丁保荣 主编

本书另配《初中数学竞赛解题手册（九年级）》

初中数学竞赛教程

CHUZHONG SHUXUE JINGSAI JIAOCHENG

九年级

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

本书另配《初中数学竞赛解题手册九年级》

初中数学竞赛教程

九年级

主　编　丁保荣

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛教程. 九年级/丁保荣主编. —杭州：浙江大学出版社，2009.3
ISBN 978-7-308-06658-7

Ⅰ.初… Ⅱ.丁… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 036972 号

初中数学竞赛教程(九年级)
丁保荣　主编

责任编辑　石国华
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　24.5
字　　数　427 千
版 印 次　2009 年 4 月第 1 版　2009 年 6 月第 2 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06658-7
定　　价　36.00 元

前　言

人们希望更好、更快、更强，所以就出现了各种竞技活动，像奥林匹克运动会。数学作为一门可以充分展现头脑灵活度的学科，理所当然地被选择用来比试人们思维的创新能力，于是出现了数学奥林匹克，即数学竞赛。

数学竞赛在激发青少年学习数学兴趣、培养刻苦学习精神、促进和提高数学教学水平及在发现科技人才，培养科技后备力量中发挥了巨大作用。数学竞赛如春阳之草、生机勃发，并取得了令人欣慰的成绩。我国自从参加国际数学奥林匹克以来，每年都取得佳绩，始终保持在前几名。中国选手的优异表现为祖国赢得了巨大荣誉。在国内历届中、小学数学竞赛中涌现出大批优秀青少年选手，他们大部分在以后的学习、科研和生产中崭露头角，取得了骄人的业绩。

在目前数学竞赛良好的发展氛围下，考虑到广大教师和学生的迫切需要，我们按新课本初中数学教材的进度分七、八、九年级编写了这套《初中数学竞赛教程》。题目精选自国内外竞赛卷，编者是多年从事数学竞赛工作的中学高级教师，所编选的题目无论从时效性、实践性、指导性来说都是非常好的。

本套丛书根据初中数学竞赛大纲及各年级课本内容，同步分 30 讲（九年级 29 讲）、每讲设【赛点扫描】、【赛题解密】、【赛场演练】三个栏目。【赛点扫描】描述了本讲内容的相关赛点，点拨了命题思路，有利于掌握解题方法；【赛题解密】巧妙应用技法，让赛题全面解密；【赛场演练】跳出常规思路，演练竞赛精题。

为了方便读者自学，我们分年级编写了《解题手册》。《竞赛教程》中【赛场演练】栏目的题目只提供简单答案，而在相应的《解题手册》中提供了详细解答。如果将《解题手册》与《竞赛教程》配套使用，收效一定更佳。

参加本书编写的有：方利生、何星天、金旭颖、朱晓燕、陈志强、王菊清、沈文革、凌任涛、徐善海、董烈佳、张小梅、张喜凤、金友素。

丁保荣

2009 年 4 月

目录
CONTENTS

第 1 讲　一元二次方程

赛点扫描

形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程叫一元二次方程. 配方法、公式法、因式分解法是解一元二次方程的基本方法. 而公式法是解一元二次方程最普遍、最具有一般性的方法.

求根公式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 内涵丰富：它包含了初中阶段已学过的全部代数运算；它回答了一元二次方程的诸如怎样求实根、实根的个数、何时有实根等基本问题；它展示了数学的简洁美.

降次转化是解方程的基本思想，有些条件中含有(或可转化为)一元二次方程相关的问题，直接求解可能给解题带来许多不便，往往不是去解这个二次方程，而是对方程进行适当的变形来代换，从而使问题易于解决. 解题时常用到变形降次、整体代入、构造零值多项式等技巧和方法.

赛题解密

例　1　(全国初中数学联赛题) 设 x_1、x_2 是二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，那么 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值等于　(　　)

A. -4　　B. 8　　C. 6　　D. 0

【解密】　求出 x_1、x_2 的值再代入计算，则计算繁琐，解题的关键是利用根的定义及变形，使多项式降次，如 $x_1^2=3-x_1$，$x_2^2=3-x_2$.

