高等学校试用教材

高等数学习题课教程

黄松奇 主编

气象出版社

高等数学习题课教程

高等数学习题课教程

主　编：黄松奇

副主编：职桂珍　黄守佳

编　委：(以姓氏笔画为序)

陈东升　段清堂　郭晓丽

黄守佳　黄松奇　职桂珍

周永安

气象出版社

内容简介

本书为配合同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第四版)教材(高教版本)编写而成的。全书共十二章，每章由主要内容和基本要求、例题分析、学习本章应注意的问题、自我检查题、自我检查题答案或提示等部分组成。第一部分基本要求和主要内容的归纳，既简洁又翔实；第二部分选编的例题题型多、覆盖面广，基本上涵盖了各章节的典型题目；第三部分给出了学习本章应注意的问题和易犯的错误，以期加深对这些概念、问题的认识和理解；第四部分自我检查题有助于学生分阶段地掌握有关内容，及时发现知识缺陷并随时补足，从而较好地完成全部课程；第五部分自我检查题答案或提示附有说明、简答或提示，指出解题的思路，值得注意的方法。书后附有1999～2001年各年硕士研究生入学考试数学试卷及答案。

本书可作为各类高等工科院校"高等数学习题课"教材，也可作为高校师生的教学参考读物，还可作为自学高等数学的读者的指导书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程/黄松奇主编. —北京：气象出版社，2001.8.30

ISBN 7-5029-3219-4

Ⅰ.高… Ⅱ.黄… Ⅲ.高等数学-高等学校-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 055920 号

责任编辑：张斌　　终审：顾仁俭

气象出版社 出版发行

(北京市海淀区中关村南大街46号　邮编：100081)

河南农业大学印刷厂印刷

*　*　*

开本：850×1168　1/32　印张：15.75　字数：400千字

2001年9月第一版　　2001年9月第一次印刷

印数：1～2000册

ISBN 7-5029-3219-4/O·0089

定价：22.00元

序

高等数学课程是高等工科院校的一门重要的基础理论课程，其思想和解决问题的方法已广泛渗透到诸多领域。由于它学时多，覆盖面宽，影响面广，其教学质量不仅对工科院校各专业后续课程的学习有着深远的影响，而且其知识与研究方法也可内化为学习者的科学素养，成为培养学生严谨科学态度、不断探索创新的科学精神的品格与个性有极重要的作用，因此，教好、学好这门课程是十分必要的、重要的。但近年来由于教学时数的压缩和大面积扩大招生等因素，使以讲授方法为主的高等数学习题课这一教学环节在有些院校受到了一定的影响，初学者在学习中感到较为吃力。为了帮助学生克服学习高等数学的困难，加大习题课教学的强度和力度，确保习题课的教学质量，并使之逐步走上规范化，以进一步提高高等数学课程的教学质量，郑州轻工业学院数学教研室黄松奇等部分教师经过充分地酝酿和准备，集各位编者的多年的教学经验，编写了这本《高等数学习题课教程》，这是值得鼓励的。

本书以高等工业院校工科数学课程教学指导委员会最新修订的教学基本要求为依据，结合我国目前使用面最广的同济大学编《高等数学》(第四版)，以基本概念、基本运算和基本应用为出发点，在对各章节在提出明确的基本要求的同时，就主要内容进行了简要的概括；书中的"学习本章应注意的问题"是作者多年教学经验的积累，对消化和深入理解课程内容颇有帮助；"典型例题分析"可以帮助理解解题思路，掌握解题方法和技巧，供教师选讲和学生自学；"自我检查题"有助于学生自我检查学习效果，提高综合运用所学知识、分析和解决问题的能力。

本书既可作为工科院校"高等数学习题课"的教材，也可作为高校师生的教学参考读物，并可作为自学高等数学的读者的指导书。笔者相信，本书的出版，必将会对高等数学习题课的建设，为提高高等数学课程的教学质量，提高学生科学素质发挥良好的作用。

郑州轻工业学院副院长、教授　张鑫

2001.5.27

主编简介

黄松奇，男，生于 1963 年 11 月，1984 年毕业于吉林大学数学系，现任郑州轻工业学院应用数理系数学教研室主任。本人长期从事高等数学教学工作和考研辅导班高等数学课程的辅导工作，对高等数学课程的内容和教学、教法有较深入的研究和独到的见解，积累了较为丰富的经验。先后发表相关论文多篇。曾荣获郑州轻工业学院教学优秀奖等多项奖励。

前　　言

高等数学习题课是完成高等数学教学基本要求，帮助学生消化、巩固和深入理解教学内容，掌握解题技巧，培养学生分析和解决问题能力等方面的一个重要的实践性教学环节，为了确保习题课的教学质量并使习题课教学逐步走上规范化，以进一步提高高等数学课程的教学质量，使高等数学课程的教学水平再上一个新台阶，我们决定编写“高等数学习题课教程”一书。

