



中等职业教育**机械类**系列教材

总主编 董代进 张仁英

实用数学

Shiyong Shuxue

主 编 董代进 夏 雪

副主编 欧 宇 周雅梅 胡

主 审 刘 力



重庆大学出版社

<http://www.cqup.com.cn>

教师信息反馈表

为了更好地为教师服务,提高教学质量,我社将为您的教学提供电子和网络支持。请您填好以下表格并经系主任签字盖章后寄回,我社将免费向您提供相关的电子教案、网络交流平台或网络化课程资源。

书名:		版次	
书号:			
所需要的教学资料:			
您的姓名:			
您所在的校(院)、系:	校(院)		系
您所讲授的课程名称:			
学生人数:	_____人	_____年级	学时: _____
您的联系地址:			
邮政编码:		联系电话	(家) (手机)
E-mail:(必填)			
您对本书的建议:		系主任签字	
		盖章	

请寄:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A区)
重庆大学出版社市场部

邮编:400030

电话:023-65111124

传真:023-65103686

网址:<http://www.cqup.com.cn>

E-mail:fxk@cqup.com.cn

前 言

数学课程虽然是中等职业学校机械类专业的主干课程,然而目前普遍存在老师难教、学生难学的现象。究其原因,我们认为主要有以下几点:

第一,学生的数学基础十分薄弱。

第二,学生目的性不明确。学生不知学了数学具体做什么,不知数学与所学专业的联系,从而导致缺乏学习数学的积极性。

第三,与所学专业的联系不紧密。数学应为所学专业服务,然而我们在专业课的教学中,感到专业所需要的数学知识,学生十分欠缺,从而导致专业课老师在讲有关计算问题时,要花相当一部分时间去讲数学知识。

我们针对以上问题,编写了这本《实用数学》,它具有以下几个特点:

第一,编写人员的构成独特。我们组织重庆市中等职业学校优秀的、长期从事教学工作的数学老师和专业课教师共同编写此本教材,我们紧密配合、互相协作,从组织形式上保证了数学知识和专业知识的融合。

第二,编写模式新颖。本书总的模式是:由专业实例,引入数学知识,进而讲解数学知识,最后用所学的数学知识来解决专业实际问题。数学知识和专业知识紧密结合、浑然一体,学生十分明确所学数学知识的目的。

第三,针对性强,考虑到中等职业学校机械类专业学生的现状,我们编写了“项目一 代数式的计算”,这实际上是弥补学生数学知识的不足。

第四,充分为专业课服务,做到“够用为度”。专业课需要哪些数学知识,就讲解哪些数学知识。如矢量的计算,我们只讲平行矢量的计

算;而曲线方程我们则加深了,讲了直线方程、圆的方程、抛物线方程、双曲线方程等,因为,不论是数控专业的学生,还是模具专业的学生都要用到这些知识。

第五,准备充分。我们从2007年,就开始调研、思考、论证本书的编写工作,前后通过数次研讨,多次修改,才形成了本书。

虽然,我们力求做到以上几点,但把数学知识和专业知识融合到一起编写数学教材,毕竟是第一次,加之我们水平有限,缺点错误在所难免,敬请读者批评指正,不胜感谢。

本书由重庆渝北职教中心的刘力担任主审,由董代进和夏雪担任主编,由欧宇、周雅梅和胡胜担任副主编,参加编写的还有杨智凌、辛国安、胡贵芬、付琳、彭荣、周永伦、李勇、蒋翎、钟珊珊、杨小刚、李昌春、郑祥云、李晓峰、向山东。全书由董代进进行统稿。

编者
2009.6

目 录

项目一 代数式基础知识.....	1
任务一 数及其运算.....	2
任务二 不等式的运算	18
任务三 求 和	23
*任务四 正态分布	26
项目二 三角函数和矢量的解法	28
任务一 角和弧度制	30
任务二 三角函数	32
任务三 矢量及其运算	41
项目三 坐标系	47
任务一 坐标和坐标系	48
任务二 坐标平移	56
项目四 方程及方程组的解法	63
任务一 一次方程(组)	64
任务二 二次方程(组)	70
项目五 平面解析几何	77
任务一 直线方程	78
任务二 平面内两条直线的位置关系	87
任务三 点到直线的距离	91
任务四 圆的方程及圆和直线的位置关系	94
任务五 椭圆、抛物线、双曲线	98
项目六 立体几何初步.....	105
任务一 空间几何体.....	106
任务二 点、线、面之间的位置关系.....	122
任务三 三视图初步.....	133
参考文献.....	147

