中国科学院考研指定参考书

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

中国科学技术大学数学教学丛书

数学物理方程

（第二版）

季孝达 薛兴恒 陆 英 宋立功 编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

中国科学技术大学数学教学丛书

数学物理方程

(第二版)

季孝达　薛兴恒
陆　英　宋立功　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据编者在中国科学技术大学多年的教学经验编写而成. 通过对三类典型方程的讨论, 介绍求解偏微分方程定解问题的通解法、分离变量法、积分变换法、基本解方法和变分方法, 以及相关的固有值问题、特殊函数和广义函数简介. 本书还讨论了一阶线性和拟线性偏微分方程的特征线概念和求解方法. 对涉及的数学理论, 本书重在理解和应用. 全书材料丰富、结构清晰、层次分明, 便于不同需求的读者使用.

本书适合于高等院校理工科非数学系本科生、研究生, 及有关科研、工程技术人员作为教材或参考材料使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/季孝达等编. —2 版. —北京: 科学出版社, 2009

(普通高等教育“十一五”国家级规划教材·中国科学技术大学数学教学丛书)

ISBN 978-7-03-025823-6

I. 数… II. 季… III. 数学物理方程-高等学校-教材 IV. O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 188984 号

责任编辑: 赵 靖 杨 然 / 责任校对: 郑金红

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2009 年 10 月第 二 版 印张: 18 1/4

2009 年 10 月第四次印刷 字数: 353 000

印数: 8 001—12 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

第二版前言

本教材的第二版列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材.

本教材 2005 年出版后, 在中国科学技术大学连续使用了 4 届. 根据使用情况, 本次修订, 在保持基本内容、基本结构不变的前提下, 做了较多的改动, 主要有以下几个方面:

(1) 交换了第 1 章中二阶线性方程的分类和一阶线性 (拟线性) 方程通解法两节的次序. 虽然有点切断了物理上三个典型方程的导出到数学上二阶线性方程的分类间的联系, 但从一阶到二阶更符合认识规律和便于教学. 重写了一阶线性 (拟线性) 方程通解法, 使之便于理解、掌握并突出了几何观点. 由于行波解在波动问题里的重要性, 单列为一节.

(2) 改写了 2.2 节固有值问题及 4.3 节一般积分变换简介的相应部分. 将无穷维函数空间中自共轭的固有值问题与有限维内积空间中自共轭算子的固有值问题作比较, 以便读者理解、掌握. 出于同一目的, 把正则奇点的 S–L 定理移到第 3 章奇点情况出现时再讲.

(3) 修改 5.1 节 δ 函数部分. 较严格又尽可能浅显地引进了广义函数, 使有关 δ 函数的性质和运算既满足读者的一般应用需要又有数学上的理论根据.

(4) 在第 6 章中增加泛函的条件极值一节, 使变分方法这一章相对完整, 同时使得变分问题和自共轭线性算子的固有值问题联系起来.

(5) 订正了第一版中已发现的错误.

(6) 增删调整了部分习题.

比较非数学系用的一些同类教材, 本教材的内容在数学上略深和广一些, 以使不同需求的教师、学生和其他读者有选择余地. 为方便读者阅读, 对理论部分, 我们尽量用较通俗的语言阐述. 本教材 5.5 节和第 6 章, 相对独立, 简洁而不失一般性地介绍了广义函数和变分法的基本内容, 推荐给有兴趣的读者阅读.

本次的修订, 得到使用本教材的老师、同学的支持和帮助, 在此一并致谢.

编　者

2009 年 6 月

第一版前言

“数学物理方程”是以物理学和工程技术中提出的偏微分方程为主要研究对象, 介绍求线性偏微分方程精确解方法的基础数学课程. 中国科学技术大学历来重视学生的数理基础，建校以来一直把“数学物理方程”作为物理、力学、电子类专业学生的必修课，且主要由数学系负责开设. 最初的讲义由已故的曾肯成先生亲自执笔, 确定了课程的主要内容和结构. 改革开放以来, 陆续有严镇军、张鄂堂、薛兴恒等教授编写的校内讲义和正式出版的教材问世. 这些教材都比较重视数学思想、数学理论的介绍和扎实的基本功训练. 特别是严镇军教授编写的教材, 已在中国科学技术大学沿用二十多年, 除了经典的分离变量、积分变换方法外, 在同类教材中较早地引入了广义函数概念和基本解方法. 多年来的实践证明, 这样的教学要求使学生有较强的后劲, 特别是从事研究工作的毕业生更感到受益终身.

