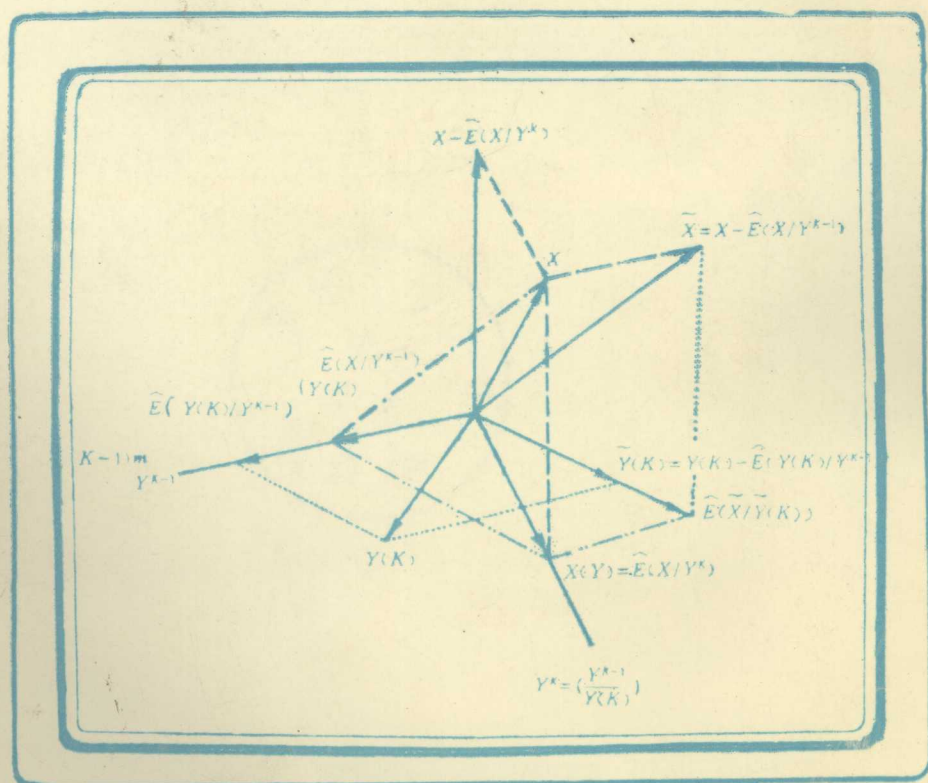


最优估计和控制

杨惟高 著



武汉工业大学出版社

最优估计和控制

杨惟高 著



武汉工业大学出版社

鄂新登字 13 号

内 容 简 介

本书联系确定性控制理论和工程实际,较系统地阐述了最优估计和随机控制的基本问题,力图使读者能够从工程实际出发,理解和掌握最优估计和随机控制问题。在国内系统地论述这方面内容的书籍尚不多见。

全书共分六章:一、绪论,二、工程实际中随机过程的描述,三、随机线性系统的数学模型,四、基本最优估计方法,五、状态估计和卡尔曼滤波,六、随机最优控制。

本书可作为自动控制及各类自动化专业高年级学生和研究生的参考书,也可供从事通讯、量测和控制的工程技术人员参考。

最优估计和控制

◎杨惟高 著

责任编辑 朱家万

责任校对 崔庆喜

*

武汉工业大学出版社出版发行
武汉工业大学出版社印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:12 字数:276 000

1993年12月第一版 1993年12月第一次印刷

印数:1~1500册

ISBN 7-5629-0839-7/TP·16

定价:5.60元

序

在自动控制系统和其它一些动态系统,如社会经济、通信、交通运输等系统之中,都存在随机现象。这种随机现象一方面是由客观环境对系统施加的随机影响造成的,另一方面是由于对系统进行观测时有随机观测误差。因此从本质上说,这类系统都是随机系统。在研究随机系统的演化过程时,不应忽略系统的随机干扰和随机观测误差。本书系统地论述了随机系统的最优估计和最优控制问题,是值得从事自动化各专业和各类动态系统的高等学校教师、学生、科学工作者和工程技术人员阅读的。

我认为本书有以下特点:第一,随机系统的最优估计和控制的理论与方法是建立在随机过程论的基础上,对学习工程技术的人来说,随机过程论是比较艰深的数学理论,理解它有一定难度。本书能联系工程实际和确定性控制理论,深入浅出地把基本原理和方法阐述清楚,是非常可贵的。例如,在推导卡尔曼滤波方程时,作者首先介绍物理意义明确,简单直观的初等法,然后再用正交投影法在更严格的数学基础上推导了这个方程。由于卡尔曼滤波问题是本书的核心部分,因此作者用两种方法推导,兼顾了易于理解和论证严谨等两个方面,是处理得很好的。类似这样的例子在本书中还有一些,不一一列举。第二,本书内容选择是恰当的。本书篇幅不大,但深入透彻地论述了具有二次型性能指标、高斯分布的随机离散线性系统的最优估计和控制问题,即所谓 LQG 问题。作者在前言和绪论中都对本书的取材作了详细的解释,我同意他的观点。我认为读者们如果把本书中这些最基本又最实用的部份学好了,不仅可以用它解决许多实际问题,而且以后根据需要去钻研本书中未涉及到的某些理论,如非线性滤波等,也有了良好的基础。第三,本书在内容编排上也很有特色。根据情况,有的章作者在章末总结,归纳了本章的主要内容。例如在第四章,当介绍了五种基本的估计方法以后,对这五种估计方法作了比较,指出它们之间的关系,便于读者根据估计问题的实际情况选用其中最适宜的估计方法。又如在第五章,由于卡尔曼滤波的计算比较复杂,为帮助读者更深刻地理解卡尔曼滤波的计算步骤,在本章之末,列举了四个算例,它们都很有启发意义。本书还有许多其它优点,如逻辑性很强,文字流畅等,我相信读者们在阅读过程中会作出评价的。

