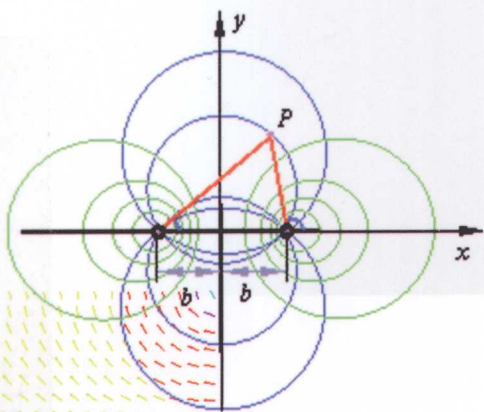
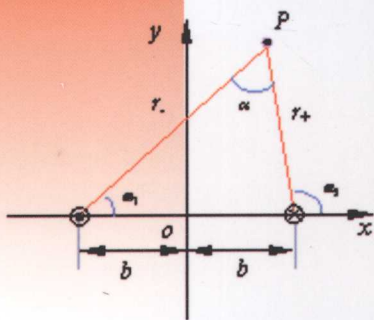


普通高等教育“十一五”电气信息类规划教材

DIANQI
XINXILEI

工程电磁场 与电磁波基础

■ 张惠娟 杨文荣 李玲玲 等编著



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



免费
电子课件

普通高等教育“十一五”电气信息类规划教材

工程电磁场与电磁波基础

张惠娟 杨文荣 李玲玲 编著
赵全明 吕殿利 王志华

颜威利 主审



机械工业出版社

本书主要讲述电磁场与电磁波的基本理论和分析方法。具体内容包括：电磁场的数学与物理基础知识，静电场，恒定电场，恒定磁场，时变电磁场，正弦平面电磁波的传播，导行电磁波，电磁辐射，工程电磁场数值分析初步。静电场部分主要突出边值问题的建立及其求解，尤其对镜像法做了较为详尽的介绍；时变场部分主要对均匀平面电磁波的传播规律、电磁波的极化特性、电磁能量的传播、反射与折射规律等进行了详细讨论；最后简单介绍了工程上常用的两种电磁场数值分析方法，为后续专业课程的学习奠定初步基础。

本书在叙述上由浅入深、循序渐进，强调理论与工程实际相结合，培养学生建立场的思维方式、学会应用场的方法分析电磁现象。

本书可作为高等院校电气、生物医学工程、自动化、电子信息、通信、微波工程等电类工程专业的本科教材，也可供有关工程技术人员参考。

本书配有免费电子课件，欢迎选用本书作教材的老师登录 www.cmpedu.com 下载或发邮件到 yu57sh@163.com 索取。

图书在版编目 (CIP) 数据

工程电磁场与电磁波基础/张惠娟等编著. —北京: 机械工业出版社, 2009. 9

普通高等教育“十一五”电气信息类规划教材
ISBN 978-7-111-27352-3

I. 工… II. 张… III. ①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 IV. 0441. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 090686 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 于苏华 版式设计: 霍永明

责任校对: 申春香 封面设计: 鞠 杨

责任印制: 李 妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2009 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 19.75 印张 · 488 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-27352-3

定价: 34.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

销售服务热线电话: (010) 68326294

购书热线电话: (010) 88379639 88379641 88379643

编辑热线电话: (010) 88379728

封面防伪标均为盗版

前 言

电磁场与电磁波理论是电气、生物电磁工程、自动化、电子信息、通信、微波工程等电类专业最重要的专业基础课程之一。通过本课程的学习，可以为后续专业课（诸如电机学、高低压电器、微波技术等）的学习以及从事电磁工程研究奠定必要的基础。

在多年的教学实践中，作者发现学生虽然在学习本课程之前学过数学中的场论，但是仍然不能将场论的方法与电磁理论有机地结合起来，也就是说，不能很好地建立“场”的概念，以“场”的思维建立电磁理论数学模型。所以，本书第1章即回顾、归纳物理电磁学已有的电磁场基础知识，以及进一步学习电磁场电磁波理论所需要的标量场和矢量场分析的方法、定理、定律，帮助学生用“场”的世界观建立场论与电磁场麦克斯韦方程之间的联系，明确电磁场分析中的两个重要定理——亥姆霍兹定理和唯一性定理的内容与作用，为利用场的方法分析后续各章电磁规律奠定必要的数学基础。

在随后的各章分析中紧紧围绕亥姆霍兹定理与唯一性定理分别进行，其中对于静电场、恒定电场、恒定磁场这三章静态场部分采用了分析、对比的方法进行讨论与总结，主要突出边值问题数学模型的建立方法，归纳总结边值问题的求解规律，尤其对镜像法做了较为详尽的介绍。

后面第5~8章分别介绍了时变电磁场、正弦平面电磁波的传播、导行电磁波、电磁辐射。时变场部分重点对均匀平面电磁波的传播规律、电磁波的极化特性、电磁能量的传播、反射与折射规律等进行了详细讨论；第9章工程电磁场数值分析初步简单介绍了工程上常用的两种电磁场数值分析方法，为后续专业课程的学习奠定初步基础。

河北工业大学电磁场课题组早在20世纪70年代就开展了电磁场数值计算与电磁场磁技术应用的研究，是我国开展此类研究最早并取得重大成果的著名学术团队之一。本书在颜威利教授组织、指导下历经两年时间完成，初稿完成后在信息学院与电气学院不同专业的两届学生中使用，在征求学生意见的基础上做了相应的修正。