【解】　选 D.　由题意有 $x_1^2+x_1-3=0$，$x_2^2+x_2-3=0$，即 $x_1^2=3-x_1$，$x_2^2=3-x_2$，原式 $=x_1\cdot(3-x_1)-4(3-x_2)+19=3x_1-x_1^2+4x_2+7=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7=4(x_1+x_2)+4=4\times(-1)+4=0$.

例　2　(1999 年武汉竞赛题) 方程 $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1$ 的实数根是________.

【解密】 观察方程，因为 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，所以这种类型的方程通常用换元法来解.

【解】 设 $x+\frac{1}{x}=t$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$，原方程转化为 $2t^2-3t-5=0$，解得

$$t_1=\frac{5}{2},\ t_2=-1,$$

当 $t_1=\frac{5}{2}$ 时，$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$，解得 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，

当 $t_2=-1$ 时，$x+\frac{1}{x}=-1$，此方程无实数解，

经检验，原方程的实数根为 $x=2$ 或 $\frac{1}{2}$.

例 3 （2005 年全国初中数学竞赛题）若关于 x 的方程 $(6-k)(9-k)x^2-(117-15k)x+54=0$ 的解都是整数，则符合条件的整数 k 的值有________个.

【解密】 用因式分解法可得到根的简单表达式，因方程的类型未指明，故需按一次方程、二次方程两种情形讨论，这样确定 k 的值才能全面而准确.

【解】 当 $k=6$ 时，得 $x=2$；当 $k=9$ 时，得 $x=-3$，当 $k\neq 6$ 且 $k\neq 9$ 时，解得 $x_1=\frac{9}{6-k}$，$x_2=\frac{6}{9-k}$，当 $6-k=\pm 1, \pm 3, \pm 9$ 时，x_1 是整数，这时 $k=7, 5, 3, 15, -3$；当 $9-k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ 时，x_2 是整数，这时 $k=10, 8, 11, 7, 12, 15, 3$. 综上所述，$k=3, 6, 7, 9, 15$ 时，原方程的解为整数，共 5 个.

【探密】 系数含参数的方程问题，在没有指明是二次方程时，要注意有可能是一次方程，根据问题的题设条件，看是否要分类讨论.

例 4 （重庆市竞赛题）设方程 $x^2-|2x-1|-4=0$，求满足该方程的所有根之和.

【解密】 通过讨论，脱去绝对值符号，把绝对值方程转化为一般的一元二次方程求解.

【解】 当 $2x-1>0$ 即 $x>\frac{1}{2}$ 时，原方程化为 $x^2-2x-3=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=-1$（舍去）；当 $2x-1=0$ 即 $x=\frac{1}{2}$ 时，代入原方程不合，舍去；当 $2x-1<0$ 即 $x<\frac{1}{2}$ 时，原方程化为 $x^2+2x-5=0$，解得 $x_1=-1-\sqrt{6}$，$x_2=-1+\sqrt{6}>\frac{1}{2}$（舍去），故所有根之和为 $3+(-1-\sqrt{6})=2-\sqrt{6}$.

例 5 （2005 年惠安市竞赛题）设关于 x 的二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0 \quad ①$$

及

$$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0 \quad ②$$

(其中 a、b 皆为正整数,且 $a\neq b$)有一个公共根,求 $\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

【解密】 分别求出方程的根,或设出两方程的公共根 m,建立 a、b 的等式.

【解】 由已知 $a>1$, $b>1$,且 $a\neq b$,解 ① 得 $x_1=a$, $x_2=\dfrac{a+2}{a-1}$,解 ② 得 $x_1=b$, $x_2=\dfrac{b+2}{b-1}$, ∵ 两方程有公共根,又 $a\neq b$, ∴ $a=\dfrac{b+2}{b-1}$ 或 $b=\dfrac{a+2}{a-1}$,由此均得 $ab-a-b-2=0$,

即

$$(a-1)(b-1)=3,$$

$$\begin{cases}a-1=1\\b-1=3\end{cases} \text{或} \begin{cases}a-1=3\\b-1=1\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$,原式 $=256$.

