



数值

Shuzhi
Tianqi Yubao
Jichu

天气预报基础

○ 周 毅 候志明 刘宇迪 编著



气象出版社
China Meteorological Press

数值天气预报基础

周 毅 侯志明 刘宇迪 编著

气象出版社

内 容 简 介

本书系统地讲述了数值天气预报的基本原理和方法,并适当介绍了近年来数值天气预报领域中的一些新进展和新成果。全书分为八章,内容包括数值天气预报的基础知识、大气运动的整体性质与能量约束关系、大气中的波动、数值计算方法、正压和斜压原始方程模式、初始条件和边界条件以及模式中的物理过程的处理方法等。

本书可作为高等院校气象专业以及相关专业的本科生教材,也可作为气象、海洋、水文等部门科研和业务人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数值天气预报基础/周毅,侯志明,刘宇迪编著. —北京:气象出版社,2003.6
(2008.7重印)

ISBN 978-7-5029-3577-1

I. 数… II. ①侯…②周…③刘… III. 数值天气预报-基本知识 IV. P456.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 038055 号

Shuzhi Tianqi Yubao Jichu

数值天气预报基础

周 毅 侯志明 刘宇迪

责任编辑:张锐锐 陶国庆

封面设计:博雅思企划

出版发行:气象出版社

出版社地址:北京市海淀区中关村南大街 46 号

总 编 室:010-68407112

发 行 部:010-68409198

印 刷:北京昌平环球印刷厂

开 本:787mm×960mm 1/16

印 张:14.5

字 数:292 千字

定 价:23.00 元

邮政编码:100081

网 址: <http://cmp.cma.gov.cn>

E-mail: qxcbs@263.net

版 次:2003 年 6 月第 1 版

印 次:2008 年 7 月第 3 次印刷

印 数:5001~7000

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等,请与本社发行部联系调换

前 言

本书是为天气动力学专业本科生编写的教材,侧重讲述数值天气预报的基本原理和方法,并适当介绍近年来数值天气预报领域中的一些新进展和新成果。希望通过对这些内容的学习,能够使读者系统掌握数值天气预报中最常用的基本概念和处理方法,具备从事数值天气预报业务工作的基本技能。

全书共分为八章,主要内容有:数值天气预报的基础知识,包括各种坐标系中的大气运动方程组,模式大气的能量关系和波动特性;数值计算方法,主要讨论差分法求偏微分方程数值解的基本原理和方法;数值天气预报模式,重点介绍正压原始方程模式和斜压原始方程模式;初始条件和边界条件,包括模式初值形成的原理和方法,水平侧边界条件的类型和给定方法;模式物理过程的处理方法,着重介绍模式中湿物理过程和边界层过程的处理方法。

本书的第一、二、三章由侯志明编写,第四、七、八章由周毅编写,第五、六章由刘宇迪编写。在本书的编写和出版过程中,得到解放军理工大学气象学院教务科、动力气象教研室以及气象出版社的大力支持,特别是吕美仲教授自始至终给予了热情的指导和帮助。南京大学的谈哲敏教授和王元教授、解放军理工大学气象学院的吕美仲教授和张铭教授审阅初稿后,提出了许多宝贵的建议和修改意见,在此,谨向他们表示诚挚的谢意。

由于作者学识水平有限,书中肯定有不少错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编著者

2003年2月

目 录

前言

第一章 大气运动方程组	(1)
§ 1.1 基本方程组	(1)
1.1.1 运动方程	(1)
1.1.2 连续方程	(3)
1.1.3 状态方程	(4)
1.1.4 热力学方程	(5)
1.1.5 水汽方程	(5)
1.1.6 闭合方程组	(6)
§ 1.2 球坐标系方程组	(6)
§ 1.3 铅直坐标变换	(11)
1.3.1 普遍铅直坐标变换关系式	(11)
1.3.2 p 坐标系	(15)
1.3.3 σ 坐标系	(18)
1.3.4 θ 坐标系	(21)
§ 1.4 地图投影坐标系	(23)
1.4.1 地图投影	(23)
1.4.2 地图投影坐标系	(23)
§ 1.5 地图投影放大系数	(26)
1.5.1 正形投影地图放大系数	(26)
1.5.2 极射赤面投影	(29)
1.5.3 Lambert 投影	(30)
1.5.4 Mercator 投影	(30)
§ 1.6 在 Lambert 投影地图上计算网格点上的 m 值	(32)

