空隙”右边的数集就没有下确界了．

1.4 映射与函数

1. 映射

设 X 和 Y 是两个非空集合，若存在一个法则 T，使得 X 中的每一元素 x 按法则 T 有惟一的 Y 中元素 y 与之对应，则称 T 是从 X 到 Y 的**映射**，记作 $T: X\to Y$．元素 y 称为 x 在映射 T 下的**像**，并记作 $T(x)$，即 $y=T(x)$，而元素 x 称为 y 在 T 下的一个**原像**．

集合 X 称为映射 T 的**定义域**，T 的定义域常记为 $D(T)$．X 中所有元素的像构成的集合称为映射 T 的**值域**，T 的值域常记为 $R(T)$，也记为 $T(X)$，称为集合 X 在映射 T 下的像．Y 称为陪域．

设 T 是从 X 到 Y 的映射．若 Y 中任意元素均存在原像，即 $T(X)=Y$，则称 T 是从 X 到 Y 的**满射**；若对 $\forall x_1, x_2\in X$，当 $x_1\neq x_2$ 时必有 $T(x_1)\neq T(x_2)$(或在 $T(x_1)=T(x_2)$ 成立时必有 $x_1=x_2$)，则称 T 是从 X 到 Y 的**单射**；若 T 既是满射又是单射，则称 T 是从 X 到 Y 的**双射**，也称为 X 与 Y 之间的一一对应．

如图 1.2 的 6 个图中，(1)，(2)均不是映射，(3)不是单射也不是满射，(4)是单射而不是满射，(5)是满射而不是单射，(6)既是单射也是满射从而是双射．

若 $T: X\to Y$ 是双射，则由定义，对任意 $y\in Y$，存在惟一元素 $x\in X$ 使得

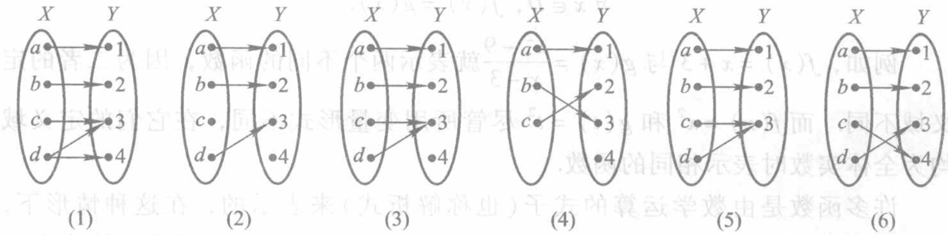

图 1.2

$T(x)=y$，于是可得到一个从 Y 到 X 的映射，它将每一 $y\in Y$ 映为 X 中元素 x，其中 x 满足 $T(x)=y$，称此映射为 T 的逆映射，记为 T^{-1}，即 T^{-1}：$Y\to X$，对 $\forall y\in Y$，若 $T(x)=y$，则 $T^{-1}(y)=x$.

设映射 T：$X\to Y_1$，S：$Y_2\to Z$，且 $T(X)\subseteq Y_2$，由 T 和 S 可确定从 X 到 Z 的一个映射：对 $\forall x\in X$，其像为 $S[T(x)]$，称此映射为由 T，S 构成的复合映射，记为 $S\circ T$，即

$$S\circ T\colon X\to Z,\ S\circ T(x)=S[T(x)],\ \forall x\in X.$$

例如：T：$(-\infty,+\infty)\to[-1,1]$，$T(x)=\sin x$；$S$：$[-4,4)\to[0,+\infty)$，$S(u)=u^2$，则 T，S 的复合映射为 $S\circ T$：$(-\infty,+\infty)\to[0,+\infty)$，$S\circ T(x)=S[T(x)]=\sin^2 x$.

2. 函数的概念

定义 1.3　设非空集合 $D\subseteq\mathbf{R}$，则映射 f：$D\to\mathbf{R}$ 称为 D 上的一个**函数**，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，习惯上也称 y 为 x 的函数. D 为函数 f 的**定义域**，用 $D(f)$ 表示. 全体函数值组成的集合 $\{y\in R\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**，记作 $R(f)$ 或 $f(D)$. $y=f(x)$ 称为 x 在函数 f 下的**函数值**或**像**. 集合 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的**图形**（或**图像**），记为 graph(f)，也简记为 $G(f)$.

对于给定的 $x_0\in D$，x_0 在 $y=f(x)$ 下的像 $f(x_0)$ 也记为 $f|_{x=x_0}$ 或 $y|_{x=x_0}$.

表示函数的符号可以任意选取，除了常用的 f 外，还可以用其它的英文或希腊字母，如 g，F，φ，Φ 等. 在讨论同一问题时，不同的函数应该用不同的字母来表示. 以后若无特别说明，凡提及的数以及数集都限于实数范围内考虑. 本书上册中所涉及的函数都是仅含一个自变量的一元函数（上册内容的研究对象）.

由函数的定义可知，定义域和对应法则是构成函数的两大要素（因为定义中的定义域都是 D）. 只要定义域和对应法则给定，相应的值域也就确定了. 因此，当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时，两个函数相等. 即若两个函数 f 和 g 相等，意味着既有 $D(f)=D(g)$，又有