但是, 一方面, 相对于信息时代科学技术的迅猛发展, 我们 20 多年基本未变的教学内容、手段亟待重新审视和改进; 另一方面, 学制的缩短, 招生人数的增加, 毕业生就业渠道的多样化, 也需要我们的教学作相应的变化. 中国科学技术大学的校、院、系三级领导都对此事非常重视, 近几年来多次召开公共数学教学的研讨会, 并提出了重新编写教材的要求. 我们受系领导委托, 分工进行“数学物理方程”的编写. 三年来, 在我们多年教授该课程的基础上, 经过调研讨论和教学实践的探索, 逐渐形成了这本教材.

本教材的编写, 基于公共基础数学课程的定位, 确定了“以经典方法为基础, 适当融入现代内容; 继承科大理论坚实的传统, 适当加强应用”的原则. 具体处理如下：

(1) 基本保持中国科学技术大学原有教材的内容和结构. 由于变分方法在建立数学模型和求解定解问题两个方面的重要作用, 我们将它列入正文. 又由于前期数学课程的压缩, 在本教材中增添了一阶线性 (拟线性) 偏微分方程的求解, 加强了常微分方程的有关内容.

(2) 将教材分出层次, 以适应不同系别、不同学生的要求. 排列在各章前面的内容是课程的基本要求, 以介绍各种具体解法及解法的思想为主. 带 * 号的节、小节为选讲内容, 一般是进一步的数学理论和物理应用. 穿插在各章节中的楷体小字为阅读材料, 大多是基本内容的延伸及从经典问题向近代问题过渡的窗口, 受篇幅限制, 仅点到为止, 希望引起部分学生的兴趣、关注和思考.

(3) 适当加强了课程与物理的联系, 包括典型例子的物理背景, 重要公式的物

理解释, 以及数学用语与物理用语的联系等.

希望这样的处理能使教师有较大的发挥空间, 学生有较大的选择余地.

由于编者才疏学浅，编写过程中颇有力不从心之感. 虽谨慎从事，不妥仍在所难免, 恳请各位读者指教指正, 以期改进.

严镇军教授编写的同名教材是本教材的重要参考, 本教材的编写得到严教授的大力支持和帮助. 李翊神教授在百忙中审阅了全稿, 提出宝贵意见. 成稿过程中还得到张扬、贺劲松等多位物理、数学教授的热情帮助和数学系、教务处领导的全力支持, 在此一并致谢.

编　者

2005 年 1 月

目　录

第 1 章　偏微分方程定解问题

偏微分方程　是指含有多元未知函数 $u=u(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及其若干阶偏导数的关系式

$$F\left(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\cdots,\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}}\right)=0, \tag{1.0.1}$$

其中, 最高阶导数的阶数 $m=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 为**方程的阶**. 偏微分方程反映了变量 u 及多个自变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 间的相互制约关系, 物理学、力学、工程技术等自然科学, 经济学、人口学等社会科学中很多重要变量关于时间、空间及其他因素的变化规律常常通过偏微分方程来描述. 我们把这些从具体问题, 主要是物理问题中导出的偏微分方程称为数学物理中的偏微分方程, 简称为**数学物理方程**. 当然数学物理方程有时还包括**常微分方程**和**积分方程**.

如果偏微分方程 (1.0.1) 中与未知函数有关的部分是 u 及 u 的偏导数的线性组合, 则称方程 (1.0.1) 是**线性偏微分方程**. 线性偏微分方程是最简单最基本的偏微分方程, 它可以描述很多重要的物理过程, 同时对于更精确反映物理过程的非线性方程的研究也能提供有益的启示. 数学物理中重要的线性偏微分方程是本课程研究的重点.

本章作为开篇, 首先建立物理问题的数学模型, 导出三类典型方程的定解问题; 继而介绍求一阶线性 (拟线性) 偏微分方程和某些二阶线性偏微分方程通解的方法, 并从数学上对二阶线性偏微分方程分类化简, 进一步认识三类典型方程; 最后将给出处理一般线性问题的基本原理.