【探密】 解公共根问题的基本策略是:当方程的根有简单形式表示时,利用公共根相等求解;当方程的根不便于求出时,可设出公共根,设而不求,通过消去二次项寻找解题突破口.

例 6 (2004年太原市竞赛题)设 α 是方程 $x^2+x-\dfrac{1}{4}=0$ 的根,求 $\dfrac{\alpha^3-1}{\alpha^5+\alpha^4-\alpha^3-\alpha^2}$ 的值.

【解密】 若解出方程的根,再代入求值,显然很复杂,可以利用方程根的定义进行变形求值.

【解法1】 ∵ α 是方程 $x^2+x-\dfrac{1}{4}=0$ 的根,

∴ $\alpha^2+\alpha-\dfrac{1}{4}=0$,即 $\alpha^2+\alpha=\dfrac{1}{4}$. ①

又 $\alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)$,

$$\alpha^5+\alpha^4-\alpha^3-\alpha^2=(\alpha^3-\alpha)(\alpha^2+\alpha)=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha)^2,$$

原式 $=\dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)}{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha)^2}=\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{(\alpha^2+\alpha)^2}$. ②

把 ① 式代入 ② 式得　原式 $=20$.

【解法 2】 同解法 1 得 $\alpha^2+\alpha=\frac{1}{4}$,

故$\frac{\alpha^5+\alpha^4-\alpha^3-\alpha^2}{\alpha^3-1}=\alpha^2+\alpha-1+\frac{1}{\alpha^2+\alpha+1}=\frac{1}{4}-1+\frac{1}{\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{20}$,原式 $=20$.

例 7 (2000 年鲁中杯数学竞赛题)已知关于 x 的方程$(4-k)(8-k)x^2-(80-12k)x+32=0$ 的解都是整数,求整数 k 的值.

【解密】 本题若从参数和方程的解来分析,用韦达定理和 Δ 法未尝不可,但实际操作中很难做到.我们注意到方程的两个解极易求出且形式简单,故可用直接求根法求出其根再利用整除理论求解.

【解】 当 $k=4$ 时,原方程为 $-32x+32=0$, $\therefore x=1$,符合题意;

当 $k=8$ 时,原方程为 $16x+32=0$,$\therefore x=-2$,符合题意;

当 $k\neq 4$ 且 $k\neq 8$ 时,原方程可化为

$$[(4-k)x-8][(8-k)x-4]=0,$$

解得

$$x_1=\frac{8}{4-k},\ x_2=\frac{4}{8-k}.$$

$\because$ k 为整数,且 x_1, x_2 均为整数根,

$\therefore 4-k=\pm1, \pm2, 4, \pm8$,得 $k=3, 5, 2, 6, 0, -4, 12$ 或 $8-k=\pm1, \pm2, -4$,得 $k=7, 9, 6, 10, 12$.

综上所述,当 k 的值为 4, 6, 8, 12 时,原方程的根都为整数.

例 8 (第 15 届江苏省竞赛题)若关于 x 的方程$\frac{2k}{x-1}-\frac{x}{x^2-x}=\frac{kx+1}{x}$只有一个解(相等的解也算作一个),试求 k 的值与方程的解.

【解密】 先将分式方程转化为整式方程,把分式方程解的讨论转化为整式方程的解的讨论,"只有一个解"内涵丰富,在全面分析的基础上求出 k 的值.

【解】 原方程化为 $kx^2-3kx+2x-1=0$ (※)

(1) 当 $k=0$ 时,原方程有唯一解 $x=\frac{1}{2}$.

(2) 当 $k\neq 0$ 时,方程(※)$\Delta=5k^2+4(k-1)^2>0$,总有两个不同的实数根,由题意知必有一个根是原方程的增根,从原方程知增根只能是 0 或 1,显然 0 不是(※)的根,故 $x=1$,得 $k=\frac{1}{2}$.

