中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

常微分方程論講義

И. Г. ПЕТРОВСКИЙ 著

黄　克　歐　譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

常微分方程論講義

И. Г. 彼得羅夫斯基著
黃　克　歐　譯
胡　祖　熾　校　訂

商　務　印　書　館

本書係根據蘇聯科技出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的彼得羅夫斯基（И. Г. Петровский）著“常微分方程論講義”（Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений）1949年第三版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲綜合大學數理系教學參考書。

常微分方程論講義

黄克歐譯

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司 總經售

商務印書館北京廠 印刷

（59287）

1953年10月初版 版面字數146,000

印數1—6,000 定價￥10,000

協

第一版序言

這個講義我曾在 1936—1937 學年度在沙拉托夫國立大學和在莫斯科國立大學講授過(在莫斯科國立大學講授時曾稍加修改)。我不想敍述盡可能多的,用於各種特殊類型微分方程的積分方法;用俄文寫的教程中已經有了充分完備地敍述了這些方法的教程。我也不打算敍述常微分方程理論的各部份。在這些理論中我只選擇了幾個題目,而力求把它們敍述得盡可能的完全且嚴格,如同現時大多數的數學課程所敍述的一樣。我沒有假定我的學生通曉分析函數的理論,所以對於學習本書所必需具有的有關這個理論的知識,我或者是加以解釋,或者是確切地指出在那裏可以找到它們。

我應該感謝巴拉巴諾夫(А. И. Барабанов),因為他的筆記是敍述前 21 節的基礎。並應感謝司切巴諾夫(В. В. Степанов)、加里別爾(С. А. Гальперн)及穆什吉士(А. Д. Мышкис),因爲他們審查了我的全部稿子,並作了一系列的寶貴的指示。

依·彼得羅夫斯基

一九三九年

第三版序言

在第三版中,我把講共軛方程的那一節改爲講二級線性方程的解的零點。穆什吉士(А. Д. Мышкис)補充了一系列的習題。

依·彼得羅夫斯基

一九四九年二月十五日

目 錄

第二部份　常微分方程組

常微分方程論講義

第一部份　含一個未知函數的一階微分方程式

第一章　一般概念

§ 1. 定義　例題

一自變數 x, 和它的函數 y, 與這個函數的導函數 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 間的形如下式的關係式:

$$F(x, y, y', y'', \cdots y^{(n)}) = 0$$

叫做 n 階常微分方程式。設用一個 x 的單值函數[1] $\varphi(x)$ 代替上式中的 y, 用 $\varphi'(x)$ 代 $y', \cdots$, 用 $\varphi^{(n)}(x)$ 代 $y^{(n)}$ 後,若上式變成一個恆等式,則函數 $y=\varphi(x)$ 叫做這微分方程式的解。如不特別聲明，本書中所考慮的數量僅取實數值。

可見在常微分方程式中，未知函數僅是一個自變數的函數。與這相反,在偏微分方程式中的未知函數,則是幾個自變數的函數。以後凡說到微分方程式都指常微分方程式而言。

許多自然科學問題,可化到常微分方程式。現在用下面兩個例題,來說明這一事實。

例題 1. 設一點沿 x 軸運動，其速度 $f(t)$ 爲已知。若 $f(t)$ 是連續的有界函數,此外並假定當 $t=t_0$ 時，這點之橫坐標爲 x_0。試求該點運動的規律,這就是說,求該點之橫坐標與時間的函數關係。

1) 以後如不特別聲明,函數均指單值函數。

這一問題能化到求微分方程式 $\frac{dx}{dt}=f(t)$ 之一解，而這解當 $t=t_0$ 時的值變爲 x_0。由積分學上就知道這解可用公式：

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(t)dt$$ 表之。

例題 2. 已知鐳的分解的速率與這時所存鐳之質量成正比。設已知在 t_0 時存有 R_0 克鐳，試求在任何時間 t 之存鐳量 R。

用 $c(c>0)$ 表比例常數，則上述問題可變成求微分方程式

$$\frac{dR}{dt}=-cR$$

之一解，而此解於 $t=t_0$ 時的值變爲 R_0，這解實在就是函數

$$R=R_0e^{-c(t-t_0)}.$$

由上面兩個例題可知許多個函數能同時滿足同一個微分方程式。所以要確定這未知函數，不但要先知道它所滿足的微分方程式，還應該預先指定當自變數取一定值時，未知函數所取之值(開始值)。以上兩個例題中，開始值都唯一地決定了微分方程式的解。