项目一 代数式基础知识

- 项目内容:
1. 代数式的运算
 2. 不等式的运算
 3. 求和的运算
 4. 正态分布

- 项目目的:
1. 掌握代数式的运算及其应用
 2. 掌握不等式的运算及其应用
 3. 掌握求和的运算及其应用
 4. 了解正态分布的含义及其应用

项目实施过程

专业引入

一、实例

如图 1.1 为一个钳工实训课题。某钳工班加工出了 33 个零件。

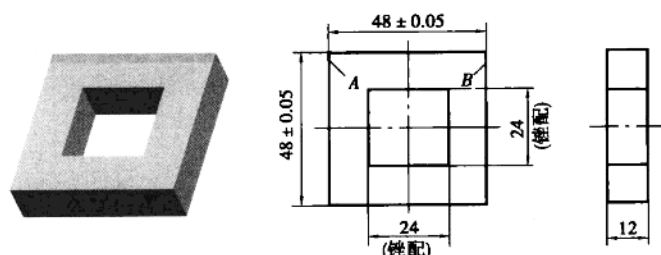


图 1.1 钳工实训课题

1. 试指出尺寸 48 ± 0.05 的具体含义。
2. 某测绘班同学,实测了 33 个零件的 A 面与 B 面尺寸,数据见表 1.1。现以 A 面与 B 面的尺寸为准,请找出这些实训零件的合格品和不合格品,计算该批零件 A 面与 B 面的平均尺寸。

表 1.1 实测数据

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
所测数据	48	47.98	48	48.04	48.06	48	48.02	47.96	48	48.02	48
编号	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
所测数据	48.02	48	48.04	48	47.94	47.96	48	48	48.02	48	48
编号	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
所测数据	48	47.96	48	47.98	47.98	48.02	48	48.04	48	47.98	48.02

二、答案

1. 48 ± 0.05 的具体含义是:

上偏差: $+0.05$ mm, 下偏差: -0.05 mm, 公差: 0.10 mm。

基本设计尺寸 48 mm, 最大极限尺寸 48.05 mm, 最小极限尺寸 47.95 mm。

尺寸在 $47.95 \sim 48.05$ mm 中的零件为合格品, 尺寸小于 47.95 mm 或大于 48.05 mm 均为不合格品。

2. 尺寸 47.94 mm 小于 47.95 mm 为不合格品, 尺寸 48.06 mm 大于 48.05 mm 为不合格品。

$$\text{平均尺寸} = \frac{48 + 47.98 + \cdots + 48.02}{33} \approx 48 (\text{mm})$$



任务一 数及其运算

一、相反数, 绝对值, 倒数, 分数

1. 知识要点

(1) **相反数** 只有符号不同的两个数中, 一个数是另一个数的相反数, 零的相反数是零。如:

$$-5 \text{ 与 } 5, 2\frac{1}{3} \text{ 与 } -2\frac{1}{3}。$$

(2) **绝对值** 正数的绝对值是它本身, 负数的绝对值是它的相反数, 零的绝对值是零, 即:

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

(3) **倒数** 乘积是 1 的两个数中, 一个数是另一个数的倒数, 零没有倒数。如:

$$-2 \text{ 与 } -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ 与 } 3, -2\frac{1}{2} \text{ 与 } -\frac{2}{5}。$$

(4) **分数的基本性质** 分子和分母同时乘以 (或者除以) 同一个不等于零的数, 分数的值

不变。

$$\text{即 } \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}, \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c} (c \neq 0)$$

(5) 分数加减法则

两个分数相加、减时,如果分母相同,那么分母不变,分子相加、减,如果分母不相同,那么要利用分数的基本性质进行通分,其最简公分母是两个分母的最小公倍数。如:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5} \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$$

(6) 分数乘法、除法法则

两个分数相乘时,分子和分母分别相乘,除以一个分数等于乘以这个分数的倒数。如:

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{3 \times 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$$