本书的作者杨惟高副教授多年从事最优估计和控制的数学、科研工作,积累了丰富的经验,发表了学术论文和出版了译著。以他在本门学科上高深的学术造诣写出了这本内容精练可读性很强的好书,是值得庆贺的。我相信这本书能得到广大读者的欢迎。

陈 珽

于华中理工大学

1993年9月15日

前 言

50年代以来,火箭、飞机、船舶、人造卫星和宇宙飞船等运动体的控制和导航技术得到了迅速发展,而在发展过程中,也遇到了随机干扰和量测噪声等实际问题。为了解决这些问题,首先必须对被干扰和噪声弄模糊了的量测信号进行处理和估计,从而形成了参数估计、状态估计和随机控制这三个互相联系、互相渗透的领域。为了把这些理论成果很好的应用于工程实际,广大高级工程技术人员需要掌握这方面的知识。70年代以来,国外高等院校相继开设了这方面的课程。例如,美国空军工程学院的三卷教材“随机模型、估计和控制”(Academic Press, 1979~1982)。80年代以来,我国也出版了一些系统辨识、最优估计和随机控制方面的著作。在我国高等院校中,对系统辨识、最优估计和随机控制,也得到了越来越普遍的重视。

本书联系确定性控制理论和一些工程实际,较系统地阐述了最优估计和随机控制的基本问题。本书力图使读者能够从工程实际出发,理解和掌握最优估计和随机最优控制问题,在讲到象多维随机过程这样一些复杂、抽象的数学问题时,我们尽量阐明它所包含的物理意义。

本书最优估计的内容,包括了参数估计和状态估计的基本原理,但主要论述系统的状态估计,即离散线性系统的卡尔曼滤波。

由于线性系统可以满足一般实际系统的基本要求;当系统中确实存在非线性因素时,常常可以进行线性化处理。另一方面,当前在实际应用中,普遍使用计算机来实现控制策略,对计算机控制而言,仅离散时间情况就足够了。为了叙述的系统性,本书的内容虽然也涉及到连续线性系统,但主要讨论离散线性系统的情况。

在工程实际中,一般系统噪声和量测噪声的频带,普遍比实际系统本身具有的通频带要宽广得多,因此在系统通频带的狭窄范围内,噪声的功率谱密度函数基本保持恒值不变,可以把这些噪声等效地视为“白噪声”,从而带来数学处理上的方便,而又不会影响系统的分析结果。如果在系统的通频带之内,噪声的功率谱密度函数,不能视为常值,这时我们通过建立一个虚拟的“成形滤波器”,使其输入信号为白噪声,而输出信号为实际的有色噪声。由于成形滤波器是一个线性环节,把它加入原来的系统,从而构成增广的线性控制系统。对这种增广的线性控制系统而言,其噪声均为理想的白噪声。

另一方面,工程实际中的系统噪声和量测噪声,都是由大量的、谁也不比谁占绝对优势的独立因素共同作用引起的,根据概率论中的中心极限定理,它们的概率分布是高斯的、至少是近似高斯的。所以本书主要讨论二次型性能指标下的线性高斯系统的最优控制问题。

由于别尔曼的“动态规划”方法本身具有理论推导简单、容易理解掌握、又便于在计算机上实现等特点,所以本书主要采用“动态规划”方法来解决随机最优控制问题。

由于作者水平有限,书中的缺点和错误,恐怕在所难免,诚恳希望大家批评指正。

著者 1993.7

目 录

第一章 绪 论

§ 1-1 建模和最优控制问题的提法	1
§ 1-2 最优控制律	2
§ 1-3 随机最优控制和 LQG 问题	2
§ 1-4 最优估计和滤波理论	3

第二章 工程实际中随机过程的描述

§ 2-1 从概率分布特性描述随机过程——高斯过程	4
§ 2-2 从时间转移特性描述随机过程——马尔柯夫过程	6
一、定义	6
二、联合概率密度函数与转移概率密度函数	6
三、切普曼(Chapman)—柯尔莫哥洛夫方程	7
四、高阶马尔柯夫过程	7
五、马尔柯夫过程的两个重要性质	7
六、高斯—马尔柯夫过程	8
§ 2-3 从功率特性描述随机过程——功率有限过程(二阶过程)	8
一、定义	8
二、性质	8
§ 2-4 从随机过程的增量来描述随机过程——增量过程	10
一、增量是独立的随机过程——独立增量过程	10
二、增量是不相关的随机过程——不相关增量过程	11
三、增量是正交的随机过程——正交增量过程	12
§ 2-5 从相关概念描述随机过程——白噪声过程	13
一、从频率域描述白噪声过程	13
二、从时间域描述白噪声过程	15
§ 2-6 维纳过程(扩散过程)	16
一、定义	17
二、维纳过程的性质	18
三、维纳过程与白噪声的关系	18
四、维纳过程是高斯—马尔柯夫过程	20
习题	21