第二章 大气运动的整体性质与能量约束	(35)
§ 2.1 全球大气的某些守恒性质	(35)
2.1.1 总质量守恒	(35)
2.1.2 绝热大气位温与位温平方守恒	(36)
2.1.3 绝热无摩擦大气总能量守恒	(36)
2.1.4 绝热无摩擦大气位涡和位涡拟能守恒	(38)
§ 2.2 静力平衡对能量关系的约束	(38)
§ 2.3 p 坐标系中的能量方程	(40)
§ 2.4 σ 坐标系中的能量方程	(44)
§ 2.5 Lorenz 能量积分约束	(45)
第三章 大气中的波动	(51)
§ 3.1 大气中的混合波解	(51)
3.1.1 基本方程	(51)
3.1.2 波解分析	(54)
§ 3.2 各种波动特征	(55)
3.2.1 声波	(55)
3.2.2 重力内波	(56)
3.2.3 惯性波	(57)
3.2.4 惯性重力内波	(57)
3.2.5 Rossby 波	(58)
§ 3.3 正压模式中的波动特征	(59)
第四章 数值计算法	(63)
§ 4.1 有限差分 and 截断误差	(63)
§ 4.2 平流方程初值问题的数值解	(65)
4.2.1 指数增长解, 线性计算不稳定	(68)
4.2.2 稳定解、计算波、计算频散	(68)
§ 4.3 相容性、收敛性、稳定性	(73)
§ 4.4 分析计算稳定性的方法	(75)
4.4.1 谐波分析法	(75)

4.4.2 能量法	(79)
§ 4.5 某些积分格式的性能和稳定性	(79)
4.5.1 显式格式	(79)
4.5.2 隐式格式	(81)
4.5.3 迭代格式——欧拉后差格式	(85)
4.5.4 二维平流方程的计算稳定性	(86)
4.5.5 四阶空间差分格式的计算稳定性	(88)
4.5.6 半隐式格式	(91)
§ 4.6 平滑与滤波	(94)
4.6.1 一维平滑	(94)
4.6.2 二维平滑	(96)
§ 4.7 非线性计算不稳定	(97)
§ 4.8 椭圆型方程与张弛法	(99)
4.8.1 张弛法——同时张弛	(100)
4.8.2 张弛法——顺序张弛	(101)
第五章 正压原始方程模式	(103)
§ 5.1 历史回顾	(103)
§ 5.2 过滤模式	(105)
5.2.1 声波与重力波的过滤	(105)
5.2.2 准地转正压模式及其动力特征	(108)
5.2.3 准地转正压模式的数值解	(109)
§ 5.3 正压原始方程组	(112)
§ 5.4 正压原始方程模式的物理属性	(114)
5.4.1 波动解	(114)
5.4.2 模式大气的能量关系及其整体性质	(115)
§ 5.5 差分格式与地转适应	(119)
§ 5.6 守恒空间差分格式的构造	(127)
5.6.1 一次、二次守恒的空间差分格式	(128)
5.6.2 正压原始方程模式的二次守恒格式	(131)