例 9 (第 5 届莫斯科数学奥林匹克试题)解方程$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

【解密】 本题是根号套根号,最通常的方法是换元,即把里面的根号作为换元的基

本单位，即 $y=\sqrt{a+x}$，然后再求解.

【解】 设 $$y=\sqrt{a+x} \quad ①$$

则原式变为 $$\sqrt{a-y}=x \quad ②$$

$①^2+②^2$ 得 $(x-y+1)(x+y)=0$，

当 $x-y+1=0$ 时，代入①得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$，

$\because x\geqslant 0$，$\therefore x=\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}(a\geqslant 1)$，

当 $x+y=0$ 时，$\because x\geqslant 0, y\geqslant 0$，$\therefore x=0$，此时 $a=0$，

$\therefore$ 原方程的解为

$$x=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}(a\geqslant 1),\ x=0.$$

【探密】 本题的解题过程中，关键一步是如何由①、②式得到 $(x-y+1)(x+y)=0$. 像本题的解题方法，读者应该多加揣摩.

例 10 解下列方程：

(1)（河南省竞赛题）$\dfrac{x^2+3x}{2x^2+2x-8}+\dfrac{x^2+x-4}{3x^2+9x}=\dfrac{11}{12}$；

(2)（山东省竞赛模拟题）$(1999-x)^3+(x-1998)^3=1$；

(3)（祖冲之杯竞赛题）$\dfrac{13x-x^2}{x+1}\left(x+\dfrac{13-x}{x+1}\right)=42$；

(4)（西安市竞赛题）$\begin{cases}x(x+1)(3x+5y)=144\\ x^2+4x+5y=24\end{cases}$.

【解密】 按照常规思路求解繁难，应恰当转化，对于(1)，利用倒数关系换元；对于(2)，从 $(1999-x)+(x-1998)=1$ 受到启示；对于(3)，设 $y=\dfrac{13-x}{x+1}$，则可导出 $x+y$、xy 的结果；对于(4)，视 x^2+x、$3x+5y$ 为整体，可得到 $(x^2+x)+(3x+5y)$、$(x^2+x)(3x+5y)$ 的值.

【解】 (1) 设 $\dfrac{x^2+3x}{x^2+x-4}=y$，则原方程化为 $\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{3y}=\dfrac{11}{12}$，解得 $x_1=-1$，$x_2=-4$，$x_{3,4}=\dfrac{5\pm\sqrt{89}}{2}$.

(2) 设 $1999-x=a$，$x-1998=b$，$1999-x+x-1998=1$，则原方程 $a^3+b^3=$

$(a+b)^3$,得 $ab=0$,即 $(1999-x)(x-1998)=0$, $\therefore x_1=1999$, $x_2=1998$.

(3) 设 $y=\dfrac{13-x}{x+1}$,则 $xy(x+y)=42$,又 $xy+(x+y)=\dfrac{13x-x^2}{x+1}+\dfrac{x^2+13}{x+1}=13$.

$\therefore$ xy、$x+y$ 是方程 $t^2-13t+42=0$ 的两根,解得 $t_1=6$, $t_2=7$,即 $\begin{cases}x+y=7\\xy=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=6\\xy=7\end{cases}$,进而可得: $x_1=1$, $x_2=6$, $x_3=3+\sqrt{2}$, $x_4=3-\sqrt{2}$.

(4) $\begin{cases}x^2+x=12\\3x+5y=12\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x_1=3\\y_2=\dfrac{3}{5}\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=-4\\y_2=\dfrac{24}{5}\end{cases}$.

【探密】 1. 换元是建立在观察基础上的,换元不拘泥于一元代换,可根据问题的特点,进行多元代换.

2. 分式方程转化为整式方程不一定是等价转化,有可能产生增根,分式方程只有一个解,可能是转化后所得的整式方程只有一个解,也可能是转化后的整式方程有两个解,而其中一个是原方程的增根,故分式方程的解的讨论,要运用判别式、增根等知识全面分析.

例 11 (2000 年全国联赛题) 设关于 x 的二次方程 $(k^2-6k+8)x^2+(2k^2-6k-4)x+k^2=4$ 的两根都是整数,求满足条件的所有实数 k 的值.