作者结合多年电磁场课程的教学经验和从事电磁场理论与应用研究的成果，从读者学习和掌握知识的规律出发，对全书章节和具体内容进行了精心安排，力图体现联系现代电磁场理论前沿、贴近工程实践、方便读者自学的特点，使本书在体系上有所创新。

作为专业基础课程的教材，本书对涉及的概念、原理、定律和相应的数学

表达式均给出了明确的定义和说明。精心设计了大量的例题，以加深读者对电磁场理论的理解，提高学生分析和解决电磁场典型问题的能力。

本书共分为9章，张惠娟教授编写第1、2、6章，杨文荣教授编写第3、4、9章，李玲玲教授编写第5、8章，赵全明教授编写第7章。吕殿利、王志华博士编写各章习题。全书由张惠娟教授统稿。加*号的部分为选学内容。

在本书的写作过程中，颜威利教授对书稿进行了仔细的审阅并提出了许多宝贵的修改意见，在此谨向颜威利教授表示衷心的感谢。此外，作者在写作中参考了大量国内外著名的教材与参考资料，在此谨向这些作者表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中难免存在错误和不当之处，敬请使用本书的读者不吝赐教。

作者

2009年春于天津

目 录

前言	强度与电位	22
第 1 章 电磁场的数学与 物理基础知识	2.1.1 静电场的源——电荷与 分布电荷	22
1.1 电磁场与矢量代数	2.1.2 电场强度及其积分公式	24
1.1.1 矢量及其表示方法	2.1.3 静电场的守恒性与电位	26
1.1.2 矢量相加	2.2 高斯定理	33
1.1.3 矢量的乘积运算	2.2.1 真空中的高斯定理	34
1.2 正交曲面坐标系	2.2.2 静电场中的导体及其特性	36
1.3 标量场及其梯度	2.2.3 静电场中介质的极化 及其极化特性	36
1.3.1 标量场的等值线或等值面	2.2.4 介质中的高斯定理	40
1.3.2 标量场的方向导数与梯度	2.3 静电场的基本方程与场域 分界面的衔接条件	43
1.4 矢量场的通量、散度与高斯 散度定理	2.3.1 单一媒质中静电场的 基本方程	43
1.4.1 矢量场的矢量线	2.3.2 两种媒质分界面上场量的 衔接条件	44
1.4.2 矢量场的通量	2.4 静电场的边值问题	50
1.4.3 矢量场的散度	2.4.1 静电场的边值问题概述	50
1.4.4 矢量场高斯散度定理	2.4.2 直接积分法	54
1.5 矢量场的环量、旋度与 斯托克斯定理	2.4.3 分离变量法	59
1.5.1 矢量场的环量	2.4.4 镜像法	66
1.5.2 矢量场的旋度	2.5 静电场理论分析的工程应用	79
1.5.3 矢量场斯托克斯定理	2.5.1 静电场分析应用之一: 电容	80
1.6 亥姆霍兹定理	2.5.2 静电场分析应用之二: 电场能量	84
1.6.1 矢量场的分类	2.5.3 静电场分析应用之三: 电场力	86
1.6.2 矢量场常用梯度、散度、 旋度的关系定理	习题 2	89
1.6.3 矢量场亥姆霍兹定理	第 3 章 恒定电场	94
1.7 电磁场麦克斯韦方程组与 电磁场的分类	3.1 导电媒质中的电流	94
1.7.1 电磁场麦克斯韦方程组	3.1.1 电流与电流密度	94
1.7.2 电磁场的分类及其特点	3.1.2 欧姆定律的微分形式	96
1.8 矢量场唯一性定理	3.1.3 焦耳定律的微分形式	98
习题 1	3.1.4 超导电性	99
第 2 章 静电场		
2.1 静电场的基本物理量——电场		