5.6.3	正压原始方程模式的总能量守恒格式	(133)
§ 5.7	正压原始方程模式的计算方案	(137)
5.7.1	空间差分格式、初值和侧边界条件	(138)
5.7.2	时间积分方案	(139)
5.7.3	平滑	(140)
5.7.4	计算流程图	(140)
第六章	斜压原始方程模式	(141)
§ 6.1	模式方程组及其积分关系	(141)
6.1.1	模式方程组	(141)
6.1.2	积分关系	(142)
§ 6.2	变量配置与垂直差分格式	(145)
6.2.1	垂直分层与变量配置	(145)
6.2.2	垂直差分格式的构造	(146)
§ 6.3	水平气压梯度力的计算方法	(154)
6.3.1	在等压面坐标中计算水平气压梯度力	(154)
6.3.2	静力扣除法	(155)
6.3.3	改善差分格式	(156)
§ 6.4	斜压原始方程模式计算方案	(159)
6.4.1	控制方程组	(159)
6.4.2	差分方程组	(160)
6.4.3	边界条件	(160)
6.4.4	时间积分方案	(161)
6.4.5	初值	(161)
6.4.6	物理过程	(161)
6.4.7	计算方案流程图	(161)
第七章	初始条件与边界条件	(163)
§ 7.1	初值形成的原理和方法	(163)
7.1.1	客观分析	(163)
7.1.2	初值处理的必要性	(166)

7.1.3	资料同化.....	(167)
§ 7.2	静力初始化方法	(169)
7.2.1	地转风初值.....	(169)
7.2.2	平衡初值.....	(169)
§ 7.3	动力初始化方法	(172)
7.3.1	动力迭代法.....	(172)
7.3.2	数字滤波法.....	(174)
§ 7.4	正规模初始化方法	(176)
7.4.1	线性处理.....	(177)
7.4.2	非线性处理.....	(180)
§ 7.5	变分初始化方法	(181)
7.5.1	变分原理简介.....	(181)
7.5.2	约束极小化问题.....	(184)
7.5.3	变分平衡初值.....	(185)
§ 7.6	初始化方法的比较与存在的问题	(186)
§ 7.7	水平侧边界条件	(187)
7.7.1	几种侧边界条件的试验结果.....	(187)
7.7.2	几种常用的水平侧边界条件.....	(190)
7.7.3	时变边界条件.....	(191)
第八章	模式中物理过程的处理方法	(193)
§ 8.1	平均运动方程组和次网格过程	(193)
§ 8.2	大尺度凝结降水的计算方法	(195)
8.2.1	凝结函数法.....	(195)
8.2.2	迭代法.....	(196)
§ 8.3	积云对流参数化	(198)
8.3.1	基本理论.....	(198)
8.3.2	对流调整方案.....	(200)
8.3.3	郭晓岚参数化方案.....	(203)
§ 8.4	边界层过程的处理方法	(207)

8.4.1	边界层参数化理论.....	(208)
8.4.2	整体边界层参数化方案.....	(216)
8.4.3	高分辨率边界层参数化方案.....	(219)

参考文献

第一章 大气运动方程组

一切天气现象都与大气运动息息相关。尽管大气运动很复杂,但大气运动必须遵循某些基本物理定律。支配大气运动状态和热力状态变化的基本物理定律有:**动量守恒定律**(即牛顿第二定律),**质量守恒定律**,**气体实验定律**,**热力学第一定律**和**水汽守恒定律**等。这些定律的数学表达式,构成了描写大气运动基本规律的方程组,称**基本方程组**。在给定的初始条件和边界条件下,通过数值积分基本方程组,便可得到未来时刻气象要素的空间分布,这就是**数值天气预报**。本章将依据动力气象学中的大气运动基本方程组,给出基本方程组在常用的坐标系中的具体形式。

大气运动不论在空间上还是在时间上都有宽广的尺度谱,利用严谨的基本方程组试图同时预报出不同尺度的大气运动状态几乎是不可能的。其实任何理论仅是模写,是对客观事物的近似模写,气象学者们处理数值天气预报具体问题时,在不失去大气主要特征的情况下常把非常复杂的实际大气理想化、简单化,并称之为“**模式大气**”。例如,对于大气大尺度运动的短时间的数值预报,早期常把实际大气视为绝热的、无黏性的干燥大气。随着数值预报的发展,“模式大气”中虽然考虑了非绝热过程,考虑了水汽过程,然而对实际大气仍作了相当简化。描写“模式大气”的动力学热力学方程组,称之为“**大气模式**”。在本章中,我们将给出预报大尺度运动短期演变的基本方程组,讨论与其有关的一些问题,这是建立各种“大气模式”的基础。