【解密】 由于题中方程的系数能够进行因式分解,故可直接求根解决.

【解】 $\because (k^2-6k+8)x^2+(2k^2-6k-4)x+k^2=4$,

$\therefore (k-4)(k-2)x^2+(2k^2-6k-4)x+(k-2)(k+2)=0$.

$\therefore [(k-4)x+(k-2)][(k-2)x+(k+2)]=0$.

$\because (k-4)(k-2)\neq 0$,

$\therefore x_1=-\dfrac{k-2}{k-4}=-1-\dfrac{2}{k-4}$,

$x_2=-\dfrac{k+2}{k-2}=-1-\dfrac{4}{k-2}$.

$\therefore k-4=-\dfrac{2}{x_1+1}$, $k-2=-\dfrac{4}{x_2+1}$(其中 $x_1\neq -1$, $x_2\neq -1$),

消去 k,得 $x_1x_2+3x_1+2=0$.

$\therefore x_1(x_2+3)=-2$.

$\because x_1$, x_2 都是整数,

$\therefore$ $\begin{cases}x_1=-2,\\x_2+3=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=1,\\x_2+3=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=2,\\x_2+3=-1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-2,\\x_2=-2;\end{cases}\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-5;\end{cases}\begin{cases}x_1=2,\\x_2=-4.\end{cases}$

$\therefore k=6,3,\frac{10}{3}$.

经检验,$k=6,3,\frac{10}{3}$ 均满足题意.

【探密】 1. 本题是采用因式分解法来求根的,在后半部分中,又运用了消元法得到了关于根的不定方程,最后使原有问题演化成了求不定方程整数解的问题,从而使思路明朗化.

2. 像本题一样,有些方程形式比较简单,结构也不太复杂,或者方程中根的形式突现,此时可直接用含有参数的代数式来表示出要求的根,再就其表达式的情况进行研究根的分布情况,我们称为直接求根法.这种方法简洁直观,思路明确,没有过多的理论和限制,很适用于求解简单系数、特别是整系数的一元二次方程根的分布问题.

3. 解整系数(即系数为整数)一元二次方程的整数根问题的基本方法有:

(1) 直接求解.若根可用有理式表示,则求出根,结合整除性求解.

(2) 利用判别式.在二次方程有根的前提下,通过判别式确定字母或根的范围,运用枚举讨论,不等分析求解.

(3) 运用根与系数的关系.由根与系数的关系得到用待定字母表示的两根和、积式,从中消去待定字母,再通过因式分解和整数性质求解.

(4) 巧选主元.若运用相关方法直接求解困难时,可选取字母为主元,结合整除知识求解.

例 12 (2007年全国联赛题)已知 a 是正整数,如果关于 x 的方程 $x^3+(a+17)x^2+(38-a)x-56=0$ 的根都是整数,求 a 的值及方程的整数根.

【解密】 若注意到方程各项系数的和为0,则它必有一根为1,从而可转化为研究一元二次方程根的性质.若注意到方程所含参数 a 仅为一次的,还可以通过分离参数的方法给出更简单的解法.

【解法1】 $\because$ 方程各项系数之和为0,$\therefore x=1$ 为原方程的一个根.

从而分解因式,原方程可化为

$$(x-1)[x^2+(a+18)x+56]=0.$$

因为 a 为正整数,所以方程

$$x^2+(a+18)x+56=0 \quad ①$$

的判别式 $\Delta=(a+18)^2-224$ 必为完全平方数.

设$(a+18)^2-224=m^2$（m为非负整数），则$(a+18)^2-m^2=224$，即

$$(a+m+18)(a-m+18)=224=112\times 2=56\times 4=28\times 8.$$

又$a+m+18$与$a-m+18$具有相同的奇偶性，且$a+m+18\geqslant a-m+18$，$a+m+18>18$，

$\therefore \begin{cases}a+m+18=112,\\a-m+18=2;\end{cases}$ 或$\begin{cases}a+m+18=56,\\a-m+18=4;\end{cases}$ 或$\begin{cases}a+m+18=28,\\a-m+18=8.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=39,\\m=55;\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=12,\\m=26;\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=0,\\m=10.\end{cases}$

又a为正整数，所以 $\begin{cases}a=39,\\m=55;\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=12,\\m=26.\end{cases}$

当$a=39$时，方程①的根为-1和-56；

当$a=12$时，方程①的根为-2和-28.