3.2 恒定电场的基本方程	99	4.4.5 矢量磁位的边值问题	139
3.2.1 电流连续性方程	99	4.4.6 磁场中的镜像法	141
3.2.2 电源电动势和局外场强	100	4.5 恒定磁场分析应用之一:	
3.2.3 电场强度的闭合路径线积分	101	电感	142
3.2.4 恒定电场的基本方程	101	4.5.1 自感	142
3.3 导电媒质分界面的		4.5.2 互感	145
衔接条件	102	4.5.3 诺依曼公式	147
3.3.1 两种导电媒质分界面的		4.6 恒定磁场分析应用之二:	
衔接条件	102	磁场能量及磁场力	148
3.3.2 恒定电场的边值问题	103	4.6.1 恒定磁场中的能量	148
3.3.3 两种特殊分界面的衔接条件	103	4.6.2 磁场能量的分布和密度	150
3.4 导电媒质中恒定电场与静		4.6.3 磁场力	152
电场的比拟	106	*4.7 磁路及其计算	155
3.5 电导和接地电阻	107	4.7.1 铁磁质和非铁磁质的分界面,	
3.5.1 电导和电阻	107	磁路	155
3.5.2 接地电阻	111	4.7.2 磁路定律	156
3.5.3 跨步电压	112	4.7.3 磁屏蔽	160
习题3	113	习题4	160
第4章 恒定磁场	116	第5章 时变电磁场	163
4.1 磁感应强度, 磁通连续性		5.1 电磁感应定律	163
定理	116	5.1.1 静态电磁场与时变电磁场的	
4.1.1 安培力定律, 磁感应强度	116	特性	163
4.1.2 磁场的叠加性	118	5.1.2 法拉第电磁感应定律	164
4.1.3 磁通和磁通连续性定理	120	5.2 位移电流与全电流定律	167
4.2 安培环路定律	121	5.3 时变电磁场的基本	
4.2.1 真空中的安培环路定律	121	方程——麦克斯韦方程	170
4.2.2 物质的磁化, 一般形式的安培		5.4 时变电磁场的边界条件	175
环路定律	123	5.5 时变电磁场的波动方程	180
4.2.3 铁磁材料的静态磁滞回线	129	5.5.1 波动方程的一般形式	180
4.3 恒定磁场的基本方程,		5.5.2 正弦电磁场及其波动方程的	
分界面上的衔接条件	130	复数形式	181
4.3.1 恒定磁场的基本方程	130	5.6 时变电磁场的动态位及其	
4.3.2 分界面上的衔接条件	130	达朗贝尔方程	184
4.4 恒定磁场的位函数及		5.6.1 动态矢量位与标量位函数	184
其边值问题	132	5.6.2 动态位的达朗贝尔方程	184
4.4.1 标量磁位	132	5.6.3 动态位的积分解与其	
4.4.2 标量磁位的边值问题	134	滞后现象	187
*4.4.3 部分标量位	135	5.7 坡印廷定理与坡印廷矢量	191
4.4.4 矢量磁位	135	5.8 准静态电磁场	197

5.8.1 电准静态场	197	6.6.3 两种介质分界面上的斜入射	235
5.8.2 磁准静态场	198	6.6.4 全反射与全折射	238
习题5	201	习题6	244
第6章 正弦平面电磁波的传播	204	第7章 导行电磁波	247
6.1 正弦均匀平面电磁波	204	7.1 TEM波、TE波、TM波	247
6.2 平面电磁波在无限大理想 介质中的传播	205	7.2 均匀传输线方程及其正弦 稳态分析	250
6.2.1 一维波动方程的解及 其物理意义	205	7.2.1 传输线方程	251
6.2.2 理想介质中的正弦均匀平面 电磁波的传播特性	206	7.2.2 正弦稳态下均匀传输线 方程及其解	253
6.2.3 平面电磁波的能量密度 与能流密度	208	7.2.3 无损均匀传输线及其 阻抗匹配	255
6.3 平面电磁波在无限大导电 媒质中的传播	211	7.3 波导中的电磁波	258
6.3.1 导电媒质中正弦均匀平面电磁波的 传播特性	211	7.3.1 矩形波导中的电磁波	259
6.3.2 强导电媒质中的电磁波	214	7.3.2 圆柱形波导中的电磁波	265
6.3.3 弱导电媒质中的电磁波	216	7.4 波导中的传输功率	270
6.3.4 导电媒质中正弦均匀平面 电磁波的能量	217	7.5 谐振腔	271
6.4 平面电磁波的极化	217	习题7	277
6.4.1 直线极化	218	第8章 电磁辐射	279
6.4.2 圆极化	219	8.1 电磁波的辐射	279
6.4.3 椭圆极化	219	8.2 电偶极子的辐射	280
6.4.4 极化旋转方向的判断方法	219	8.3 磁偶极子的辐射	283
6.5 平面电磁波在有界媒质中的 传播——垂直入射	222	8.4 对偶原理	285
6.5.1 介质与理想导体表面的 垂直入射	222	习题8	287
6.5.2 两种导电媒质分界面的 垂直入射	225	第9章 工程电磁场数值分析初步	288
6.5.3 多种媒质分界面的垂直入射	228	9.1 位场的边值问题	288
6.6 平面电磁波在有界媒质中的 传播——斜入射	230	9.2 有限差分法	288
6.6.1 沿任意方向传播的 平面电磁波	231	9.2.1 差分格式	289
6.6.2 介质与理想导体表面的 斜入射	233	9.2.2 差分方程组的解	290
		9.3 有限元法	292
		9.3.1 变分方法和算子概念	293
		9.3.2 静电场泊松方程边值问题等价的 变分问题	293
		9.3.3 单元剖分和有限元离散	294
		附录	297
		附录A 常用公式	297
		附录B 部分习题参考答案	298
		参考文献	308

第 1 章

电磁场的数学与物理基础知识

古语说：“工欲善其事，必先利其器”。场论是电磁场分析必不可少、而且是强有力的基础工具，因此本书开篇第 1 章将简要回顾、归纳电磁场学习所需要的矢量场和标量场分析的方法、定理、定律，初步了解场论与电磁场麦克斯韦方程之间的联系，为后续各章利用场的方法分析电磁规律奠定必要的数学基础。

1.1 电磁场与矢量代数

“场”是一种世界观，用场的方式来研究自然界和社会现象已成为人类研究自然与社会的重要方法。牛顿的万有引力定律表明，任何两个物质之间都存在着力的相互作用，而这种力的存在并不需要物体之间的接触，承载这种作用力的载体就是场（field），称之为力场。正是由于这种场的存在才使得诸如苹果之类的物体和人类一样被地球吸住而不是坠入太空。此外，还有温度场、压力场、速度场等形形色色的场。同样，带电体之间也存在着特殊的作用场，这就是电场和磁场。