微分方程式論的基本問題是：求已知微分方程式的一切解，並且研究這些解的性質。求一個微分方程式的解叫做積分這個微分方程式。

§ 2. 幾何解釋 問題的推廣

我們現在來研究下列形狀的微分方程式，

$$y'=f(x,y), \qquad (1)$$

這裏 $f(x,y)$ 是確定於 (x,y) 平面某一個區域[1] G 上的函數。在這區域上任一點，這方程式規定其解的圖線在這點的切線的斜率。設在 G 上

---

1) 區域 G 是指具有下列兩個性質的非虛無點集：(1) G 之任一點都是 G 的內點，即此點有一鄰域完全屬於 G；(2)點集 G 是連通的，即 G 之任意兩點都可用有限條完全屬於 G 的直線段連接起來。

一區域之邊點是此區域的點的極限之不屬於此區域者。一區域所有邊點組成一集點，叫做這區域的邊界。一區域連同其邊界叫做閉區域 $\overline{G}$。

每一點(x,y),用一線段標明由$f(x,y)$的值所定出的切線方向[1]，則得一方向場；而前述求微分方程式的解的問題，即可敍述為：求一曲線$y=\varphi(x)$,使這曲線在每一點都有方程(1)規定的切線。[或者我們時常這樣說,這曲線的方向都由方程(1)規定。]

從幾何觀點來看,問題這樣提法,有下列幾個不够自然的情況：

1)　要使曲線在區域G的任一點(x,y)之斜率等於$f(x,y)$,因而我們須將平行於Oy軸的方向除外[2]。

2)　我們只考慮x的單值函數的圖線。因此我們不考慮可與一垂直於x軸的直線有兩個或兩個以上的交點的曲線。

所以我們把前面這問題推廣一些兒，就是：我們准許方向場中有些點的方向是平行於Oy軸的。在這些點上，以Ox軸為標準的斜率雖無意義，但可採用以Oy軸為標準的斜率。因此，除微分方程式(1)外,我們同時考慮方程式

$$\frac{dx}{dy}=f_1(x,y), \tag{1'}$$

當$f(x,y)\neq 0$時，這裏的$f_1(x,y)=\dfrac{1}{f(x,y)}$;若第一方程式無意義,而第二方程式有意義，我們就用第二方程式。於是我們可將積分微分方程式(1)及(1′)的問題改述如下：在區域G內求一切曲線[3],使曲線上任何一點之方向，均由方程式(1)或(1′)[4]所規定。這些曲線叫做方程式(1)與(1′)的,或由(1)及(1′)所規定的方向場的積分曲線。顯然方程

---

1)　我們不區別一線段的兩個方向。

2)　本書中只用有限數量。

3)　當t在區間(a,b)內取各值時,由方程$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, 所定出的點(x,y)的集合叫做曲線；這裏的a可為$-\infty$, b也可為$+\infty$。我們應更假定$\varphi(t)$與$\psi(t)$都有連續導函數,且假定$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$, 則此曲線上一點$x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$附近的一段若不能看作以x為自變數的函數$y=y(x)$的圖線就可看作以y為自變數的函數$x=x(y)$的圖線。因為假定$\psi'(t_0)$與$\varphi'(t_0)$不會都等於0,倘使$\varphi'(t_0)\neq 0$,於是由於$\varphi'(t)$的連續性,$\varphi'(t)$在某一區間$[t_0-\epsilon,\ t_0+\epsilon]$內必保持一定的符號。所以對$t$的這些值必可自$x=\varphi(t)$單值的解出$t$,設由此得$t=\lambda(x)$,把它代$y=\psi(t)$,卽得$y=\psi[\lambda(x)]$,這就是說$y$是$x$的函數。