§ 1.1 基本方程组

1.1.1 运动方程

对于惯性参考系,牛顿第二定律可写成

$$\frac{d_a V_a}{dt} = \sum_i f_i \quad (1.1)$$

下标 a 表示在惯性参考系中观测到的量, V_a 为空气微团的绝对速度, $\frac{d_a V_a}{dt}$ 为绝对加速度,而

$$\frac{d_a}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_a \cdot \nabla_s$$

$\sum_i f_i$ 表示单位质量空气所受的合外力。人们总是在地球上观察大气运动,而地球以常值角速度 Ω 绕地轴旋转着,所以任何一个固定在地球上并与地球一同旋转的参考系,乃是一旋转参考系。相对旋转参考系的运动称为相对运动。相对速度记作 V_3 ,则有

$$V_a = V_3 + \Omega \times r \quad (1.2)$$

r 为以地心为原点的空气微团的位置矢量。(1.2) 式表明,一个空气微团的绝对速度为其相对速度和由于地球自转而产生的牵连速度的矢量和。

令 i, j, k 表示在惯性参考系中沿一直角坐标系中坐标轴的单位矢量, i', j', k' 为在旋转参考系中沿直角坐标系中坐标轴的单位矢量,则任一矢量 A 在两种参考系中可表示为

$$\begin{aligned} A &= A_x i + A_y j + A_z k \\ &= A'_x i' + A'_y j' + A'_z k' \end{aligned}$$

它的全导数为

$$\begin{aligned} \frac{d_a A}{dt} &= \frac{dA_x}{dt} i + \frac{dA_y}{dt} j + \frac{dA_z}{dt} k \\ &= \frac{dA'_x}{dt} i' + \frac{dA'_y}{dt} j' + \frac{dA'_z}{dt} k' + A'_x \frac{di'}{dt} + A'_y \frac{dj'}{dt} + A'_z \frac{dk'}{dt} \end{aligned}$$

$\frac{di'}{dt}$ 是地球自转引起的 i' 的矢端速度,有

$$\frac{di'}{dt} = \Omega \times i'$$

类似有

$$\frac{dj'}{dt} = \Omega \times j'$$

$$\frac{dk'}{dt} = \Omega \times k'$$

由此可得

$$\frac{d_a A}{dt} = \frac{dA}{dt} + \Omega \times A \quad (1.3)$$

根据(1.3)式,令 $A = V_a$,于是有

$$\frac{d_a V_a}{dt} = \frac{dV_a}{dt} + \Omega \times V_a$$

将(1.2)式代入,得

$$\frac{d_a V_a}{dt} = \frac{d(V_3 + \Omega \times r)}{dt} + \Omega \times (V_a + \Omega \times r)$$

或

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_3}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.4)$$

上式表明,绝对加速度就等于相对加速度、科氏加速度、向心加速度的矢量和。

单位质量微团所受的外力有气压梯度力 $\left(-\nabla_3 \frac{p}{\rho}\right)$,地球引力 $(\mathbf{g}_a)$ 和摩擦力 $(\mathbf{F})$ 。则旋转参考系中相对运动方程的矢量形式为

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{g}_a + \mathbf{F} \quad (1.5)$$

式中 $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3$ 称科氏力, $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ 称惯性离心力,两者常被称为“视实力”,以区别于真实力。地心引力与惯性离心力,只是空气微团的坐标函数,可将两力合并在一起

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_a - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

$\mathbf{g}$ 称为重力。于是(1.5)式可写成

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 + \mathbf{F} \quad (1.6)$$

1.1.2 连续方程

质量守恒定律的数学表达式称**连续方程**。考虑一有限物质体积元,取笛卡儿坐标,体积元体积为 $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$,空气微团密度为 ρ ,则该有限体积元中空气质量为 $\rho \delta\tau = \rho \delta x \delta y \delta z$,由质量守恒定律,有

$$\frac{d\rho \delta\tau}{dt} = 0$$

即有

$$\delta x \delta y \delta z \frac{d\rho}{dt} + \rho \delta y \delta z \frac{d\delta x}{dt} + \rho \delta x \delta z \frac{d\delta y}{dt} + \rho \delta x \delta y \frac{d\delta z}{dt} = 0$$