第三章 随机线性系统的数学模型

§ 3-1 随机连续线性系统的数学模型	22
---------------------------	----

一、随机连续性系统的一般描述	22
二、模型的基本假设	24
三、随机线性时变系统	25
四、随机线性定常系统	30
五、渐近稳定的定常系统	31
六、扩充状态模型	33
七、小结	36
§ 3-2 随机离散线性系统的数学模型	36
一、连续系统的离散化方法及离散数学模型	36
二、离散线性系统模型的基本假设	38
三、假设条件下离散线性时变系统模型的特点	39
四、假设条件下离散线性定常系统模型的特点	43
五、渐近稳定的定常系统在广平稳白噪声序列作用下模型的特点	44
六、扩充状态模型	45
七、小结	48
习题	49

第四章 基本最优估计方法

§ 4-1 估计问题的背景及其一般提法	50
§ 4-2 最优估计及其性能指标和损失函数	52
一、最优估计的概念	52
二、最优估计的性能指标与损失函数	52
三、第一种情况的损失函数和性能指标	53
四、第二种情况的损失函数和性能指标	54
§ 4-3 最小二乘估计	55
一、经典最小二乘估计	55
二、加权最小二乘估计	58
三、马尔柯夫估计	59
§ 4-4 线性最小方差估计	60
一、定义	60
二、线性最小方差估计的导出	60
三、线性最小方差估计是一种无偏估计	62
四、线性最小方差估计是线性无偏估计中误差方差阵最小的一种估计	63
五、线性最小方差估计是被估计量在观测矢量上的正交投影	64
六、线性最小方差估计与马尔柯夫估计	64
七、 X 对 Y 的条件期望	66
§ 4-5 极大似然估计	66
一、似然函数	67
二、极大似然估计的定义	67
三、极大似然估计求法和似然方程	67
§ 4-6 极大验后估计	70
一、极大验后估计的定义	70

二、极大验后估计的求法和验后方程	71
三、极大验后估计和极大似然估计的关系	71
§ 4-7 最小方差估计	73
一、最小方差估计的定义	73
二、最小方差估计的求法	73
三、最小方差估计是一种非线性估计	74
四、最小方差估计是一种无偏估计	74
五、最小方差估计具有最小的估计误差方差阵	75
六、最小方差估计等于条件期望的结论具有相当普遍的意义	75
七、高斯分布情况下的最小方差估计	76
§ 4-8 基本最优估计方法的比较及其关系	77
一、五种基本最优估计方法的比较	77
二、五种最优估计方法的关系	79
习题	80

第五章 状态估计和卡尔曼滤波

§ 5-1 概述	81
§ 5-2 离散线性系统最优状态估计的提法	82
§ 5-3 正交投影	83
一、正交投影的定义	83
二、正交投影的基本性质	83
三、正交投影基本性质的几何意义	86
四、高斯分布情况下的条件期望	87
§ 5-4 离散型卡尔曼滤波问题的提法	87
§ 5-5 初等法推导卡尔曼滤波方程	89
§ 5-6 正交投影法推导卡尔曼滤波方程	92
§ 5-7 用矩阵求逆公式推导第二组卡尔曼滤波方程	96
§ 5-8 卡尔曼滤波的具体计算	98
一、滤波值的计算	98
二、滤波增益矩阵的计算	99
§ 5-9 卡尔曼滤波的性质和特点	100
一、卡尔曼滤波的特点	100
二、卡尔曼滤波的主要性质	101
§ 5-10 卡尔曼滤波的推广	102
一、系统有控制项、量测有偏差项，噪声均值不为 0，两个噪声 δ 相关的情况	103
二、有色噪声的情况	107
§ 5-11 卡尔曼滤波的稳定性	118
§ 5-12 滤波误差分析	120
一、理想情况下卡尔曼滤波的误差方差阵	120
二、实际情况下卡尔曼滤波的误差方差阵	124
§ 5-13 滤波的发散现象及其克服	127

一、卡尔曼滤波的发散现象	127
二、引起滤波发散的原因	129
三、克服滤波发散的方法	129
§ 5-14 卡尔曼滤波计算举例	138
习题	148

第六章 随机最优控制

§ 6-1 随机最优控制问题	151
一、一般提法	151
二、容许控制策略	151
三、随机控制中几个重要概念以及它们之间的相互关系	153
§ 6-2 二次型性能指标下线性高斯系统(LQG)的最优控制问题	155
一、系统模型	155
二、性能指标	155
三、控制的物理可实现性	156
四、随机最优控制问题的提法	157
§ 6-3 确定性最优控制问题的提法	157
§ 6-4 动态规划基本原理	158
一、多级决策过程	159
二、化系统控制过程为多级决策过程	159
三、最优性原理	160
§ 6-5 用动态规划求确定性问题的解	165
一、确定最后一级的最优控制 $u^*(N-1)$	165
二、确定最后第二级的最优控制 $u^*(N-2)$	166
三、根据归纳法考虑一般情况	167
§ 6-6 离散 LQG 问题的解和严格分离定理	171
一、求解的基本思路	171
二、倒数第一级的求解	171
三、倒数第二级的求解	175
四、倒数第 j 级的求解	176
五、严格分离定理	177
§ 6-7 利用分离原理时随机最优控制系统的综合步骤	178
参考文献	182

第一章 绪论

§ 1-1 建模和最优控制问题的提法

实际上人们做任何一件事,不管是分析问题、进行综合、作出决策,都要用一种标准衡量一下,是否达到了最优。

最优化是一种数学方法,是用计算机寻优的方法。最优化的第一步是要叙述问题,建立问题的数学模型,其中包括目标函数和约束条件,以使用函数、方程式和不等式来描述所求的最优化问题。然而在多数情况下,对象的数学模型是不知道的,或者在正常运行期间模型的参数可能发生变化。因此必须通过系统辨识或者参数估计来确立对象的数学模型。