一个确定区域中的场定义是：系统中某物理量在该区域的一种分布。如果被描述的物理量是标量，则定义的场被称为标量场（scalar field）；如果被描述的物理量是矢量，则定义的场被称为矢量场（vector field）。例如，大家已经十分熟悉的电位是一个标量场函数，对一个指定了参考电位点的系统而言，空间任一点的电位相对于参考电位点或高或低或正或负，均有一个确定大小的电位值与之对应，所以说电位的分布是一个标量场；而电场强度、磁场强度等物理量既有大小、又有方向，因此描述它的场就是矢量场。

场不仅具有空间属性，还具有时间属性。如果一个物理系统的状态只按空间分布，不随时间变化，也就是说，物理系统的状态是静态的，由此所定义的场也是静态的，这样的场称为静态场，如静电场、恒定电场、恒定磁场等；如果一个场的场量不仅按空间分布，还随时间变化，这样的场分布是动态的，这类场称为动态场或时变场，如时变电磁场、电磁波等。

标量场可用标量函数来描述，矢量场则用矢量函数来描述。

1.1.1 矢量及其表示方法

本文用大写加粗的黑斜体字母表示矢量，用不加粗的斜体字母表示标量或矢量的模值。如任一矢量 \mathbf{A} 可用其大小和方向表示为

$$\mathbf{A} = A\mathbf{e}_A \quad (1-1)$$

式中, A 为矢量 \mathbf{A} 的大小 (或称模值); \mathbf{e}_A 为矢量 \mathbf{A} 的单位长度方向, 称为单位矢量 (unit vector)。一般也可利用矢量 \mathbf{A} 及其模值 A 表示该矢量方向的单位矢量为

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (1-2)$$

例如, 在直角坐标系中, 矢量 \mathbf{A} 的三个分量分别表示为 A_x 、 A_y 、 A_z , 利用三个单位矢量 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z 可以将其表示成 $\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z = A\mathbf{e}_A$, 其中

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad \mathbf{e}_A = \frac{A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1-3)$$

1.1.2 矢量相加

矢量相加 (叠加) (vector addition) 要遵循平行四边形法则, 矢量相加后的各坐标分量是每个矢量对应坐标分量之和, 其相加的结果仍是矢量。如

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{e}_x + (A_y + B_y)\mathbf{e}_y + (A_z + B_z)\mathbf{e}_z$$

与标量的加减运算相对应, 有时也用“矢量的加减运算”来表示两个矢量之间的叠加运算。一个矢量 $\mathbf{A} = A\mathbf{e}_A$, 与之大小相同、方向相反的矢量应写作

$$-\mathbf{A} = A(-\mathbf{e}_A)$$

即表明该矢量的大小是“ A ”, 方向为“ $-\mathbf{e}_A$ ”。这样两个矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 相减 (vector subtraction) 即为 \mathbf{A} 矢量与 $(-\mathbf{B})$ 矢量的相加, 即

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = (A_x - B_x)\mathbf{e}_x + (A_y - B_y)\mathbf{e}_y + (A_z - B_z)\mathbf{e}_z$$

矢量的叠加在电路理论的相量分析中也有应用, 只是表示方法略有不同。

类似的, 一个矢量与一个标量 α (实数) 相乘, 可写作

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha A_x\mathbf{e}_x + \alpha A_y\mathbf{e}_y + \alpha A_z\mathbf{e}_z = \alpha A\mathbf{e}_A$$

若 $\alpha > 0$, 则矢量 $\alpha\mathbf{A}$ 与原矢量 \mathbf{A} 同方向, 大小是原矢量 \mathbf{A} 的 α 倍, 若 $\alpha < 0$, 则模值是原矢量 \mathbf{A} 的 $|\alpha|$ 倍不变, 方向与原矢量 \mathbf{A} 相反。

1.1.3 矢量的乘积运算

两个标量 a 与 b 相乘, 标量参数之间可用“ \times ”号、“ \cdot ”号或什么符号也不加, 都代表二者之间的倍数关系, 即

$$a \times b = a \cdot b = ab$$

两个矢量之间用“ \times ”号和“ \cdot ”号分别表示叉积和点积两种不同的运算形式, 而两个矢量之间无任何符号并列放置则无任何意义, 这是由矢量的性质决定的。可见矢量的运算要比标量的运算更复杂, 要注意区分。

1. 矢量的标量积

任意两个矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的标量积 (scalar product), 仍然是一个标量, 它等于两个矢量的大小与它们夹角的余弦之乘积, 记为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta \quad (1-4)$$

标量积又称为点积或内积, 其物理意义为一个矢量在另一个矢量上的投影与另一矢量大小的乘积。显然, 相互垂直的矢量之间投影为零。由此不难得出结论, 如果两个大小不为零

的矢量的标量积为零, 则二者一定相互垂直。或者说, 两个相互垂直的矢量其点积一定等于零。例如, 直角坐标系中的单位矢量有下列关系式:

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1$$

任意两矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的标量积, 在直角坐标系下用矢量的三个分量表示则为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

标量积服从交换律 (commutative law) 和结合律 (associative law), 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-5)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1-6)$$