1.1　三个典型方程的导出

数学物理研究问题的第一步是将物理问题转化为数学问题, 即建立数学模型. 我们将从几个具体问题出发, 导出三个典型方程, 从中了解建立数学模型的一般步骤, 认识三个典型方程的广泛物理背景.

1.1.1　弦的横振动

一根弦在内部张力作用下处于平衡位置, 某个微小扰动引起部分质点的位移, 内部张力又使邻近的部分随之产生位移, 形成波的运动. 要将这样一个物理过程用

数学式子描述, 首先要“去粗存精”, 对弦及其运动作“理想化”假设, 即建立物理模型.

假设弦均匀细长, 从而其横截面可忽略而视作线, 线密度为常数. 又设弦柔软弹性, 可任意弯曲, 张力满足胡克定律. 弦的运动在同一平面内进行, 每个质点的位移都是横向的, 即垂直于弦的平衡位置, 且绝对位移和相对位移都很小. 这些假设是在推导方程过程中自然提出的, 在物理问题中也是合理的.

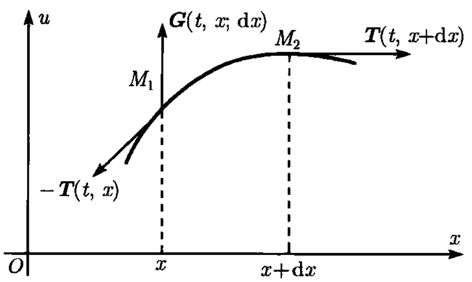

图 1.1.1

取弦在自身张力作用下的平衡位置所在直线为 x 轴, 横向位移方向为 u 轴 (图 1.1.1), 设 t 时刻弦上 x 处的质点相对于平衡位置的横向位移 $u = u(t,x)$ 为未知函数.

采用**微元分析法**. 在弦上任取微元 $[x, x+\mathrm{d}x]$, 微分记号 $\mathrm{d}x$ 表示一个无穷小改变量. 此微元可视作质量为 $\rho\mathrm{d}x$ 的质点, 在 t 时刻的运动遵循**牛顿第二定律**

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}.$$

如图 1.1.1 所示, 微元所受的外力有左端点的张力 $-\boldsymbol{T}(t,x)$, 右端点的张力 $\boldsymbol{T}(t,x+\mathrm{d}x)$, 以及加在微元上的垂直于 x 轴的外力 $\boldsymbol{G}(t,x;\mathrm{d}x)$. 如果线密度 ρ 为常数, t 时刻作用于 x 处的单位长度上的外力, 即外力密度 $g(t,x)$ 已知, 张力 $\boldsymbol{T}(t,x)$ 关于 x 可微, 则微元服从的牛顿第二定律可具体表示为

$$\begin{aligned}\rho\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\boldsymbol{u}^\circ &= -\boldsymbol{T}(t,x)+\boldsymbol{T}(t,x+\mathrm{d}x)+\boldsymbol{G}(t,x;\mathrm{d}x)\\ &\approx \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x}\mathrm{d}x + g(t,x)\mathrm{d}x\boldsymbol{u}^\circ,\end{aligned}$$

其中, 第二个等号忽略了 $\mathrm{d}x$ 的高阶无穷小. 其分量形式为

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0, \tag{1.1.1a}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T_2}{\partial x} + g(t,x), \tag{1.1.1b}$$

其中, T_1, T_2 分别是张力 $\boldsymbol{T}$ 在 $\boldsymbol{x}^\circ$ 和 $\boldsymbol{u}^\circ$ 方向的分量. 这就是弦振动满足的基本偏微分方程组.

由于张力沿弦的切向作用, 我们有第三个方程

$$T_2 = T_1\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.1.1c}$$

代入 (1.1.1a) 式、(1.1.1b) 式, 便可化简得

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(t,x). \tag{1.1.2}$$

在微小横振动的假设下, $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\ll 1$, 张力大小

$$T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}=T_1\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\approx T_1,$$

微元弧长

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}u^2}=\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\approx \mathrm{d}x.$$

在运动过程中, 微元弧长保持不变, 由胡克定律知, 张力大小 $T\approx T_1$ 也不随时间变化, 从而 $T\approx T_1$ 为常数. (1.1.2) 式改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x),\quad a=\sqrt{\frac{T}{\rho}},\quad f(t,x)=\frac{g(t,x)}{\rho}, \tag{1.1.3}$$

称之为**弦的横振动方程**. 其中, 系数 a 反映波的传播速度, 由弦本身性质决定; $f(t,x)$ 则是作用在弦身单位质量上的外力, 当弦自由振动时,$f(t,x)\equiv 0$.