许多实际工业过程的机理是非常复杂的,建立它们的数学模型不是一件容易的事。但是,如果只关心过程的外特性,则可以把过程看成“黑箱”,如图 1.1 所示。根据“黑箱”所表现出来的输入输出信息,建立与“黑箱”特性等价的过程外特性模型。这种处理问题的观点正是系统辨识,或者参数估计和状态估计的基本出发点,其中输入输出数据是参数估计和状态估计的物质基础。

通过系统辨识或参数估计,可以确立对象的数学模型,一般可用动态方程:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t) \quad (1.1)$$

来表示,可以通过一定的控制作用 $u(t)$,使对象从某一初始状态 $X(t_0)$ 达到另一状态 $X(t)$,并满足一定的性能指标。性能指标通常采用标量目标函数 $J(u(\cdot))$ 来表示:

$$J(u(\cdot)) = \theta[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[X(t), u(t), t] dt \quad (1.2)$$

其中 $\theta[X(t_f), t_f]$ 是终端型性能指标,例如拦截火箭,对终端要求很严很准。 $\int_{t_0}^{t_f} L[X(t), u(t), t] dt$ 是积分型性能指标,可以表示误差最小、控制功率最小、燃料消耗最小等等。 $u(\cdot)$ 是指某一发展过程的控制规律,不是指某一具体时刻,因此括号内不用 t 。控制作用 $u(\cdot)$ 可以是外加电压、外加燃料等等,因此控制作用都是有限的,不会是无限大;存在一定的约束条件。如果没有约束,问题的最优解就是求目标函数的极值;实际中都存在约束,问题的最优解就是求目标函数的条件极值。也就是在一定条件下,达到某些指标的最优。最优控制是最优化方法在自动控制理论中的应用,是现代控制理论的核心,在一定意义下,所谓现代控制理论就是最优控制理论。

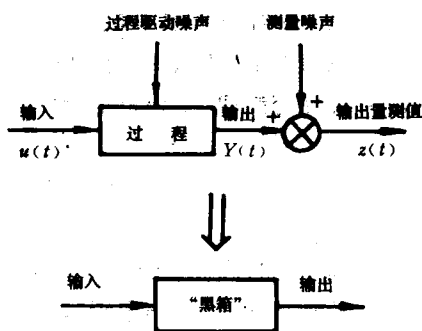


图 1.1 过程的“黑箱”模型

§ 1-2 最优控制律

最优控制就是在一定条件下,寻找一个控制规律 $u^*(t), t \in [0, \infty)$, 使目标函数 $J[u(\cdot)]$ 最小, 控制律 $u^*(t)$ 就叫做最优控制律。

如果对象的数学模型:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)u(t) \quad (1.3)$$

是线性确定性模型, 那么不管采用古典变分法、还是庞特里亚金的极大值原理、或者别尔曼的动态规划, 都可以得到对象的最优控制律为系统的全状态线性负反馈。即

$$u^*(t) = -KX(t) \quad (1.4)$$

如果知道系统的状态 $X(t)$, 那么只要求解 Riccati 方程, 求出反馈增益阵 K , 就可实现最优控制, 如图 1.2 所示。

真正要实现计算机最优控制, 还必须把连续系统离散化。离散系统与连续系统相对应, 也有离散系统的古典变分法、极大值原理和动态规划, 也可得到离散系统的最优控制律, 结果也是全状态线性负反馈。

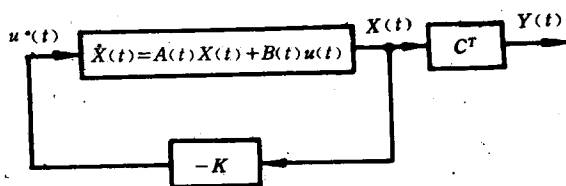


图 1.2 线性连续系统最优控制

§ 1-3 随机最优控制和 LQG 问题

上述确定性模型是一种理想化的情况, 它忽略了实际受控系统中通常不可避免的动力学特性的不确定性, 以及作用于系统的随机干扰, 系统的状态向量和输出(量测)向量都具有随机性, 系统的状态方程:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) = & A(t)X(t) \\ & + B(t)u(t) + F(t)W(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

系统的观测方程

$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)u(t) + V(t) \quad (1.6)$$

其中 $W(t)$ 为动态噪声、 $V(t)$ 为量测噪声。

对随机线性系统而言, 为了获得全状态负反馈, 实现最优控制, 必须尽量排除干扰, 从量测值估计出系统的全状态, 因此估计问题是随机控制中最突出的问题。

系统是线性的 (Linear), 性能指标是二次型的 (Quadratic form), 随机矢量或过程是高斯分布的 (Gauss), 在理论上最简单, 在实际上最常用, 称为 LQG 问题, 它是随机控制中最实用最有成果的部分。对于 LQG 问题, 可以证明分离定理成立。根据分离定理: LQG 的最优控制

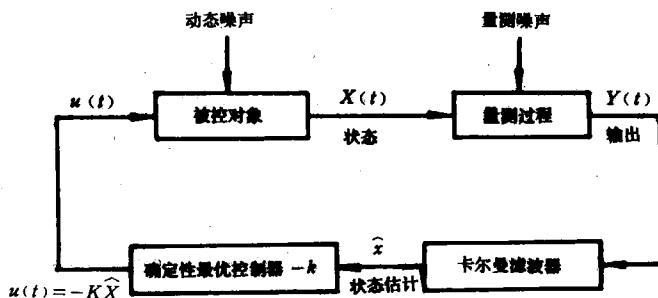


图 1.3 LQG 问题的分离原理

由两部分组成,一部分是只考虑确定性系统时的最优反馈增益阵 K ,另一部分是通过一个卡尔曼滤波器(Kalman filter)得到状态估计,以代替真实的状态反馈,如图 1.3 所示。