2. 矢量的矢量积

两个矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的矢量积 (vector product) 还是一个矢量。矢量积的大小等于两个矢量的大小与它们夹角 θ 的正弦之乘积, 一般规定 $|\theta| \leq \pi$ 。矢量积的物理意义为两个矢量所构成的平行四边形的面积, 其方向垂直于矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 组成的平面, 记为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{e}_c \quad (1-7)$$

3 个矢量之间的方向符合右手螺旋法则: 伸出右手, 四指指向 \mathbf{A} (被乘) 矢量的方向, 从 \mathbf{A} 矢量沿着小于 180° 的方向向 \mathbf{B} (乘) 矢量的方向旋转, 拇指所指的方向即为 \mathbf{C} (乘积) 矢量的方向。该法则可用单位矢量 \mathbf{e}_A 、 \mathbf{e}_B 、 \mathbf{e}_C 表示为 $\mathbf{e}_C = \mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_B$ 。

矢量积又称为叉积 (cross product)。如果两个不为零的矢量的叉积等于零, 则这两个矢量必然相互平行。或者说, 两个相互平行的矢量其叉积一定等于零。

例如, 直角坐标系中的单位矢量有下列关系式:

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0$$

矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的叉积在直角坐标系下可用行列式形式展开为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-8)$$

矢量的叉积不服从交换律, 但服从结合律, 有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1-9)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1-10)$$

如

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

在磁场分析中经常要利用电流矢量和距离矢量的叉积判断磁场的方向, 因此要熟练掌握利用右手螺旋法则判断矢量叉积的方向这种方法。

3. 矢量的混合积与三重积

矢量 \mathbf{A} 与矢量 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 之间的乘积也分为点积和叉积两种运算形式, 其中点积 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 称为三个矢量的混合积或标量三重积, 其运算性质为

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1-11)$$

其大小等于三个矢量构成的空间六面体的体积。在直角坐标系下可用行列式形式展开为

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1-12)$$

矢量 \mathbf{A} 与矢量 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 之间的叉积 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 称为三个矢量的三重积, 其运算可展开为

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1-13)$$

1.2 正交曲面坐标系

为了分析场在空间中的分布和变化规律必须引入坐标系。一般常根据被研究对象的几何形状的不同采用不同的坐标系, 使问题得到简化。设正交曲面坐标系中三个坐标变量分别为 u_1 、 u_2 、 u_3 , 如图 1-1 所示, 空间任意一点的坐标即由三个相互垂直的曲面描述, 三个曲面的法向即为其基本单位坐标矢量 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 且构成右手系 (right-handed set): $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ 。

电磁场分析中经常要用到矢量的线积分、面积分, 标量的体积分等, 因此, 有必要讨论其相应的微分元。

矢量线元定义为

$$d\mathbf{l} = dl_1\mathbf{e}_1 + dl_2\mathbf{e}_2 + dl_3\mathbf{e}_3 \quad (1-14)$$

数学上把长度元与坐标元之比定义为拉梅 (Lame) 系数, 或称度量系数, 表示为

$$h_i = \frac{dl_i}{du_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-15)$$

利用拉梅系数可将矢量线元表示为

$$d\mathbf{l} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3 \quad (1-16)$$

矢量面积元定义为

$$d\mathbf{S} = dS_1\mathbf{e}_1 + dS_2\mathbf{e}_2 + dS_3\mathbf{e}_3$$

其中, 标量面积元 dS_1 、 dS_2 、 dS_3 分别对应垂直于单位坐标矢量 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 的三个曲面, 当各长度元足够小时可将曲面六面体近似看做正六面体, 因此有

$$dS_1 = dl_2 dl_3, \quad dS_2 = dl_1 dl_3, \quad dS_3 = dl_1 dl_2$$

利用拉梅系数表示矢量面元为

$$d\mathbf{S} = h_2 h_3 du_2 du_3 \mathbf{e}_1 + h_1 h_3 du_1 du_3 \mathbf{e}_2 + h_1 h_2 du_1 du_2 \mathbf{e}_3 \quad (1-17)$$

相应的, 标量体积元为

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (1-18)$$

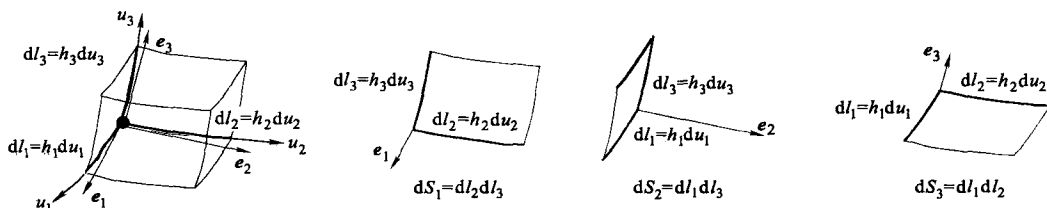


图 1-1 正交曲面坐标系及其微分元

在电磁场问题中，常用的坐标系分别是直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

直角坐标系用三个相互垂直的平面来描述空间任意一点的坐标，如图 1-2 所示，其三个单位坐标矢量 e_x 、 e_y 、 e_z 均为常矢量不变， $e_x \times e_y = e_z$ ，拉梅系数均为 1，即 $h_x = h_y = h_z = 1$ 。