以上推导方程的过程, 实际上就是将微元运动满足的物理定律翻译成用已知函数、未知函数及其偏导数表示的数学式子. 在弦振动问题中的基本物理定律是牛顿第二定律和胡克定律. 由此可见, 凡是弹性介质中微小扰动的传播问题, 如弹性杆的纵振动、弹性膜的横振动、声波在空气中的传播等, 都可用类似方法导出同一类型的方程, 一般表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f(t,\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad n=1,2,3, \tag{1.1.4}$$

其中, $\Delta=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 为**拉普拉斯 (Laplace) 算子**. 此类方程称为**波动方程**, 弦振动方程 (1.1.3) 也因此称为一维波动方程. 对于经典运动问题, 可以建立更一般的固体弹性波方程、流体波方程、电磁波方程等. 在一些重要的特殊情况下, 这些方程都可约化为波动方程 (1.1.4).

需要指出的是, 弦振动方程 (1.1.3) 是在一定的理想化假设下导出的. 如果存在其他不能忽略的因素, 比如弦在黏稠液体中振动, 阻尼必须考虑, 推出的方程中就会增加 $\alpha\frac{\partial u}{\partial t}$ 项. 故任何数学模型都是相对的, 超出一定范围, 则需建立新的模型.

弦振动方程也可利用力学中的哈密顿 (Hamilton) 原理推导, 我们将在第 6 章变分方法中介绍.

1.1.2　热传导问题

热运动是另一类物理过程. 空间某个物体或静止流体内温度分布不均匀, 引起热量流动及温度的变化.

作理想化假设: 设物体由同一介质构成, 且介质均匀分布、各向同性, 从而介质的密度、比热和热传导系数均为常数.

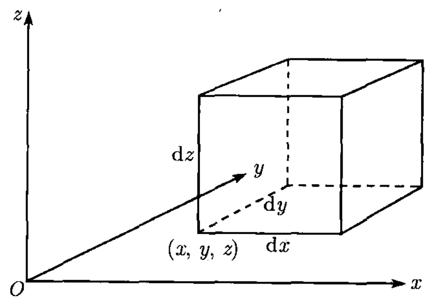

图 1.1.2

在空间取定直角坐标系, 取各点在 t 时刻的温度 $u = u(t,x,y,z)$ 为热运动的表征量. 在介质内任取微元 $\mathrm{d}V = [x, x+\mathrm{d}x] \times [y, y+\mathrm{d}y] \times [z, z+\mathrm{d}z]$, 考察微元 $\mathrm{d}V$ 在时间间隔 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内的温度变化 (图 1.1.2).

根据**能量守恒定律**, 物体温度升高所需热量等于外部流入热量和内部热源产生热量之和. 热量的流动遵循**傅里叶 (Fourier) 热传导定律**: 热量从温度高处流向低处, 沿某方向流动热量的多少与温度在该方向的减少率成比例, 其数学表示式为

$$\boldsymbol{Q}_n = -k(x,y,z;n)\frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n},$$

其中, $\boldsymbol{Q}_n$ 为 $\boldsymbol{n}$ 方向的热流密度矢量, 即单位时间沿 $\boldsymbol{n}$ 方向通过单位面积的热量; $k(x,y,z;n)$ 为介质的热传导系数, 在介质均匀, 各向同性假设下是常数, 记为 k. 如图 1.1.2 所示, 在 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 时间间隔内通过微元的左右面传入的热量为

$$\begin{aligned}&-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(t,x,y,z)}\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z + k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(t,x+\mathrm{d}x,y,z)}\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ \approx\ & k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{(t,x,y,z)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

同样可以求出通过前后和上下面流入的热量分别为

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad 和\ k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

如果介质内部有热源, 其热源密度, 即单位时间单位体积热源流出的热量为 $g(t,x,y,z)$, 则在 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 时间间隔内, 微元内部热源流出热量为

$$g(t,x,y,z)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

而微元温度升高所需的热量为

$$c\rho[u(t+\mathrm{d}t,x,y,z) - u(t,x,y,z)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \approx c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

这些等式中都忽略了高阶无穷小量.