(7) 分数运算律

分数运算满足交换律、结合律和乘法对加法的分配律。如:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{3}{5} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$12 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 12 \times \frac{1}{3} + 12 \times \frac{1}{4} = 4 + 3 = 7$$

2. 例题

例1 计算

$$(1) \frac{5}{7} + \frac{1}{7} \quad (2) \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \quad (3) 7\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\text{解 } (1) \frac{5}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5+1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$(2) \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$(3) 7\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{22}{3} - \frac{2}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

想一想

$$(1) \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \quad (2) 6\frac{1}{2} - 9\frac{2}{3}$$

提示:

● 如果分数运算中含有带分数,一般先把带分数化为假分数,然后再进行运算;如果分母不相同的加减运算,通分则是关键步骤,应当选取各分母的最小公倍数为最简公分母。

例2 计算

$$(1) \frac{4}{5} \div \frac{2}{15} \quad (2) \frac{5}{7} \times 2\frac{1}{3} \div 1\frac{1}{2} \quad (3) \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right) \times 20$$

$$\text{解 } (1) \frac{4}{5} \div \frac{2}{15} = \frac{4}{5} \times \frac{15}{2} = 2 \times 3 = 6$$

$$(2) \frac{5}{7} \times 2 \frac{1}{3} \div 1 \frac{1}{2} = \frac{5}{7} \times \frac{7}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9} = 1 \frac{1}{9}$$

$$(3) \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} \right) \times 20 = \frac{3}{4} \times 20 - \frac{2}{5} \times 20 = 15 - 8 = 7$$

$$\text{或} \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} \right) \times 20 = \left(\frac{15}{20} - \frac{8}{20} \right) \times 20 = \frac{7}{20} \times 20 = 7$$

想一想

$$(1) -\frac{4}{5} \div \frac{2}{15}$$

$$(2) \frac{5}{7} \times \left(-2 \frac{1}{3} \right) \div \left(-1 \frac{1}{2} \right)$$

$$(3) \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) \times 100$$

提示:

● 进行乘除混合运算时,一般要将除法转化为乘法,要注意运算顺序,运算律的使用会使运算得到简化。



【自己動手 1.1】

1. 填空题

(1) 如果小强参加比赛取胜 2 场记作 +2, 那么他失败 3 场记作_____;

(2) $-(-5)$ 的相反数是_____; $|-5.2| =$ _____; -7 的倒数是_____;

(3) 若 $M-3$ 与 $M-1$ 互为相反数, 则 $M+2 =$ _____;

(4) $|2a-1| + |b+2| = 0$, 则 $3a-2b =$ _____;

2. 计算

$$(1) \left(-2 \frac{1}{3} \right) \div \left(-1 \frac{1}{2} \right) \times 2 \frac{1}{4}$$

$$(2) 23.17 + (-21.32) - (-2.75)$$

$$(3) \left(8 - 1 \frac{1}{3} - \frac{2}{25} \right) \times \left(-\frac{3}{4} \right)$$

二、平方根, 立方根及根式运算

1. 知识要点

(1) 平方根 如果一个数的平方等于 a , 那么这个数就叫做 a 的平方根, 正数 a 的平方根有两个, 其中正的平方根叫做 a 的算术平方根, 0 的算术平方根是 0。如: $(\pm 3)^2 = 9$, ± 3 叫做 9 的平方根, 3 叫做 9 的算术平方根。

(2) 立方根 如果一个数的立方等于 a , 那么这个数就叫做 a 的立方根。如: 使 $2^3 = 8$, 2

叫做8的立方根。

(3)二次根式 式子 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$)叫做二次根式,使二次根式有意义的条件是被开方数为非负数。如:使 $\sqrt{3x-1}$ 有意义的条件是 $3x-1 \geq 0$ 。

(4)最简二次根式 满足被开方数不含分母,且不含能开得尽方的因数的二次根式叫做最简二次根式。如: $\sqrt{2a}$, $3\sqrt{x}$, $\frac{1}{4}\sqrt{ab}$ 等。

(5)同类二次根式 被开方数相同的最简二次根式叫做同类二次根式。如: $3\sqrt{2}$ 与 $a\sqrt{2}$ 是同类二次根式。

(6)二次根式的运算 二次根式的运算法则如下:

①加减法 首先把各个二次根式化成最简二次根式,然后合并同类二次根式。如: $\sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = \frac{9}{2}\sqrt{2}$ 。

②乘法 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$)

③除法 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ ($a \geq 0, b > 0$)

2. 例题

例3 求下列各数的平方根。

(1)16 (2)0.009 (3) $\frac{25}{49}$ (4) $2\frac{1}{4}$

解 (1)因为 $(\pm 4)^2 = 16$ 所以16的平方根是 ± 4 。

(2)因为 $(\pm 0.3)^2 = 0.09$ 所以0.09的平方根是 ± 0.3 。

(3)因为 $(\pm \frac{5}{7})^2 = \frac{25}{49}$ 所以 $\frac{25}{49}$ 的平方根是 $\pm \frac{5}{7}$ 。

(4)因为 $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, $(\pm \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ 所以 $2\frac{1}{4}$ 的平方根是 $\pm \frac{3}{2}$ 。

提示:

● 正数的平方根有两个,它们互为相反数

例4 求下列各式的值。

(1) $\sqrt[3]{-27}$ (2) $-\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}$ (3) $-\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

解 (1) $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$

(2) $-\sqrt[3]{-\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$

(3) $-\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = -\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = -\frac{4}{3}$

想一想

$$\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$$

提示:

● 一个数的立方根一定唯一存在,即:如果 $a^3 = b$, 那么 $a = \sqrt[3]{b}$

例5 问 x 为何值时,下列各式有意义:

(1) $\sqrt{2x-3}$ (2) $\sqrt{3-x}$

解 (1) 由题意得 $2x-3 \geq 0$ $x \geq \frac{3}{2}$ 所以,当 $x \geq \frac{3}{2}$ 时,式子 $\sqrt{2x-3}$ 有意义。

(2) 由题意得: $3-x \geq 0$ $x \leq 3$ 所以,当 $x \leq 3$ 时,式子 $\sqrt{3-x}$ 有意义。

想一想

$$\sqrt{2x-5} + \sqrt{6-x}$$

提示:

● 二次根式有意义的条件是被开方数为非负数

例6 计算 $(3-\sqrt{6})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

$$\begin{aligned} \text{解 } (3-\sqrt{6})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}) &= 3 \times 2\sqrt{2} - 3 \times 3\sqrt{3} - \sqrt{6} \times 2\sqrt{2} + \sqrt{6} \times 3\sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{2} - 9\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 9\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - 13\sqrt{3} \end{aligned}$$

想一想

$$(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{6}+\sqrt{3})$$

提示:

● 二次根式的混合运算与有理数的混合运算类似,要注意运算顺序及运算律的使用



【自己动手 1.2】

1. 填空题

(1) 16 的算术平方根是 _____, 平方根是 _____; -27 的立方根是 _____。

(2) 当 x _____ 时, $\sqrt{2x-5}$ 有意义。

(3) 当 $m > n$ 时, $\sqrt{(m-n)^2} =$ _____。

(4) 若 $-\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{27}$, 则 $a =$ _____。

2. 求下列各数的平方根

(1) $(-4.5)^2$

(2) 169

(3) $1\frac{15}{49}$



3. 计算

(1) $\sqrt{64 \times 0.04}$

(2) $\sqrt{2\frac{2}{5}} \div \sqrt{\frac{3}{10}}$

4. 计算

(1) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$

(2) $2\sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{1}{27}}$

三、代数式

1. 做一做

(1) 某种水果单价为 5 元/千克, 则 m 千克需_____元。(2) 小陈上学步行速度为 4 千米每小时, 若小陈家到学校的路程为 S 千米, 则他上学需走_____小时。(3) 钢笔每支 a 元, 铅笔每支 b 元, 买 3 支钢笔和 4 支铅笔共需要_____元。2. 结论 上述问题中出现的如 $5m$, $\frac{s}{4}$, $3a + 4b$ 等式子, 称它们为代数式**提示:**