圆柱坐标系用三个相互垂直的曲面来描述空间任意一点的坐标，其中两个为平面，分别为垂直于 z 轴的平面和以 z 轴为旋转轴的半无限大平面，另外一个是以 z 轴为轴心的圆柱面，如图 1-3 所示。三个曲面中只有垂直于 z 轴的平面的法向不变，因此只有 e_z 为常矢量，另外两个坐标矢量 e_r 、 e_ϕ 为变矢量，其方向随空间位置的改变而改变，且 $e_r \times e_\phi = e_z$ 。

球坐标系的三个相互垂直的曲面中一个是球面，另一个是以 z 轴为旋转轴的平面（或球的内切圆平面），第三个是以 z 轴为旋转轴、球心为锥顶的圆锥面，如图 1-4 所示。三个曲面的法向均随空间位置改变，因此三个单位坐标矢量 e_r 、 e_θ 、 e_ϕ 均为变矢量，其方向随空间位置的改变而改变，且 $e_r \times e_\theta = e_\phi$ 。为了方便对比，将三种坐标系下的拉梅系数、矢量线元、矢量面元、标量体元等列在表 1-1 中。

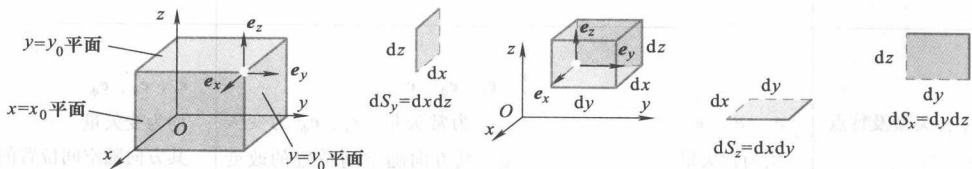


图 1-2 直角坐标系微分元

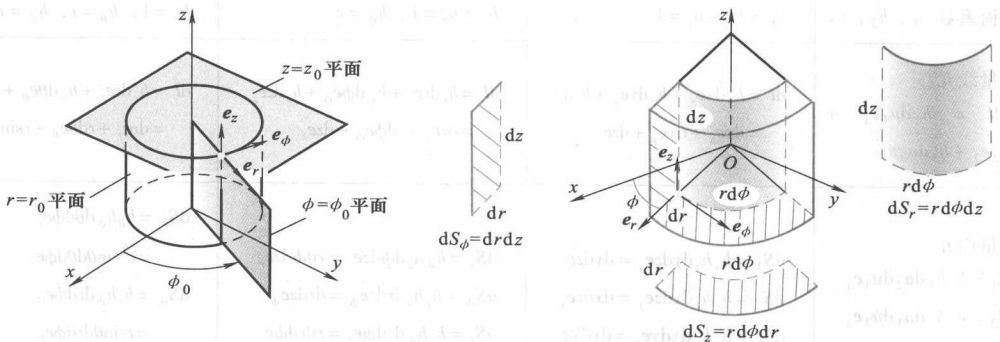


图 1-3 圆柱坐标系微分元

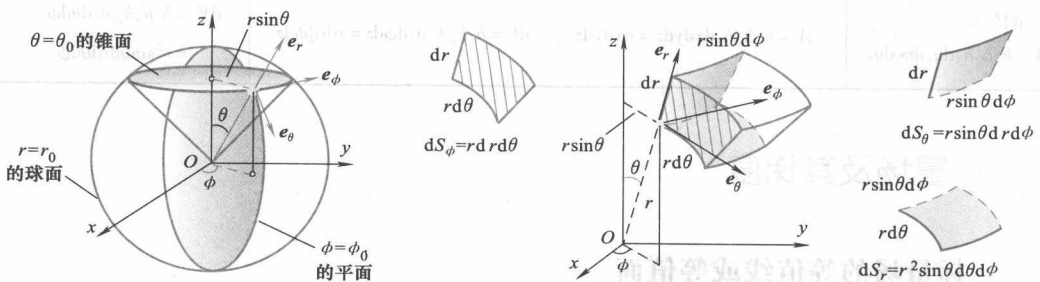
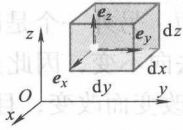
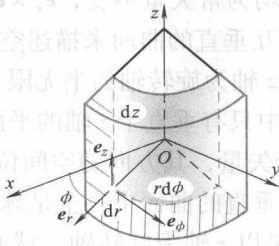
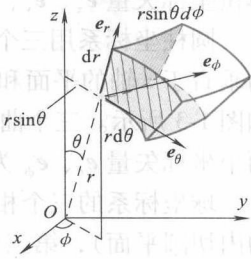