综上所述，当$a=39$时，原方程的三个根为1，-1和-56；当$a=12$时，原方程的三个根为1，-2和-28.

【解法2】 原方程可化为$(x^2-x)a=56-38x-17x^2-x^3$. ②

显然$x\neq 0$. 当$x=1$时，②式恒成立.

当$x\neq 1$时，方程②可化为

$$a=\frac{56-38x-17x^2-x^3}{x^2-x}=-x-18-\frac{56}{x}.$$

$\because a$为正整数，$\therefore -x-18-\dfrac{56}{x}>0$，$\therefore x+18+\dfrac{56}{x}>0$.

显然$x<0$，所以$x^2+18x+56>0$.

解得$x<-\sqrt{35}-9$或$\sqrt{35}-9<x<0$.

又x为整数，且$x\mid 56$，

$\therefore x$可取-56，-28，-2，-1.

由韦达定理，知$(-56)\times(-1)=(-28)\times(-2)$.

若-56和-1为方程①的两个根，则$-(a+18)=-56-1$，即$a=39$；

若-28和-2为方程①的两个根，则$-(a+18)=-28-2$，即$a=12$.

综上所述，当$a=39$时，原方程的三个根为1，-1和-56；当$a=12$时，原方程的三个根为1，-2，-28.

赛场演练

1. (2004年江西省竞赛题)方程 $\sqrt{x^2+y^2+2^2}=x+y+2$ 的整数解有 ( )

A. 1组 B. 3组 C. 6组 D. 无穷多组

2. (第15届江苏省竞赛题)自然数 n 满足 $(n^2-2n-2)^{n^2+47}=(n^2-2n-2)^{16n-16}$,这样的 n 的个数是 ( )

A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

3. (第9届五羊杯竞赛题)方程 $x|x|-3|x|+2=0$ 的实数根个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. (1999年江苏省竞赛题)已知 a,b 都是负实数,且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a-b}=0$,那么 $\frac{b}{a}$ 的值是 ( )

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

5. (第16届江苏省竞赛题)若两个方程 $x^2+ax+b=0$ 和 $x^2+bx+a=0$ 只有一个公共根,则 ( )

A. $a=b$ B. $a+b=0$ C. $a+b=1$ D. $a+b=-1$

6. (1998年山东省竞赛题)已知 $a^4+3a^2=b^2-3b=1$,且 $a^2b\neq 1$,则 $\frac{a^6b^3+1}{b^3}$ 的值是 ( )

A. 35 B. 36 C. -35 D. -36

7. (全国初中数学联赛题)方程组 $\begin{cases}xz+yz=23\\xy+yz=63\end{cases}$ 的正整数解的组数是 ( )

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

8. (2000年美国犹他州竞赛题)方程 $x^3-6x^2-x+6=0$ 所有根的积是 ( )

A. 3 B. -3 C. 4 D. -6

9. (第35届美国中学生竞赛题)若 p 为质数,且方程 $x^2+px-444p=0$ 的两根均为整数,则 ( )

A. $1<p\leqslant 1$ B. $11<p\leqslant 21$ C. $21<p\leqslant 31$ D. $31<p\leqslant 41$

10. (全国竞赛题)如果 x 和 y 是非零实数,使得 $|x|+y=3$ 和 $|x|y+x^3=0$,那么 $x+y$ 等于 ( )

A. 3 B. $\sqrt{13}$ C. $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ D. $4-\sqrt{13}$

11. (1999年全国竞赛题)已知$\frac{1}{a}-|a|=1$,那么代数式$\frac{1}{a}+|a|$的值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　B. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$　C. $-\sqrt{5}$　D. $\sqrt{5}$