“d”代表全微分,“δ”是微差符号,这是两种完全不同性质的运算,d和“δ”的运算可调换次序,即有

$$\frac{d\delta x}{dt} = \delta \frac{dx}{dt} = \delta u$$

$$\frac{d\delta y}{dt} = \delta v$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = \delta w$$

u, v 和 w 分别为沿 x, y 和 z 轴的速度分量,故上式可改写为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right) = 0$$

取 $\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0$ 的极限, 有

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

或写成

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = 0 \quad (1.7a)$$

其中

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3$ 即速度散度。由推导中可看出

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt}$$

这表明速度散度是物质体积元的体积在运动中的相对膨胀率。由高斯定律有

$$\int_{\delta\tau} \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{V}_3 \cdot d\sigma$$

σ 是物质体积元边界闭合曲面, 取 $\delta\tau \rightarrow 0$ 的极限有

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{\int_{\sigma} \mathbf{V}_3 \cdot d\sigma}{\delta\tau}$$

$\int_{\sigma} \mathbf{V}_3 \cdot d\sigma$ 是通过边界闭合曲面的净流量, 所以速度散度又可解释为单位体积中净流量。

连续方程还可以改写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_3 \cdot \rho \mathbf{V}_3 = 0 \quad (1.7b)$$

1.1.3 状态方程

在 100km 高度以下, 大气是一种成分几乎不变化的混合气体。有些成分的微小变化可能是重要的, 但本书中除了考虑水汽变化外, 其它成分的微小变化都略去不计。在正常温度和气压变化范围内, 空气完全可以认为是一种成分不改变的理想气体。由理想气体实验定律, 可得状态方程为

$$p = \rho R T \quad (1.8a)$$

其中 R 为干空气比气体常数, $R = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。对于湿空气, 比气体常数 $R_w = (1 + 0.61q)R$, q 为比湿, 若引进虚温 T_v , $T_v = (1 + 0.61q)T$, 则湿空气状态方程可写成

$$p = \rho R_w T = \rho R T_v \quad (1.8b)$$

一般情况下不计 T 与 T_v 的差别, 但在积分静力方程计算等压面高度时, 考虑水汽含量是完全必要的。

1.1.4 热力学方程

热力学第一定律描述了能量守恒原理。能量守恒是指一系统中能量变化完全是由于通过这个系统边界能量净输送所引起的。对于气象问题可以不考虑电能、磁能、化学能,适用于理想气体的热力学第一定律的形式为

$$c_v \frac{dT}{dt} = -p \frac{d\alpha}{dt} + Q \quad (1.9a)$$

c_v 为质量定容热容, $c_v = 717 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $c_v \frac{dT}{dt}$ 为单位质量理想气体的内能变化率, $-p \frac{d\alpha}{dt}$ 为理想气体压缩功率, Q 为非绝热加热率, (1.9a) 式称热力学方程。利用状态方程 $p\alpha = RT$, 注意到 $c_p = c_v + R$, c_p 为质量定压热容, $c_p = 1004 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, (1.9a) 式可改写为

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q \quad (1.9b)$$

$Q = 0$, 则描写干绝热过程方程为

$$c_p d\ln T - R d\ln p = 0 \quad (1.9c)$$

对上式积分, 设初状态为 p, T , 终态为 p_{00}, θ , 这里 $p_{00} = 1000 \text{ hPa}$, 则有

$$\theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$$

上式取对数微分有

$$c_p d\ln \theta = c_p d\ln T - R d\ln p$$

所以, 对于干绝热过程, 根据 (1.9c) 式热力学方程可简单地写成

$$\frac{dc_p \ln \theta}{dt} = 0$$

而非绝热过程, 若定义 $s = c_p \ln \theta$, s 称比熵, 则热力学方程又可写成

$$\frac{ds}{dt} = \frac{Q}{T} \quad (1.9d)$$

1.1.5 水汽方程

考虑一物质体积元 $\delta\tau$, 水汽密度为 ρ_w , 设体积元中有水汽的源或汇, 若单位时间内, 源对每单位体积中提供的水汽质量为 S , 由水分守恒定律有

$$\frac{d}{dt}(\rho_w \delta\tau) = S \delta\tau$$

即有

$$\frac{d\rho_w}{dt} + \rho_w \frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt} = S$$