图 1-4 球坐标系微分元

表 1-1 常用坐标系拉梅系数、矢量线元、矢量面元、标量体元

	直角坐标系	圆柱坐标系	球坐标系
微分元图例			
坐标变量及取值范围 u_1, u_2, u_3	$-\infty < x < \infty$ $(x, y, z), -\infty < y < \infty$ $-\infty < z < \infty$	$0 \leq r < \infty$ $(r, \phi, z), 0 \leq \phi < 2\pi$ $-\infty < z < \infty$	$0 \leq r < \infty$ $(r, \theta, \phi), 0 \leq \theta < \pi$ $0 \leq \phi < 2\pi$
单位坐标矢量及特点 e_1, e_2, e_3	e_x, e_y, e_z 均为常矢量	e_r, e_ϕ, e_z e_z 为常矢量, e_r, e_ϕ 为变矢量, 其方向随空间位置的改变而改变	e_r, e_θ, e_ϕ 均为变矢量 其方向随空间位置的改变而改变
拉梅系数 h_1, h_2, h_3	$h_x = h_y = h_z = 1$	$h_r = h_z = 1, h_\phi = r$	$h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin\theta$
矢量线元 $d\mathbf{l} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$	$d\mathbf{l} = h_x dx \mathbf{e}_x + h_y dy \mathbf{e}_y + h_z dz \mathbf{e}_z$ $= dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z$	$d\mathbf{l} = h_r dr \mathbf{e}_r + h_\phi d\phi \mathbf{e}_\phi + h_z dz \mathbf{e}_z$ $= dr \mathbf{e}_r + r d\phi \mathbf{e}_\phi + dz \mathbf{e}_z$	$d\mathbf{l} = h_r dr \mathbf{e}_r + h_\theta d\theta \mathbf{e}_\theta + h_\phi d\phi \mathbf{e}_\phi$ $= dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\phi \mathbf{e}_\phi$
矢量面元 $dS_1 = h_2 h_3 du_2 du_3 \mathbf{e}_1$ $dS_2 = h_1 h_3 du_1 du_3 \mathbf{e}_2$ $dS_3 = h_1 h_2 du_1 du_2 \mathbf{e}_3$	$dS_1 = h_y h_z dy dz \mathbf{e}_x = dy dz \mathbf{e}_x$ $dS_2 = h_x h_z dx dz \mathbf{e}_y = dx dz \mathbf{e}_y$ $dS_3 = h_x h_y dx dy \mathbf{e}_z = dx dy \mathbf{e}_z$	$dS_r = h_\phi h_z d\phi dz \mathbf{e}_r = r d\phi dz \mathbf{e}_r$ $dS_\phi = h_r h_z dr dz \mathbf{e}_\phi = dr dz \mathbf{e}_\phi$ $dS_z = h_r h_\phi dr d\phi \mathbf{e}_z = r dr d\phi \mathbf{e}_z$	$dS_r = h_\theta h_\phi d\theta d\phi \mathbf{e}_r$ $= r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$ $dS_\theta = h_r h_\phi dr d\phi \mathbf{e}_\theta$ $= r \sin\theta dr d\phi \mathbf{e}_\theta$ $dS_\phi = h_r h_\theta dr d\theta \mathbf{e}_\phi = r dr d\theta \mathbf{e}_\phi$
标量体元 $dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$	$dV = h_x h_y h_z dx dy dz = dx dy dz$	$dV = h_r h_\phi h_z dr d\phi dz = r dr d\phi dz$	$dV = h_r h_\theta h_\phi dr d\theta d\phi$ $= r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

1.3 标量场及其梯度

1.3.1 标量场的等值线或等值面

对于不均匀标量场, 空间各点的标量值一般不等。为了形象地描述标量场的分布规律, 通常把某一标量值相同的点用光滑的曲线或曲面连起来, 这些点构成的空间曲线或曲面称为

标量场的等值线或等值面。

一般按相同标量差值画出一族曲线(面),根据等值线分布的疏密程度即可定性判断空间标量函数的分布规律。标量场的等值线在工程及日常生活中都会遇到,如测绘地图上的等高线、天气预报图中的等温线等。

在直角坐标系下标量函数 Φ 的等值线(面)方程可写为

$$\Phi(x, y, z) = C \quad (1-19)$$

式中, C 为任意常数。取不同的常数,即可得到一族等值线(面)方程。

例 1-1 求标量场 $\varphi = x^2 + 3y^2 - z$ 通过点 $M(1, 0, 1)$ 的等值面方程。

解 点 M 的坐标是 $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 1$, 则该点的标量数值为 $\varphi_0 = x_0^2 + 3y_0^2 - z_0 = 0$ 。

因此其等值面方程为

$$\varphi = x^2 + 3y^2 - z = C = 0$$

即

$$z = x^2 + 3y^2$$

在一般工程实际中,标量函数都是单值函数,因此标量函数的等值线(面)是互不相交的。

图 1-5 所示为某一温度场等温线分布的等标量线,从图中可以清楚地看出中心区域 A 处温度最高,一定是热源所在区间。此外,东南方向等温线稀疏,西北方向等温线较密,说明东南方向温度变化慢,西北方向温度变化快。因此,若某人位于中心区域,如欲迅速脱离热源,理论上的最佳路径一定是沿着温度变化最快的 AB 方向,而不是 AC 方向。

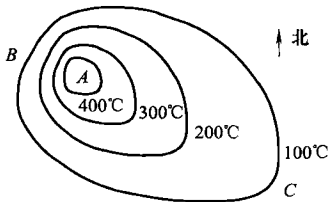


图 1-5 等标量线

由此可见,对标量场的变化规律的分析也是非常重要并具有工程实际需要的。

1.3.2 标量场的方向导数与梯度

数学上为了描述标量场函数的变化情况定义了方向导数,即标量函数 φ 在空间 P 点沿某一方向 l 上的变化率

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_P = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi(P') - \varphi(P)}{\Delta l}$$