12. (2001年全国竞赛题)如果a,b是质数,且$a^2-13a+m=0$,$b^2-13b+m=0$,那么$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$的值为 ( )

A. $\frac{123}{22}$　B. $\frac{125}{22}$或2　C. $\frac{125}{22}$　D. $\frac{123}{22}$或2

13. (2001年全国联赛题)若$a\cdot b\neq 1$,且有$5a^2+2001a+9=0$及$9b^2+2001b+5=0$,则$\frac{a}{b}$的值是 ( )

A. $\frac{9}{5}$　B. $\frac{5}{9}$　C. $-\frac{2001}{5}$　D. $-\frac{2001}{9}$

14. (2007年全国竞赛题)已知三个关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$,$bx^2+cx+a=0$,$cx^2+ax+b=0$恰有一个公共实数根,则$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$的值为 ( )

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

15. (1998年广西竞赛题)当$m=$________时,关于x的方程$\frac{2}{x-2}+\frac{m}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}$会产生增根.

16. (2004年上海南汇竞赛题)对任意两个实数a、b,用$\max(a、b)$表示其中较大的数,如:$\max(2,-4)=2$,则方程$x\cdot\max(x,-x)=2x+1$的解是________.

17. (天津市竞赛题)已知α、β是方程$x^2-x-1=0$的两个根,那么$\alpha^4+3\beta$的值为________.

18. (1997年学习报公开赛题)解方程$\frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}=1$,得________.

19. (第15届江苏省竞赛题)已知$3m^2-2m-5=0$,$5n^2+2n-3=0$,其中m,n为实数,则$\left|m-\frac{1}{n}\right|=$________.

20. (1993年合肥市初中数学竞赛题)方程$\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}=\frac{2}{x-2}+1$的解是________.

21. (第15届五羊杯竞赛题)方程$(x^3-3x^2+x-2)(x^3-x^2-4x+7)+6x^2-15x+18=0$的全部相异实根是________.

22. (第8届希望杯竞赛题)若$\dfrac{\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}}{-\frac{9x^2}{x^3-1}}$的值为$\frac{2}{3}$,则$x$的值等于________.

23. （第12届五羊杯竞赛题）方程$\frac{13-2x}{11-2x}+\frac{17-2x}{15-2x}=\frac{19-2x}{17-2x}+\frac{11-2x}{9-2x}$的解是$x=$________.

24. （1998年祖冲之杯竞赛题）方程$\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}=\frac{4}{21}$的解是________.

25. （第11届五羊杯竞赛题）规定运算$a*b$满足：$a*a=1(a\neq 0)$，$a*(b*c)=(a*b)c$,其中b，$c\neq 0$，a，b，c为实数,则方程$x^2*19=99x$的解$x=$________.

26. （第11届五羊杯竞赛题）已知$a=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$，$b=-(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$,在实数范围内，方程$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2a}{1-a^2}+\frac{2b}{1-b^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2a}{1-a^2}\cdot\frac{2b}{1-b^2}$的解$x=$________.

27. （1996年上海市竞赛题）a，b是方程$x^2-4x+1=0$的两个根,c，d是方程$x^2-5x+2=0$的两个根,记$t=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}$,则用$t$表示$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}=$________.

28. （2001年全国初中数学竞赛题）若$x^2+xy+y=14$，$y^2+xy+x=28$,求$x+y$的值.

29. （1998年全国联赛题）满足$1998^2+m^2=1997^2+n^2(0<m<n<1998)$的整数对$(m,n)$共有________个.

30. （全国初中数学联赛题）已知关于x的方程$(a-1)x^2+2x-a-1=0$的根都是整数，那么符合条件的整数a有________个.

31. （1998年全国竞赛题）已知方程$a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-3a+15=0$（$a$为非负整数）至少有一个整数根,则$a=$________.

32. （全国初中数学竞赛题）满足$(n^2-n-1)^{n+2}=1$的整数n有________个.

33. （重庆市竞赛题）已知$x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$,求$x+\frac{1}{x}$的值.