本书以高等工业院校工科数学课程教学指导委员会最新修订的教学基本要求为依据，结合我国目前使用面最广的同济大学编《高等数学》(第四版)，对各章节在提出明确的基本要求的同时，就主要内容进行了简要的概括；书中的学习本章应注意的问题是作者们多年教学经验的积累，对消化和深入理解教学内容颇有帮助，典型例题分析可以帮助理解解题思路，掌握解题方法和技巧，供教师选讲和学生自学；自我检查题有助于学生自我检查学习效果，提高综合运用所学知识、分析和解决问题的能力。

本书在编写中注意到以下几点：

1. 努力贯彻高等工业院校《数学课程教学基本要求》

2. 按章节安排内容，建议每次习题课包括：基本要求和主要内容，例题分析，学习本章应注意的问题

3. 实践性和灵活性是习题课教学的一个重要的特点，方式方法根据内容和对象的不同而灵活多样，可根据具体情况适当增删调整，本书采用不同的风格处理各部分内容，有的章节写的全面具体，例题较多，有的章节重点突出，内容简练，有的内容采用表格的形式加以总结，也有的章节通过例题的选取加以概括。建议任课教师根据学生的具体情况，灵活处理各部分内容，可将重点放在例题

分析和学习本章应注意的问题两部分，学习本章应注意的问题可采用提问和讨论的形式进行，例题分析部分教师可选部分立例题加以讲解，另一部分可让学生自学完成。

4. 本书结构严谨，条理清晰，综合性较强，并有很强的针对性和可操作性，说理浅显，便于自学，可作为高等工科院校和各类成人高等教育大学一年级本、专科学生“高等数学习题课”试用教材，也可作为自学的辅导读物，也可作为大学其它年级复习高等数学的用书，还可作为教师的参考用书。书后附有 1999 年全国攻读硕士研究生入学考试数学试题及 2000、2001 年试题及答案。

本书第一、三章由段清堂编写，第二、四、九章由职桂珍编写，第五章由周永安编写，第六、八章由黄松奇编写，第七章由郭晓丽编写，第十、十二章由黄守佳编写，第十一章由陈东升编写。最后由黄松奇统一定稿。书中插图由郭晓丽和黄松奇绘制。

本书在编写过程中得到郑州轻工业学院教材建设委员会、郑州轻工业学院教材科、郑州轻工业学院数学教研室的大力支持和帮助，郑州轻工业学院副院长张鑫教授也给予极大的关心和指导，并欣然为本书作序，在此一并表示衷心的感谢。由于时间仓促，加之编者水平所限，错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　　者

2001.5.24 于郑州轻工业学院

目　　录

第一章　函数与极限

一、基本要求和主要内容

1. 函数

(1) 理解函数概念：设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集。如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$。D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量。

(2) 了解函数的几个特性

① 有界性；

② 单调性；

③ 奇偶性；

④ 周期性。

(3) 了解反函数的概念

(4) 初等函数

① 掌握基本初等函数(包括幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数)的定义区间、对应法则、值域及图形。

② 复合函数：若 $y=f(u),u\in D_1,u=\varphi(x),x\in D_2,W_2=\{u|u=\varphi(x),x\in D_2\},W_2\subset D_1$，则 $y=f(u)=f[\varphi(x)]$称为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$的复合函数。
其中 $x\in D_2$，u 为中间变量。

③ 初等函数，由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次的复合步骤所构成的并可用一个式子表示的函数称为初等函数。

④ 了解双曲函数及反双曲函数。

2. 正确理解数列的极限

(1) 定义：对 $\forall \varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-a|<\varepsilon$成立，则称 x_n 收敛于 a，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

注意：N 与 n 无关，只与 ε 有关。

(2) 收敛数列的性质

① (极限唯一性)数列 x_n 不能收敛于两个不同的数。

② (极限有界性)如果数列 x_n 收敛，那么数列 x_n 一定有界。

3. 正确理解函数的极限

(1) 定义见下页表格

(2) 定理

① 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么就存在点 x_0 的某一去心邻域，当 x 在该邻域时，就有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)。

② 若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在，那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$)。

③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$。

④ 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，且当 $0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)时，$f(x)\neq 0$，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{1}{f(x)}=\infty,$$

⑤ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A\Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小。