4)　有時方向場內不僅只在G的內部給定，也在其邊界的某一部份或全部邊界上給定,此時積分曲線則不僅經過G的內部,也經過它的邊界的某些部份了。

(1)的解的圖線都是方程式(1)及(1′)的積分曲線，但方程(1)，(1′)的一切積分曲線，却不都是(1)的解的圖線。以後如已明白指出：

$$f(x,y)=\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

則與方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{2}$$

在一起的方程式

$$\frac{dx}{dy}=\frac{N(x,y)}{M(x,y)}=f_1(x,y) \tag{2'}$$

將不再寫出。

有時我們把這樣方程寫爲關於 x 與 y 比較對稱的形狀如下：

$$Mdx-Ndy=0. \tag{3}$$

例題 1. 方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}, \tag{4}$$

除原點而外，處處規定方向場。這方向場如圖 1 所示。任一如此定出的方向都經過原點。顯然對任何一數 k，函數

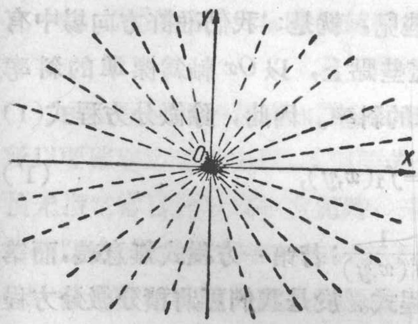

圖 1

$$y=kx \tag{5}$$

都是方程式(4)的解。此方程式之任一積分曲線都可用

$$ax+by=0 \tag{6}$$

表之，此處 a, b, 是兩個不同時爲 0 的任意常數。Oy 軸是其積分曲線，但不是其解的圖線。

但方程式(4)在原點不能規定方向場，所以直線(5)與(6)上應當將原點去掉才是積分曲線。所以更正確的說，方程(4)的積分曲線不是那些經過原點的整條直線，而是那些從原點出發的“半直線”。

例題 2. 方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \tag{7}$$

除原點外，處處規定方向場，如圖 2 所示。在一點(x,y)方程式(4)及(7)

所規定的兩方向互相垂直。顯然一切以原點爲心的圓都是方程(7)的積分曲線。而函數

$$\left.\begin{array}{l} y=+\sqrt{R^2-x^2} \\ y=-\sqrt{R^2-x^2} \end{array}\right\}(-R<x<+R)$$

及

都是方程(7)的解。

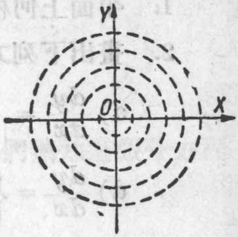

圖 2

現在規定下列幾個名詞的定義：

1. 爲簡便計，有時用"經過點(x_0,y_0)的解"代替"經過點(x_0,y_0)的解的圖線"。

2. 若函數$\varphi(x_1,c_1,c_2,\cdots,c_n)$當我們適當地選擇常數$c_1, c_2,\cdots c_n$時，能變成一個微分方程式的任一解，且這解的圖線在$G$內，就叫這函數爲這方程式在區域$G$內的通解[1]。

3. 方程$\Phi(x,y)=0$的圖線若爲方程式(1),(1′)的積分曲線，則$\Phi(x,y)=0$叫做(1),(1′)的一個積分。

4. 若適當的選擇常數$c_1 c_2,\cdots,c_n$之値代入方程

$$\Phi(x, y, c_1, c_2\cdots c_n)=0$$

後，能自這方程$\Phi=0$得到已知微分方程的在區域G內任一積分曲線，則$\Phi(x, y, c_1, c_2, \cdots c_n)=0$叫做這微分方程在區域$G$內的通積分。

例如，在例題1中，(5)式除y軸以外是方程式(4)在整個(x, y)平面上的通解，而(6)式除原點以外是這方程式在整個(x, y)平面上的通積分。同樣在例題2中，

$$y=+\sqrt{R^2-x^2}$$

爲在整個的半平面$y>0$內的通解；而

$$x^2+y^2=R^2 \tag{7'}$$

爲這微分方程式把坐標原點除外的(x,y)整個平面內的通積分。方程式(4)除了(6)以外，別無其他積分曲線，而方程(7)除(7′)而外，亦別無其他積分曲線。這一事實將於§5中證明之。

[1] 這定義與定義4都與其他書中所用定義涵義不同。

習題

1. 平面上何種區域沒有邊界?

2. 畫出下列方程式的積分曲線:

a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy}{|xy|}$, b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{|x+y|}{x+y}$, c) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+|x|}{y+|y|}$,

d) $\dfrac{dy}{dx}=\begin{cases}0 \text{ 當 } y\neq x \text{ 時,}\\ 1 \text{ 當 } y=x \text{ 時,}\end{cases}$ e) $\dfrac{dy}{dx}=\begin{cases}1 \text{ 當 } y\neq x \text{ 時,}\\ 0 \text{ 當 } y=x \text{ 時。}\end{cases}$

並指出這些方程規定方向場的區域。

3. 設給定曲線 $x=\varphi(t), y=\psi(t), a<t<b$, 而 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 適合第 3 面附註 3 中的條件, 設 $a<a'<b'<b$. 求證:

甲) 可以把區間 $a'\leqslant t\leqslant b'$ 分成有限個互相連接的區間,使所設曲線相應於每一個這樣的區間內的一段是一個有連續導數的函數 $y=y(x)$ 的圖線,或者是有同樣性質的函數 $x=x(y)$ 的圖線。

乙) 有常數 $\varepsilon>0$, 使於所有 $t'(a'\leqslant t'\leqslant b')$, 考慮中的曲線對應於 $t'\leqslant t\leqslant t'+\varepsilon$ 的一段不自己相交。

丙) 曲線上以相應於 $t=t_1, t=t_2(a'\leqslant t_1<t_2\leqslant b')$ 之點爲端點的一段弧長與 t_2-t_1 之比有界並大於某一定正數。

4. 是否下列兩個要求是互相無關的:

甲) 方向場中沒有平行於 Oy 軸的方向;

乙) 所有積分曲線是含 x 的函數的圖線。

第二章　最簡單的微分方程式

§ 3. 形如 $\frac{dy}{dx}=f(x)$ 的方程式

第一種情形　設 $f(x)$ 在 $a<x<b$ 時連續。我們熟知這微分方程式的一解爲函數

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$$

[x_0 及 x 均在區間(a, b)內];而其他任一解與此解之差僅爲一常數。即其一切積分曲線都可由其一積分曲線平行於 Oy 軸移動而得。其通解爲函數

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi+C.$$

給定條形區域 $a<x<b$ 內一點(x_0,y_0),經過這點必有一積分曲線,常數C也可唯一地決定爲: $C=y_0$。即經過條形區域 $a<x<b$ 內任一點(x_0, y_0)必有一積分曲線,且僅此積分曲線經過(x_0, y_0);而其方程式就是

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

第二種情形　設當 $x\to c$ $(a<c<b)$時,$f(x)\to\infty$。但在(a,b)內其他各點 $f(x)$ 都連續。命直線 $x=c$ 上的方向場由方程 $\frac{dx}{dy}=0$ 規定。

此時,愈靠近直線$x=c$時,方向場愈來愈陡。當然在開區域$a<x<c$ 及 $c<x<b$ 內的情形和第一種情形一樣。例如點(x_0,y_0)若在條形區域 $a<x<c$ 內,則過這點有一條,而且只有一條積分曲線在這長條內,其方程爲

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

若積分 $\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$ 當 $x\to c-0$ 時收斂,則此曲線當 $x\to c-0$ 時必趨

向直線 $x=c$ 上某一定點(圖 3)。

反之，若積分 $\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$ 爲發散，則當 $x\to c-0$ 時曲線必以 $x=c$ 爲漸近線(圖 4)。

在長條 $c<x<b$ 內積分曲線的形狀亦可類似地討論。圖 3 及圖 4

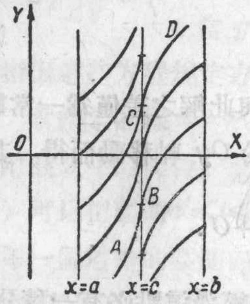

圖 3

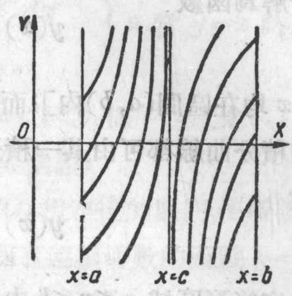

圖 4

卽表示出這兩種可能的情形，但畫圖 3 時，我們更假定了：當 $x\to c-0$ 時，積分

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi,\ a<x_0<c \tag{8}$$

收斂，且 $x\to c+0$ 時積分

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi,\ c<x_0<b \tag{9}$$

也收斂，而且假定當 $x\to c$ 時 $f(x)\to+\infty$。畫圖 4 時則假定積分(8)，(9)依次當 $x\to c-0$ 及 $x\to c+0$ 時都發散。

直線 $x=c$ 也是積分曲線。

現在我們來看在條形區域 $a<x<b$ 內的一切積分曲線。若積分(8)，(9)當 $x\to c$ 時收斂，則過一定點 $A(x_0, y_0)$ 方程式必有無窮條積分曲線。因爲，若 $a<x_0<c$，則一切像圖 3 中所畫出的 $ABCD$ 的曲線都是積分曲線。