● 单独一个数或一个字母也是代数式, 如: -3 , m 等。

3. 例题

例 7 填空

(1) 长方形的长与宽分别为 m cm, n cm 则该长方形的周长为_____ cm, 面积为_____ cm^2 。(2) 圆的半径为 r cm, 它的面积为_____ cm^2 ;(3) 小刚在小学六年中共攒了 m 元零花钱, 放假后买文具用去 n 元, 剩下的钱全部存入银行, 则小刚存入银行有_____元。(4) a , b 两数的平方和减去它们积的 2 倍, 用代数式表示为_____。**解** (1) 长方形周长为 $2(m+n)$ cm, 面积为 mn cm^2 。(2) 圆的面积为 πr^2 cm^2 。(3) 小刚存入银行有 $(m-n)$ 元。(4) 用代数式表示为 $a^2 + b^2 - 2ab$ 。**提示:**

● 代数式中出现的乘号, 通常写作“ $\cdot$ ”或省略不写, 如 $3 \times a$ 常写作 $3 \cdot a$ 或 $3a$ 。

● 数字与字母相乘时, 数字写在字母的前面, 如 $3a$ 一般不写作 $a3$ 。

● 除法运算写成分数形式, 如 $1 \div a$ 常写作 $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$)。



【自己动手 1.3】

填空题

- (1) 小兵在军训打靶成绩为 m 环、9 环、10 环、7 环、7 环，则他的平均成绩为 _____ 环；
- (2) 鸡、兔同笼，鸡有 10 只，兔有 a 只，则共有头 _____ 个，脚 _____ 只；
- (3) 我校组织全体同学参加国防教育活动，一共有 m 个排，每排 5 个班，每班 10 人，则我校共有 _____ 名同学。
- (4) 某种汽车用 m 千克油可行 s 千米，则用 n 千克油可行 _____ 千米；
- (5) a, b 两数的和与它们的差的乘积用代数式表示为 _____。

四、代数式的值

1. 知识要点

(1) 做一做 三个同学做一个传数游戏，第一同学任意报一个数给第二个同学，第二个同学把这个数加 2，再传给第三个同学，第三个同学把听到数的和的平方，报出答案。若第一个同学报的数是 3，而第三个同学报的答案是 25，你说对吗？

(2) 结论 我们只需按照 $[x] \rightarrow [x+2] \rightarrow [(x+2)^2]$ 做下去，不难发现，第三个同学报出的答案是正确的，实际上，这是用具体的数 3 代替 $(x+2)^2$ 中的字母 x ，然后算出结果：

$$(3+2)^2 = 25$$

(3) 代数式的值 一般地，用数值代替代数式里的字母，按照代数式中的运算关系计算得出的结果，叫做代数式的值。

2. 例题

例 8 当 $a=3, b=-2, c=-3$ 时，求下列各代数式的值：

(1) $a^2 - 4bc$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$

(3) $(a+b+c)^2$

解 (1) 当 $a=3, b=-2, c=-3$ 时，

$$a^2 - 4bc = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 9 - 24 = -15$$

(2) 当 $a=3, b=-2, c=-3$ 时，

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \\ = 3^2 + (-2)^2 + (-3)^2 - 2 \times 3 \times (-2) - 2 \times (-2) \times (-3) - 2 \times 3 \times (-3) \\ = 9 + 4 + 9 + 12 - 12 + 18 = 40 \end{aligned}$$

(3) 当 $a=3, b=-2, c=-3$ 时，

$$(a+b+c)^2 = (3-2-3)^2 = 4$$

例 9 某工厂去年的年产值为 m 万元，今年比去年增长了 20%，如果明年仍按这个速度增长，该厂明年的年产值将达到多少万元？如果去年的年产值为 30 万元，那么明年的年产值是多少万元？

解 由题意得，今年的年产值为 $m \times (1+20\%)$ 万元，



于是,明年的年产值为 $m \times (1+20\%) (1+20\%) = 1.44m$ (万元)

当 $m=30$ 万元时,则明年的年产值为: $1.44m = 1.44 \times 30 = 43.2$ (万元)

答:该厂明年的年产值为 $1.44m$ 万元。如果去年的年产值为 30 万元,那么明年的年产值是 43.2 万元。



【自己动手 1.4】

1. 根据下列各组 a, b 的值,分别求出代数式 $a^2 + 2ab + b^2$ 的值:

(1) $x=3, y=-2$

(2) $x=-2, y=-5$

2. 若梯形上底为 a , 下底为 b , 高为 h , 则梯形面积 s 为 _____, 当 $a=4$ cm, $b=6$ cm, $h=5$ cm 时, 梯形面积 s 为 _____

3. 填空。完成表格 1.2。

表 1.2 填空

x	-2				
$3x$		-3			
$\frac{1}{x}$			2		-2
x^3				8	

4. A, B 两地相距 m 千米, 甲、乙两人分别以 a 千米/时, b 千米/时 ($a > b$) 的速度从 A 地到 B 地, 如果甲先走 2 小时, 试用代数式表示甲比乙早到的时间。当 $m=160, a=20, b=16$ 时, 求甲比乙早到多少时间?