§ 1-4 最优估计和滤波理论

最优估计包括参数估计和状态估计。参数估计或系统辨识,它是根据观测量估计实际系统的数学模型,随机系统数学模型的建立与确定性系统没有什么不同,但问题是如何描述随机因素,如何在系统数学模型中合理地将它们表达出来。当然在这里由于微分方程问题与随机过程问题的结合,使它与描述确定性系统的微分方程问题就有概念上的不同,处理起来也将更加困难。至于状态估计它是根据观测量估计实际系统的状态,这里是从统计的观点出发,来考虑如何从受到干扰的信号中,尽量排除干扰,把有用信号取出来,所以状态估计又叫做“滤波”,这里已不是通常从频带的观点来考虑的滤波。由维纳(Wiener)和柯尔莫哥洛夫(Колмогоров)发展奠定的滤波理论,就是随机控制理论发展过程中的一块柱石,他们设计滤波器的传递函数 $K(s)$,使得 $E[Y(t) - \hat{Y}(t)]^2$ 最小,如图 1.4 所示。

$$\therefore \hat{Y}(s) = Z(s) \cdot K(s) \quad (1.7)$$

$$\hat{Y}(t) = L^{-1}[Z(s) \cdot K(s)]$$

$$= \int_{-\infty}^t Z(\tau)K(t - \tau)d\tau \quad (1.8)$$

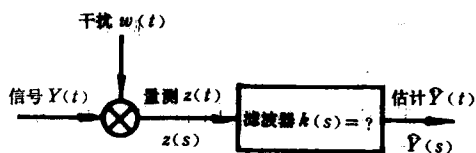


图 1-4 维纳滤波

求解估计值 $\hat{Y}(t)$,归结为解 Wiener-Hopf 积分方程,这不仅要求把过去所有的量测值全部存起来,而且积分方程的计算时间也赶不上实时控制的要求,实际应用不广,这个理论本身主要是针对平稳随机过程的。

50 年代末、60 年代初出现的人造卫星、宇宙飞船等,是不平稳的随机过程,为解决这些问题,提出的卡尔曼(Kalman)滤波理论,应用计算机递推计算,不需要把过去所有的量测值全部存起来,从实用上卡尔曼滤波完全取代了维纳滤波,普遍认为卡尔曼滤波理论,奠定了现代控制理论的一个重要基础,大大推动了现代控制理论的发展与应用。

第二章 工程实际中随机过程的描述

§ 2-1 从概率分布特性描述随机过程——高斯过程

工程实际中常见的随机变量的概率分布有等概率分布、正态分布、指数分布、二项式分布等等。而在动态系统中出现的随机现象,本质上是由大量的、相互间谁也不比谁占绝对优势的因素共同作用引起的,其中没有一个主导因素,因此根据中心极限定理,这些因素共同作用产生的随机过程的概率分布服从正态规律。正态分布又称高斯分布,因此具有正态分布的随机过程称为高斯过程。

随机过程具有正态分布时,可以简化分析,导出实际计算中一些有效的估计方法,所以高斯随机过程在估计理论和随机控制中具有重要的作用。

一、定义

如果随机过程的所有联合概率密度函数是高斯的,那么该随机过程称为高斯随机过程。

即 n 维矢量随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 在 $t \in T$ 中的任意 m 个时间 t_1, t_2, \dots, t_m 上 (m 是任意整数) 的 m 个 n 维随机矢量 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$ 的联合概率密度函数:

$$p_{x^1, x^2, \dots, x^n}(x^1, t_1; x^2, t_2; \dots; x^m, t_m) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{nm}{2}} |P^*|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(X^* - \mu^*)^T (P^*)^{-1} (X^* - \mu^*)\right] \quad (2.1)$$

$$\text{其中 } X^*(t) = [X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)]^T = [X^1, X^2, \dots, X^m]^T \\ \mu^*(t) = E[X^*(t)] = [\mu(t_1), \mu(t_2), \dots, \mu(t_m)]^T = [\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^m]^T$$

自协方差矩阵函数

$$P^* = \text{Var}X^* = E[(X^* - \mu^*)(X^* - \mu^*)^T]$$

$|P^*|$ 为 P^* 的行列式。

(2.1) 式成立的条件,是自协方差阵 P^* 正定、 P^{*-1} 存在。为了使定义推广到 P^* 为非负定对称阵的情况,避免因 P^* 奇异碰到的困难,通常利用联合特征函数来定义多维高斯过程。

即如果 n 维矢量随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在 $t \in T$ 中的任意 m 个时间点 t_1, t_2, \dots, t_m 上 (m 是任意整数) 的 m 个 n 维随机矢量 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$ 的联合特征函数为

$$\phi_{x^1, x^2, \dots, x^n}(s^1, t_1; s^2, t_2; \dots; s^m, t_m) = \exp\left[j \sum_{K=1}^m (\mu^K)^T s^K - \frac{1}{2} \sum_{K=1}^m \sum_{j=1}^m (s^K)^T P_{xx}(K, j) s^j\right] \quad (2.2)$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为高斯随机过程。