在積分(8)，(9)當 $x\to c\pm0$ 時收斂，而

$$\lim_{x\to c+0} f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to c-0} f(x)=-\infty$$

的情形則積分曲線的形狀可用圖 3a 表示。此時過直線 $x=c$ 上任一點必有無窮條積分曲線經過，例如圖 3a 中的 AA_1, ABB_1, ACC_1……等。經過條形區域 $a<x<c$ 或 $c<x<b$ 的內部任一定點，例如經過 B_1，此時則僅有一條積分曲線 B_1BA 經過。像曲線 B_1BB_2 則因其在 B 點有一尖點（излом）由第 3 面附註（3）我們並不把它看作積分曲線。

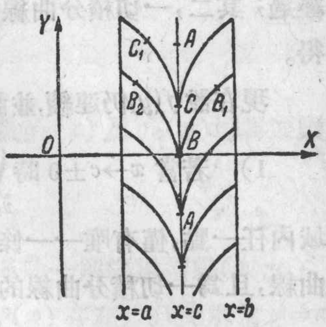

圖　3a

積分(8)與(9)若都發散，則過條形區域 $a<x<b$ 內任一點有一條，且僅此一條，積分曲線經過。

(8)(9)兩積分中僅有一積分收歛的情形，留請讀者自行討論。

習　題

1. 若 $f(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$, $\varphi(c)=0$ 而 $\varphi'(c)$ 存在時，那種情形可能出現？此處假定 $\varphi(x)$ 處處連續並且當 $x\neq c$ 時 $\varphi(x)\neq 0$。

2. 畫出下列方程式的積分曲線的形態的圖形：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}},\quad \frac{dy}{dx}=e^{\frac{1}{x}},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x},\quad \frac{dy}{dx}=x^a\sin\frac{1}{x}\text{（分別對不同的 } a \text{ 來討論）.}$$

特別要畫出這些積分曲線當 $x\to 0$ 時的形態的圖形。

§ 4. 形如 $\frac{dy}{dx}=f(y)$ 的方程式

實際上，這一方程與前節中所討論的方程的區別，只在 x 及 y 的互換。設 $f(y)$ 在區間 $a<y<b$ 內連續，且恆不爲 0，則此方程可改寫爲

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(y)}。$$

由此易知：其一，過條形區域 $a<y<b$ 內任一定點 (x_0, y_0) 只有唯

一的積分曲線

$$x=x_0+\int_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{f(\eta)}$$

經過；其二，一切積分曲線均可由平行於 Ox 軸移動其一條積分曲線而得。

現在設 $f(y)$ 仍連續，並設在 (a,b) 中一點 $y=c$，且僅在此點，$f(y)=0$，則

1) 若當 $x\to c\pm 0$ 時 $\int_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{f(\eta)}$ 發散，則過直線 $y=a$, $y=b$ 間條形區域內任一點，僅有唯一一條積分曲線經過。直線 $y=c$ 本身亦爲一積分曲線，且爲一切積分曲線的漸近線；

2) 若當 $y\to c\pm 0$ 時 $\int_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{f(\eta)}$ 收歛，且當 x 經過 $x=c$ 時，$f(x)$ 不變號，則過條形區域 $a<y<b$ 內任一定點，必有無窮條積分曲線經過；

3) 若當 $y\to c\pm 0$ 時 $\int_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{f(\eta)}$ 收歛，且當 x 經過 $x=c$ 時，$f(x)$ 變號，則過直線 $y=c$ 上任一點有無窮條積分曲線經過，而在條形區域 $a<y<c$ 或 $c<y<b$ 內任一點，只有唯一的一條積分曲線經過。

以上結論均可由 § 3 推出。若將圖 4, 3, 3a 中坐標軸 Ox, Oy 互換，卽順次得到本節中三種情形的幾何圖形。

習 題

1. 若 $f'(c)$ 存在時，屬於那一種情形？

2. 畫出下列方程式的積分曲線的形態的圖形：

$$\frac{dy}{dx}=|y|,\quad \frac{dy}{dx}=\sin y,\quad \frac{dy}{dx}=\tan\frac{1}{y}.$$

3. 設 $f(y)$ 連續，$f(c)=0$ 而無論與 $y=c$ 多麽近，當 $y<c$ 及 $y>c$ 時有 y 的值使 $f(y)>0$，也有 y 的值使 $f(y)<0$。求證經過任一點 $x=x_0$, $y=c$ 方程式 $y'=f(y)$ 僅有一解 $y\equiv c$。