五、整式的加减

1. 知识要点

(1) 做一做 某班参加学校歌咏比赛时, 第一排站了 a 名学生, 从第二排起每一排比前一排多 1 人, 一共站了五排, 则该班一共有 _____ 名学生参加歌咏比赛。

(2) 结论 容易知道: 第二、三、四、五排人数分别为 $a+1, a+2, a+3, a+4$, 故总人数为:

$$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4)$$

要把这个式子进一步化简, 实际上是要进行整式的加减运算。

2. 例题

例 10 求 $x^2 - 9x - 3$ 与 $-3x^2 + 4x - 2$ 的差

$$\begin{aligned} \text{解 } & (x^2 - 9x - 3) - (-3x^2 + 4x - 2) \\ & = x^2 - 9x - 3 + 3x^2 - 4x - 2 = 4x^2 - 13x - 1 \end{aligned}$$

例 11 计算 $-3y^3 + (3xy^2 - 2x^2y) - 3(xy^2 - y^3)$

$$\begin{aligned} \text{解 } & -3y^3 + (3xy^2 - 2x^2y) - 3(xy^2 - y^3) \\ & = -3y^3 + 3xy^2 - 2x^2y - 3xy^2 + 3y^3 = -2x^2y \end{aligned}$$

3. 整式加减的一般步骤

如果有括号,就先去掉括号;如果有同类项,再合并同类项

例 12 先化简,再求值。

$$2(x^2y - xy^2) - 3(xy^2 - 2x^2y) \quad \text{其中 } x = -1, y = -2$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 2(x^2y - xy^2) - 3(xy^2 - 2x^2y) \\ &= 2x^2y - 2xy^2 - 3xy^2 + 6x^2y = 8x^2y - 5xy^2 \end{aligned}$$

当 $x = -1, y = -2$ 时:

$$\text{原式} = 8 \times (-1)^2 \times (-2) - 5 \times (-1) \times (-2)^2 = -16 + 20 = 4$$



【自己动手 1.5】

1. 填空题

$$(1) 4x - (-2x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) -3x^2 - (-2x^2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) -3xy^2 - 2xy^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 计算

$$(1) (3x^2 + 2x - 1) - (2 - x + 3x^2)$$

$$(2) (4xy - 3y^2) - 5xy - 2(2y^2 - 3xy)$$

3. 先化简再求值

$$(1) 3a^2 - b^2 + (2a^2 - b^2) - 2(a^2 - 2b^2) \quad \text{其中, } a = -2, b = 3$$

$$(2) 3(5x^2y - xy^2) - 2(xy^2 + 6x^2y) \quad \text{其中, } x = -\frac{1}{2}, y = 2$$

六、整式乘法及因式分解

1. 知识要点

(1) 幂 求几个相同因数的积的运算叫做乘方,乘方的结果叫做幂,在 a^n 中, a 是底数, n 是指数, a^n 是 a 的 n 次方的结果叫做 a 的 n 次幂。如: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, 其中 2 是底数,4 是指数,结果是 2 的 4 次幂。

(2) 幂的运算法则

$$\textcircled{1} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 为正整数})$$

$$\textcircled{2} \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m > n \text{ 且为正整数, } a \neq 0)$$

$$\textcircled{3} (a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \text{ 为正整数})$$

$$\textcircled{4} (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (n \text{ 为正整数})$$

(3) 整式乘法 单项式乘以单项式、单项式乘以多项式、多项式乘以多项式。

(4) 乘法公式

$$\textcircled{1} \text{平方差公式} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\textcircled{2} \text{完全平方公式} \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\textcircled{3} \text{立方和、立方差公式} \quad (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$