(2.2) 式中 s^K 是 n 维非随机矢量 ($K=1, 2, \dots, m$)

$$P_{xx}(K, j) = \text{cov}\{X(K), X(j)\}, \quad K, j = 1, 2, \dots, m$$

二、高斯过程的一些重要性质

1. 高斯随机过程及其统计特性完全由其均值函数 $\mu_x(t)$ 和在 $t, \tau \in T$ 中的所有自协方差矩阵函数 $P_{xx}(t, \tau)$ 确定。因此只要高斯随机过程是宽平稳的, 那么它也一定是严平稳的。

2. 高斯随机过程的高斯性经过任何线性变换后保持不变。例如

(1) 如果高斯过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在 T 上均方可微, 则 $\{X(t), t \in T\}$ 也是高斯过程。

(2) 如果高斯过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在 T 上的均方积分 $Y(t) = \int_a^b X(\tau) d\tau$ 存在, 则 $\{Y(t), t \in T\}$ 也是高斯过程。

3. 对平稳高斯均方可微过程 $\{X(t), t \in T\}$, $X(t)$ 与 $\dot{X}(t)$ 独立。

4. 均值函数 $\mu_x(t)$ 是随机过程 $X(t)$ 多次实现的平均值, 它随时间发生变化, 方差 $P_x(t)$ 则表示随机过程 $X(t)$ 在多次实现中相对均值函数的离散程度。图 2.1 画出了一维随机过程的均值与方差。

随机变量方差的量纲是该物理量量纲的平方, 为了便于描述随机变量对均值的离散程度通常采用均方差

$$\sigma_x = \sqrt{P_x(t)}$$

在一维正态分布的情况下, 概率分布函数

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right] \quad (2.3)$$

均值 μ 也是 $X(t)$ 在多次实现中的中心值, 均方差 σ_x 表示随机变量 X 相对其中心值 μ 的离散程度。在给定 X 的取值范围 $[a, b]$ 时, 通过 (2.3) 式可以计算其概率

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p_x(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (2.4)$$

如果取 $b - \mu = \mu - a = \sigma, 2\sigma, 3\sigma, 4\sigma$, 则得到的相应概率值为 0.6828, 0.9544, 0.9973, 0.9999。通常采用 3σ 来表示正态分布随机变量可能的取值范围, 这时概率已接近于 1。图 2.2 画出了一维正态分布的示意图。

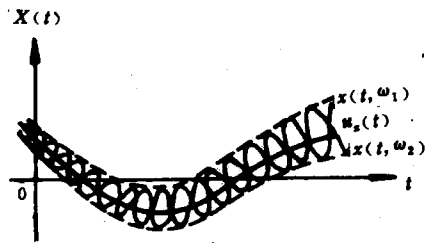


图 2.1 一维随机过程的均值与方差

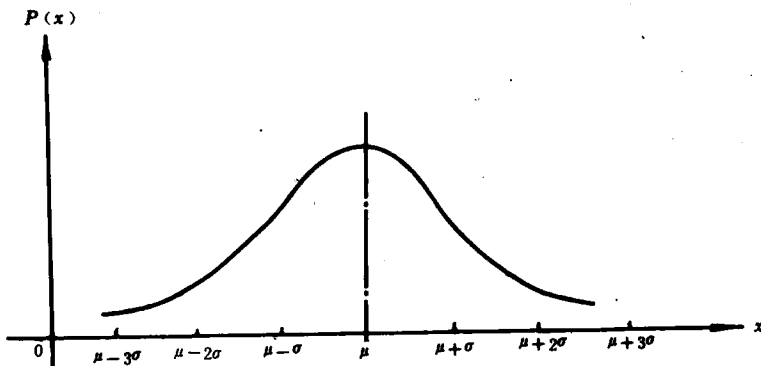


图 2.2 一维正态分布

§ 2-2 从时间转移特性描述随机过程——马尔柯夫过程

动态系统中存在的随机现象或随机过程,不仅比较普遍的存在着高斯性,其概率分布是正态的;而且更广泛的存在着马氏性,其“将来”时刻的统计特性,只取决于“现在”时刻的状态,而与“过去”时刻的状态无关。也可以这样说:过程的“将来”只是通过“现在”与“过去”发生联系,一旦“现在”已经确定,“将来”与“过去”无关。也就是“过去”对“将来”的影响,完全凝结在“现在”之中。马氏性又称为过程的无后效性,具有马氏性的随机过程称为马尔柯夫过程,一般采用条件概率分布或条件概率密度函数来进行定义。

一、定义

n 维矢量随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在 $t \in T$ 中任意 m 个时间点 $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ 上,有条件概率分布函数

$$F(x^m, t_m | x^{m-1}, t_{m-1}; x^{m-2}, t_{m-2}; \dots; x^1, t_1) = F(x^m, t_m | x^{m-1}, t_{m-1}) \quad (2.5)$$

或者有条件概率密度函数

$$p(x^m, t_m | x^{m-1}, t_{m-1}; x^{m-2}, t_{m-2}; \dots; x^1, t_1) = p(x^m, t_m | x^{m-1}, t_{m-1}) \quad (2.6)$$

并对所有 m 个 n 维随机矢量 $X(t_1)$ 、 $X(t_2)$ 、 \dots 、 $X(t_m)$ 都成立,则称此矢量随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为马尔柯夫过程。如图 2.3 所示。

二、联合概率密度函数与转移率密度函数

根据概率运算的乘法公式:

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(B/A)P(A) = P(A/B)P(B) \\ P(A_1 A_2 \dots A_m) &= P(A_m / A_{m-1} \dots A_1) P(A_{m-1} \dots A_1) \\ &= P(A_m / A_{m-1} \dots A_1) P(A_{m-1} / A_{m-2} \dots A_1) \dots P(A_2 / A_1) P(A_1) \end{aligned}$$