而

$$\frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt} = \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3$$

于是有

$$\frac{d\rho_w}{dt} + \rho_w \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = S$$

比湿 q 定义为 $q = \frac{\rho_w}{\rho}$, 代入上式有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho q) + \nabla_3 \cdot \rho q \mathbf{V}_3 = S$$

利用连续方程, 可得常用的水汽方程为

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{V}_3 \cdot \nabla_3 q = \frac{S}{\rho} = S_1 \quad (1.10)$$

S_1 为水汽源, 即单位时间内为单位质量空气提供的水汽量。

1.1.6 闭合方程组

(1.6)~(1.10)式构成大气运动基本方程组为

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 + \mathbf{F} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = 0 \\ c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q \quad \left(\alpha = \frac{1}{\rho} \right) \\ \frac{dq}{dt} = S_1 \\ p = \rho RT \end{cases} \quad (1.11)$$

若 $\mathbf{F}, Q, S_1$ 是已知函数, 基本方程组是闭合的。若考虑的模式大气是绝热、无摩擦、干燥大气, 则 $\mathbf{F}, Q, S_1$ 为零, 水汽方程也就不考虑了, 未知场变量为 $\mathbf{V}_3, p, \rho, T$, 方程组仍是闭合的。

§ 1.2 球坐标系方程组

地球接近于正球体, 研究包围在地球周围的大气运动, 采用球坐标最适宜。球坐标系的原点即地心, 取 $\lambda, \varphi(\theta), r$ 为坐标, λ 为经度, $\varphi(\theta)$ 为纬度(余纬), r 为径向长度。 i, j ,

k 分别为与纬圈相切指向东、与经圈相切指向北、与球面垂直指向天顶为正向的单位矢量。以 u, v, w 表示速度在三个方向上的分量, 则

$$\mathbf{V}_3 = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

而

$$u = r \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}$$

$$v = r \frac{d\varphi}{dt}$$

$$w = \frac{dr}{dt}$$

这样可将矢量形式的运动方程(1.6)式分解为以下三个标量方程:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \cos \varphi \partial \lambda} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi + \frac{uv \operatorname{tg} \varphi}{r} - \frac{uw}{r} + F_\lambda$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} - 2\Omega u \sin \varphi - \frac{u^2 \operatorname{tg} \varphi}{r} - \frac{vw}{r} + F_\varphi$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\Omega u \cos \varphi + \frac{u^2 + v^2}{r} + F_r$$

而连续方程(1.7a)可写成

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left[\frac{\partial u}{r \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial (v \cos \varphi)}{r \cos \varphi \partial \varphi} + \frac{\partial (wr^2)}{r^2 \partial r} \right] = 0$$

热力学方程、水汽方程、状态方程形式不变。

以上推导过程参见《动力气象学教程》(吕美仲等编著, 气象出版社, 1990年)。

这些方程可作以下传统的简化: 因 $r = z + a$, z 为海拔高度, $a = 6371 \text{ km}$ 为地球半径, 在我们所感兴趣的大气运动范围内 $z \ll a$, 因而当 r 处于方程中各项系数的地位时, 可以近似取 $r \cong a$, 但因

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d(z+a)}{dt} = w$$

因此, 当 r 处于微商地位时, 则不能取 $r \cong a$ 。这一近似称之为薄层近似。采用这一近似后, 沿 i, j, k 方向的微小曲线距离如用 $\delta x, \delta y, \delta z$ 表示, 则有

$$\delta x = r \cos \varphi \delta \lambda \cong a \cos \varphi \delta \lambda$$

$$\delta y = r \delta \varphi \cong a \delta \varphi$$

$$\delta z = \delta r$$

$\mathbf{V}_3$ 的三个分量取为

$$u \cong a \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$v \cong a \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$w = \frac{dz}{dt}$$