将这些量代入能量守恒定律, 便得方程

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+g(t,x,y,z),$$

即**热传导方程**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(t,x,y,z), \tag{1.1.5}$$

其中, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为三维 Laplace 算子, $a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$, $f(t,x,y,z)=\frac{g(t,x,y,z)}{c\rho}$.

如果考虑侧面绝热杆的温度, 或柱上与高度无关的温度变化, 同样可导出方程 (1.1.5), 只是 Laplace 算子相应地取为一维或二维.

热传导方程的建立基于能量守恒和热传导两条基本物理定律. 像气体扩散、杂质在固体或液体中扩散这些物理过程, 其机理与热传导相似, 都是由浓度的不均匀引起不同物质分子的位置交换, 交换过程中每种物质的总量保持不变. 选取适当的未知函数, 导出的方程与热传导方程有相同形式, 因此也称热传导方程为**扩散方程**.

波动方程和热传导方程分别描述了双向传播和单向扩散两种完全不同的物理过程. 它们都与时间 t 有关, 称为**发展方程**. 如果考虑热传导方程的稳恒状态, 即 $\frac{\partial u}{\partial t}\equiv 0$, 它就成为**泊松 (Poisson) 方程**

$$\Delta u=-\frac{1}{a^2}f(x,y,z), \tag{1.1.6}$$

当 $f(x,y,z)\equiv 0$ 时, 就是**Laplace 方程**(也称**调和方程**)

$$\Delta u=0. \tag{1.1.7}$$

1.1.3 静电场

真空中有电荷分布, 密度为 $\rho(x,y,z)$, 引起的稳恒电场为 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$.

在空间任取区域 V, 其边界面记为 ∂V. 由静电场的**高斯定律**: 通过任意封闭曲面的电通量等于该曲面包围体积内的电荷总量除以介电常数 ε_0, 有

$$\int_{\partial V}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

根据**高斯 (Gauss) 公式**

$$\int_{\partial V}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V,$$

以及 V 的任意性, 得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}. \tag{1.1.8}$$

又在空间任取曲面 S, 其边界线为 L, 由**法拉第定律**: 静电场绕任意闭路的电动势为 0, 有

$$\int_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

根据斯托克斯 (Stocks) 公式

$$\int_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

以及 S 的任意性, 得

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\theta},$$

即静电场 $\boldsymbol{E}$ 无旋. 从而存在位函数 $\varphi(x,y,z)$, 使

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi.$$

代入 (1.1.8) 式, 即得 Poisson 方程

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}, \tag{1.1.6$'$}$$

故也称 Poisson 方程(1.1.6)$'$为**场位方程**. 特别注意, 当空间无电荷分布, 即$\rho(x,y,z) \equiv 0$ 时, 静电场的电位 $\varphi(x,y,z)$ 满足 Laplace 方程 (1.1.7). 当电荷分布与 z 无关, 即 $\rho = \rho(x,y)$ 时, 方程 (1.1.6)$'$ 成为二维场位方程.

这里, 我们根据物理定律先建立积分方程, 再利用场论公式得到微分方程. 当然, 也可用微元分析法直接导出 Poisson 方程 (1.1.6)$'$, 或者对弦振动、热传导问题先建立积分方程, 再得微分方程.

从以上推导可见, 三个二阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + f(t,\boldsymbol{x}) \qquad (\text{波动方程}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(t,\boldsymbol{x}) \qquad (\text{热传导方程}),$$

$$\Delta u = -f(\boldsymbol{x}) \qquad (\text{场位方程}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad n = 1,2,3$$

是物理学中最常遇到的偏微分方程, 其中每一个都描写了多种具体的物理过程, 尽管这些过程的物理背景各不相同, 但其数学表现形式完全一致. 这三个方程是历史上最早系统研究的方程, 也将是本课程重点讨论的对象.

*偏微分方程不仅出现在经典物理中, 比如量子力学中的***薛定谔 (Schrödinger) 波动方程**

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi + u\psi, \tag{1.1.9}$$