同理对概率密度函数而言,有联合概率密度函数 $p(x, y) = p(x/y)p(y) = p(y/x)p(x)$

$$\begin{aligned} & p(x^m, t_m; x^{m-1}, t_{m-1}; \dots; x^1, t_1) \\ &= p(x^m, t_m / x^{m-1}, t_{m-1}; \dots; x^1, t_1) p(x^{m-1}, t_{m-1} / x^{m-2}, t_{m-2}; \dots; x^1, t_1) \dots p(x^2, t_2 / x^1, t_1) P(x^1, t_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

如果过程具有马氏性,有

$$p(x^m, t_m / x^{m-1}, t_{m-1}; \dots; x^1, t_1) = p(x^m, t_m / x^{m-1}, t_{m-1})$$

联合概率密度函数

$$\begin{aligned} & p(x^m, t_m; x^{m-1}, t_{m-1}; \dots; x^1, t_1) \\ &= p(x^m, t_m / x^{m-1}, t_{m-1}) p(x^{m-1}, t_{m-1} / x^{m-2}, t_{m-2}) \dots p(x^2, t_2 / x^1, t_1) p(x^1, t_1) \\ &= p(x^1, t_1) \prod_{i=2}^m p(x^i, t_i / x^{i-1}, t_{i-1}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

条件概率密度函数 $p(x^i, t_i / x^{i-1}, t_{i-1})$ (或表示成 $p[x(t) / x(\tau)]$) 常称为转移概率密度函数,因此对马尔柯夫过程来说,如果已知初始概率密度函数 $p(x^1, t_1)$ 和所有的转移概率密度

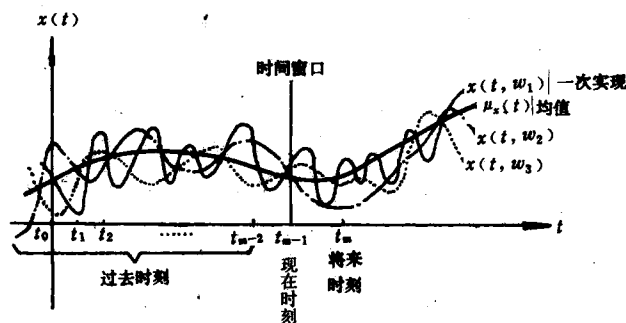


图 2.3 马尔柯夫过程的时序关系

函数 $p(x^k, t_k/x^{k-1}, t_{k-1})$, 就完全决定了过程的联合概率密度函数, 也就完全知道了马尔柯夫过程的统计特性, 或者说完全确定了马尔柯夫过程。所以马尔柯夫过程最重要、最基本的特征, 是其联合概率密度函数可以表示成初始概率密度函数 $p(x^1, t_1)$ 和转移概率密度函数的乘积。

三、切普曼(Chapman)—柯尔莫哥洛夫方程

由边际概率密度函数公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x^k, t_k; x^{k-1}, t_{k-1}; x^{k-2}, t_{k-2}) dx^{k-1} = p(x^k, t_k; x^{k-2}, t_{k-2}) \\ = p(x^k, t_k/x^{k-2}, t_{k-2}) p(x^{k-2}, t_{k-2}) \quad (2.9)$$

如果过程具有马氏性, 那么根据公式(2.8), 上式左端的被积函数即联合概率密度函数, 可以表示成转移概率密度函数的乘积, 即:

$$p(x^k, t_k; x^{k-1}, t_{k-1}; x^{k-2}, t_{k-2}) = p(x^k, t_k/x^{k-1}, t_{k-1}) p(x^{k-1}, t_{k-1}/x^{k-2}, t_{k-2}) p(x^{k-2}, t_{k-2})$$

代入(2.9)式中, 两边消去初始概率密度函数 $p(x^{k-2}, t_{k-2})$, 即得:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x^k, t_k/x^{k-1}, t_{k-1}) p(x^{k-1}, t_{k-1}/x^{k-2}, t_{k-2}) dx^{k-1} = p(x^k, t_k/x^{k-2}, t_{k-2}) \quad (2.10)$$

式(2.10)称为 Chapman-Колмогоров 方程, 它说明如果过程具有马氏性, 那么从 t_{k-2} 时刻到 t_k 时刻的转移概率密度函数, 等于从 t_{k-2} 时刻到 t_{k-1} 时刻、和再从 t_{k-1} 时刻到 t_k 时刻的两个转移概率密度函数乘积的边际积分。也就是马尔柯夫过程的二步转移概率密度函数, 可以通过两个一步转移概率密度函数来求出。这是马尔柯夫过程或者说具有马氏性的随机过程又一重要特性。

四、高阶马尔柯夫过程

若对马尔柯夫过程定义中的“现在时刻”加以扩展, 比如包含 t_{m-1}, t_{m-2} 两个时刻, 那么构成所谓二阶马尔柯夫过程, 这时有条件概率分布函数:

$$F(x^m, t_m | x^{m-1}, t_{m-1}; x^{m-2}, t_{m-2}; \dots; x^1, t_1) = F(x^m, t_m | x^{m-1}, t_{m-1}; x^{m-2}, t_{m-2}) \quad (2.11)$$

条件概率密度函数:

$$p(x^m, t_m | x^{m-1}, t_{m-1}; x^{m-2}, t_{m-2}; \dots; x^1, t_1) = p(x^m, t_m | x^{m-1}, t_{m-1}; x^{m-2}, t_{m-2}) \quad (2.12)$$