在直角坐标系中,设标量函数 $\varphi(x, y, z)$ 在 $P(x, y, z)$ 处可微,则有

$$\Delta \varphi = \varphi(P') - \varphi(P) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z + \delta \Delta l$$

式中,当 $\Delta l \rightarrow 0$ 时 $\delta \rightarrow 0$ 。将上式两边同除以 Δl 并令 $\Delta l \rightarrow 0$ 取极限,即可得到以下方向导数的计算公式:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma$$

式中, $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 为 l 方向的方向余弦。

显然,方向导数与方向 l 的选择密切相关,所以说方向导数是描述标量场在空间变化规律的重要物理量。

记该 dl 方向的单位矢量为 e_l , 可知

$$e_l = e_x \cos\alpha + e_y \cos\beta + e_z \cos\gamma$$

定义标量函数 φ 的梯度 (gradient) 为

$$\text{grad}\varphi = e_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + e_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + e_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (1-20)$$

梯度为矢量, 其方向为标量场增加最快的方向, 其大小表示标量场的最大增加率。

若引入矢性微分算子 ∇ , 它在直角坐标系中可表示为

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}$$

则梯度可表示为

$$\nabla\varphi = e_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + e_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + e_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

此时, 方向导数可改写成

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \nabla\varphi \cdot e_l$$

矢性微分算子 ∇ 读作“nabla”或“del”, ∇ 又称为哈密尔顿 (Hamilton) 算子, 该算子具有双重属性。作为算子, 它对其后面的函数作微分运算, 同时它又是一个矢量, 必须符合矢量的运算规则。

广义正交曲面坐标系中梯度的展开式为

$$\nabla\varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} e_3 \quad (1-21)$$

在圆柱坐标系中拉梅系数为 $h_r = 1$, $h_\phi = r$, $h_z = 1$, 因此梯度的展开式为

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} e_\phi + \frac{\partial\varphi}{\partial z} e_z \quad (1-22)$$

球坐标系中拉梅系数为 $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\phi = r\sin\theta$, 其梯度展开式为

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} e_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} e_\phi \quad (1-23)$$

例 1-2 求标量场 $u = x^2z + y^2$ 在点 $M(1, 1, 2)$ 处沿 $l = e_x + 2e_y + 2e_z$ 方向的方向导数及梯度。

解 l 方向、点 $M(1, 1, 2)$ 处的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$$

由梯度公式 (1-20) 可求得该点的梯度为

$$\nabla\varphi|_M = \left(e_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + e_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + e_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \Big|_M = (2xz e_x + 2y e_y + x^2 e_z) \Big|_M = 4e_x + 2e_y + e_z$$

因此该点的方向导数为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} \Big|_M = \nabla\varphi \cdot e_l \Big|_M = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos\gamma = \frac{10}{3}$$

例 1-3 求标量函数 $\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{K_0}{r^2} \cos\theta$ 的梯度, 式中 K_0 为常数。

解 由球坐标梯度展开式 (1-23), 可得

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}e_\theta = -\frac{2K_0}{r^3}\cos\theta e_r - \frac{K_0}{r^3}\sin\theta e_\theta$$

标量场的梯度函数建立了标量场与矢量场的联系,这一联系使得某一类矢量场可以通过标量函数来研究,反之也可以通过矢量场来研究标量场。

1.4 矢量场的通量、散度与高斯散度定理

1.4.1 矢量场的矢量线

矢量既有大小又有方向,为了同时描述其大小和方向,除了直接用矢量的数值和方向来表示以外,还可以用矢量线来形象、定性地描述其空间的分布规律。

若矢量场中一条曲线上每一点的切线方向与该点的场矢量方向重合,则称该曲线为矢量场的矢量线或场线。像静电场的电力线、磁场的磁力线、流速场中的流线等,都是矢量线的例子。

设矢量线上任一点的矢径为 l , 则根据矢量线的定义,必有

$$\mathbf{A} \times d\mathbf{l} = 0$$

在直角坐标系中,矢径的表达式为

$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z$$

因此,矢量场的矢量线满足微分方程

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

由于函数的单值性,矢量场的矢量线也是一族互不相交的曲线。

例 1-4 求矢量场 $\mathbf{A} = xy^2\mathbf{e}_x + x^2y\mathbf{e}_y + zy^2\mathbf{e}_z$ 的矢量线方程。

解 矢量线应满足的微分方程为

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{y^2z}$$

从而有

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} \quad \text{和} \quad \frac{dx}{xy^2} = \frac{dz}{y^2z}$$

解之得

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C \\ x = Cz \end{cases}$$

式中, C 为常数,矢量线即为两组空间曲面的交线。

一般用矢量线的疏密来表征矢量场的大小,矢量线上每点的切向代表该处矢量场的方向。因此通过矢量线的空间分布规律即可定性判断矢量场的分布特性。图 1-6 分别给出了大家非常熟悉的平行板电容器中电力线和无限长直导线周围磁力线的分布示意图。

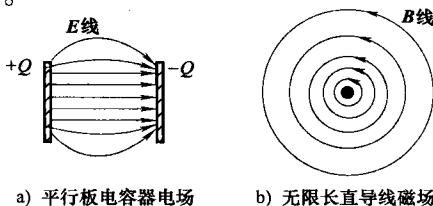


图 1-6 典型电场与磁场的矢量线分布示意图