④和(差)的立方公式 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

(5)因式分解 把一个多项式化为几个整式的积的形式,常用的方法有:

①提公因式法

②公式法(逆用乘法公式)

③十字相乘法

④分组分解法

2. 例题

例 13 计算 (1) $(-0.25)^9 \times 4^8$ (2) $(ab^2c)^2 \cdot (a^2b)^3 \div (a^5b^6)$

解 (1) $(-0.25)^9 \times 4^8 = (-1)^9 \times 0.25^8 \times 0.25 \times 4^8$
 $= -0.25 \times (4 \times 0.25)^8 = -0.25 \times 1^8 = -0.25$

(2) $(ab^2c)^2 \cdot (a^2b)^3 \div (a^5b^6)$
 $= (a^2b^4c^2) \cdot (a^6b^3) \div (a^5b^6) = a^{2+6-5}b^{4+3-6}c^2 = a^3bc^2$

想一想

$(-0.125)^{100} \times 8^{102}$

提示:

● 利用幂的乘方法则进行计算时,要注意运算顺序和法则的逆向使用

例 14 计算 $(-3a+1)(3a+1)$

解 $(-3a+1)(3a+1) = (1-3a)(1+3a) = 1 - (3a)^2 = 1 - 9a^2$

例 15 因式分解 $3x^2 - 2x - 5$

解 $3x^2 - 2x - 5 = (3x-5)(x+1)$

想一想

$2x^2 - 3x - 20$

提示:

● 十字相乘法是二次三项式因式分解的常用方法

例 16 因式分解: $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y$

观察题目的特点,前三项满足差的完全平方公式,后两项有公因式可提,因此可以考虑进行分组分解法。

解 $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y = (x^2 - 4xy + 4y^2) - (6x - 12y)$
 $= (x-2y)^2 - 6(x-2y) = (x-2y)(x-2y-6)$

想一想

$x^2 - 4xy - 6x + 4y^2 + 12y - 7$

提示:

● 分组分解法的关键是要明确分组的目的。通常从以下几个方面考虑:

1. 分组后,各组之间存在公因式。
2. 分组后,各组之间具有某个乘法公式的形式。
3. 分组后,各组内具有某个乘法公式的形式。



【自己动手 1.6】

1. 填空题

(1) $(3a+2b)^2 - (3a-2b)^2 =$ _____

(2) $(-0.5b^2c)(4ab^2-b) =$ _____

(3) 如果单项式 $6x^{m-1}y^{m+n}$ 和 $-2x^3y^{2-n}$ 是同类项, 那么 $m =$ _____ $n =$ _____

(4) 因式分解 $8-a^3 =$ _____

2. 先化简再求值

$$(m+n)(m^2-mn+n^2) + n^2(m-n) - m^3 \quad \text{其中 } m = -\frac{1}{2}, n = 2$$

3. 因式分解

(1) $2x^2 - 3x - 9$

(2) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y$

(3) $16 - 4a^2 - b^2 + 4ab$

(4) $3x^2z - 4ay^3 - 3xy + 4axy^2z$

七、分式

1. 知识要点

(1) 分式基本性质 $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}; \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c} (c \neq 0)$

(2) 分式的符号法则 $-\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b} = \frac{a}{b}; -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

(3) 分式的运算 分式的运算如下:

① 加减法 $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}; \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

② 乘除法 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

③ 乘方 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

2. 例题

例 17 当 $m = -4$ 时, 求 $\frac{m+1}{m^2+m-2} \div \left(m-2+\frac{3}{m+2}\right)$ 的值。

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \frac{m+1}{m^2+m-2} \div \left(m-2+\frac{3}{m+2}\right) \\
 &= \frac{m+1}{(m+2)(m-1)} \div \frac{(m+2)(m-2)+3}{m+2} = \frac{m+1}{(m+2)(m-1)} \cdot \frac{m+2}{m^2-1} \\
 &= \frac{m+1}{(m+2)(m-1)} \cdot \frac{m+2}{(m+1)(m-1)} = \frac{1}{(m-1)^2} \\
 \text{当 } m = -4 \text{ 时, 原式} &= \frac{1}{(-4-1)^2} = \frac{1}{25}
 \end{aligned}$$