如此类推, 可以定义 K 阶马尔柯夫过程。 $K \geq 2$ 的马尔柯夫过程, 都叫做高阶马尔柯夫过程。对于标量或矢量随机过程而言, 通过扩充状态法, 可以把二阶或 K 阶马尔柯夫过程化为“简单”的马尔柯夫过程。这时把对“现在时刻”的扩展, 化为每个时刻状态的扩展, 也就是用空间的扩展来代替时间的扩展。

五、马尔柯夫过程的两个重要性质

1. 若 $\{X(t), t \in T\}$ 是马尔柯夫过程, T_1 是 T 的子集, 则 $\{X(t), t \in T_1\}$ 也是马尔柯夫过程。
2. 一个马尔柯夫过程, 同时也是一个逆时间马尔柯夫过程。即若在 T 中,

$$t_m < t_{m+1} < \dots < t_{m+k}$$

则有

$$p(x^m, t_m | x^{m+1}, t_{m+1}; x^{m+2}, t_{m+2}; \dots; x^{m+k}, t_{m+k}) = p(x^m, t_m | x^{m+1}, t_{m+1})$$

证: 根据条件概率密度的公式, 有

$$p(x^m, t_m | x^{m+1}, t_{m+1}; x^{m+2}, t_{m+2}; \dots; x^{m+k}, t_{m+k}) \\ = \frac{p(x^m, t_m; x^{m+1}, t_{m+1}; x^{m+2}, t_{m+2}; \dots; x^{m+k}, t_{m+k})}{p(x^{m+1}, t_{m+1}; x^{m+2}, t_{m+2}; \dots; x^{m+k}, t_{m+k})}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p(x^{m+k}, t_{m+k} | x^{m+k-1}, t_{m+k-1}; \dots; x^m, t_m) p(x^{m+k-1}, t_{m+k-1} | x^{m+k-2}, t_{m+k-2}; \dots; x^m, t_m)}{p(x^{m+k}, t_{m+k} | x^{m+k-1}, t_{m+k-1}; \dots; x^{m+1}, t_{m+1}) p(x^{m+k-1}, t_{m+k-1} | x^{m+k-2}, t_{m+k-2}; \dots; x^{m+1}, t_{m+1})} \\
&\quad \dots p(x^{m+1}, t_{m+1} | x^m, t_m) p(x^m, t_m) \\
&= \frac{\text{马氏性 } p(x^{m+k}, t_{m+k} | x^{m+k-1}, t_{m+k-1}) p(x^{m+k-1}, t_{m+k-1} | x^{m+k-2}, t_{m+k-2})}{p(x^{m+k}, t_{m+k} | x^{m+k-1}, t_{m+k-1}) p(x^{m+k-1}, t_{m+k-1} | x^{m+k-2}, t_{m+k-2})} \\
&\quad \dots p(x^{m+1}, t_{m+1} | x^m, t_m) p(x^m, t_m) \\
&= \frac{p(x^{m+1}, t_{m+1} / x^m, t_m) p(x^m, t_m)}{p(x^{m+1}, t_{m+1})} \\
&= \frac{p(x^{m+1}, t_{m+1}; x^m, t_m)}{p(x^{m+1}, t_{m+1})} \\
&= p(x^m, t_m / x^{m+1}, t_{m+1}) \tag{2.13}
\end{aligned}$$

上述证明过程说明:对一个过程而言,有时间先后之别。对联合概率密度函数和条件概率密度函数而言,其中条件是可以更换的,而且没有先后之别。

六、高斯—马尔柯夫过程

一个实际的随机过程不仅其概率分布具有高斯性,而且其概率和概率分布在时间上的转移具有马氏性;因此是一种高斯—马尔柯夫过程。

§ 2-3 从功率特性描述随机过程——功率有限过程(二阶过程)

一、定义

随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 如果对一切 $t \in T$, 总有 $E[X^2(t)] < \infty$, 即均方值存在, 则称此过程为二阶过程。

从定义可知, 二阶过程实质上是一阶矩、二阶矩都存在的过程。由于正态分布过程的各阶矩都存在, 所以高斯过程属于二阶矩过程。由于 $X^2(t)$ 反映功率, 所以二阶过程实质上是功率有限过程。工程上碰到的过程都是功率有限过程, 和高斯性、马氏性一样, 功率有限性也是实际随机过程十分重要的性质。

对具有功率有限性的随机过程, 可以利用建立在均方极限基础上的均方微积分来进行描述, 其理论和应用近似于通常的微积分, 所以分析十分简便。下面我们从均方微积分的概念来讨论二阶过程的性质。

二、性质

1. 数字特征

对二阶过程 $\{X(t), t \in T\}$, 应用舒瓦茨(Schwarz)不等式, 可以证明其均值函数 $E[X(t)] = \mu_x(t)$, 自协方差函数 $P_{xx}(t, \tau) = E\{[X(t) - \mu_x(t)][X(\tau) - \mu_x(\tau)]\}$ 总是存在的, 所以二阶矩过程的二阶统计特性可由均值函数和协方差函数来表达, 例如自相关函数 $R_{xx}(t, \tau) = P_{xx}(t, \tau) + \mu_x(t)\mu_x^T(\tau)$ 。

2. 均方连续性

二阶过程 $\{X(t), t \in T\}$ 如果对一切 $t \in T$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} E\{[X(t+h) - X(t)]^2\} = 0 \tag{2.14}$$

则称此二阶过程在 $t \in T$ 内是处处均方连续的。