	$f(x)\to A$	$f(x)\to 0$	$f(x)\to\infty$
$x\to x_0$ 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，恒有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限为 A	任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，恒有 $\|f(x)\|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷小	任给 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，恒有 $\|f(x)\|>M$，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时无穷大
$x\to\infty$ 记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	任给 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，恒有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 A	任给 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，恒有 $\|f(x)\|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小	任给 $M>0$，总存在 $X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，恒有 $\|f(x)\|>M$，称 $f(x)$ 当 $x\to {x_0}^+$ 时为无穷大
$x\to x_0+0$ 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 或 $f(x_0+0)$	任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 当 $x\to {x_0}^+$ 时的右极限为 A	任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $\|f(x)\|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 当 $x\to {x_0}^+$ 时为无穷小	任给 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $\|f(x)\|>M$，称 $f(x)$ 当 $x\to {x_0}^+$ 时为无穷大
$x\to x_0-0$ 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 或 $f(x_0-0)$	任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限为 A	任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $\|f(x)\|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时为无穷小	任给 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $\|f(x)\|>M$，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时为无穷大

4. **掌握极限的运算**

(1) 运算法则

① 若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x),$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

当 $B\neq0$ 时，$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

② 有限个无穷小的和也是无穷小。

③ 有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

④ 若 $P(x)$ 是多项式，则 $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

(2) 极限存在准则

① 设在 x_0 的某一邻域内（x_0 可以除外），有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)，且\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=A,$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

② 单调有界数列必有极限。

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e},\quad 或\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}。$$

(4) 无穷小的比较

① 了解高阶、低阶、同阶无穷小，等价无穷小

② 会用等价无穷小的代换定理：

$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$。如果 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则有 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$，注意分子，分母分别整体代换。

③ 当 $x\to0$ 时，有等价无穷小：

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ln(1+x)\sim x,\ \mathrm{e}^x-1\sim x,$$

$$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x。$$

5. **理解函数的连续性**

(1) 概念：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连

续，其中包含三点：

① $f(x)$在 x_0 的某一邻域内（包含 x_0）有定义，即 $f(x_0)$存在；

② 当 $x \to x_0$ 时，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在；

③ 二者相等，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。

(2) 左连续、右连续

左连续即 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，右连续即 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

若 $f(x)$在(a,b)上每一点都连续，左端点处右连续，右端点处左连续，则称 $f(x)$在$[a,b]$上连续。

(3) 等价定义

① 函数 $y=f(x)$在 x_0 的某一邻域内有定义，若$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，则称 $f(x)$在 x_0 处连续。

② 函数 $y=f(x)$在 x_0 的某一邻域内有定义，$\forall\ \varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$ 时，总有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$在 x_0 处连续。

6. 会判断间断点及其分类

若函数 $f(x)$不满足 5－(1)中三种情况之一，则称 $f(x)$在 x_0 不连续，x_0 为不连续点，即间断点。

对于间断点有以下分类：

$$
\begin{cases}
\text{I 类} \\
\left.\begin{array}{l} f(x_0+0) \\ f(x_0-0) \end{array}\right\} \text{都存在} \begin{cases} \text{可去间断点：} f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0) \\ \text{（或 } f(x_0) \text{ 不确定）} \\ \text{跳跃间断点：} f(x_0+0)\neq f(x_0-0) \end{cases} \\
\text{II 类} \\
\quad \text{不是第 I 类间断点的任何间断点是第 II 类间断点。} \\
\quad \text{例如：无穷间断点、振荡间断点属于第 II 类间断点。}
\end{cases}
$$

7. 理解初等函数的连续性

(1) 设函数 $f(x)$，$g(x)$都在同一区间上连续，则 $f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$在此区间也连续。

(2) 设 $z=\varphi(x)$在 x_0 处连续，$z_0=\varphi(x_0)$，$y=f(z)$在 z_0 处连

续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续。由此解决了复合函数在连续点求极限问题，$\lim[f(\varphi(x))]=f[\lim\varphi(x)]$。

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单值、单调连续，且 $f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，则 $x=\varphi(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也是单调连续的。

(4) 初等函数在其定义区间内都是连续的。

8. 了解闭区间上连续函数的性质

(1) 最大、最小值定理

在闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 在该区间至少取得最大值、最小值各一次。

(2) 介值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$，$f(b)$ 之间的任一实数 c，至少有一点 $\zeta\in(a,b)$，使 $f(\zeta)=c$。

特别地：如 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内至少有一点 ζ，使得 $f(\zeta)=0$。

二、例题分析

例 1.1 用数列极限定义证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2+2n}=3$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>1)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$

证明 (1) 要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2+2n}=3$，只须证 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，使当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{3n^2}{n^2+2n}-3\right|<\varepsilon。$$

事实上，由于 $\left|\dfrac{3n^2}{n^2+2n}-3\right|=\dfrac{6n}{n^2+2n}<\dfrac{6}{n}$，因此，$\forall\ \varepsilon>0$，只要 $\dfrac{6}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{6}{\varepsilon}$，即恒有 $\left|\dfrac{3n^2}{n^2+2n}-3\right|<\varepsilon$。故 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N=\left[\dfrac{6}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{3n^2}{n^2+2n}-3\right|<\varepsilon$，即