普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学——随机数学

(第二版)

吉林大学数学学院
李忠范　孙　毅　高文森　主编

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学——随机数学

(第二版)

吉林大学数学学院

李忠范　孙　毅　高文森　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材《大学数学》之一。《大学数学》系列教材吸收了国内外同类教材的精华，借鉴了近几年出版的一批"面向21世纪课程教材"的成功经验，体现了时代的特点，着重加强基础、强化应用、整体优化，注重后效，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一。在体系与内容的编排上，本书认真考虑不同专业、不同学时的授课对象的需求，对有关内容和习题进行了较好处理。

本书介绍随机数学的基础知识，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及样本函数的分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析与正交试验设计。

本书可供高等学校非数学类理工科各专业学生选用，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学. 随机数学 / 李忠范，孙毅，高文森主编.
—2版.—北京：高等教育出版社，2009.7
ISBN 978-7-04-027253-6

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①李…②孙…③高… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材③随机过程-高等学校-教材 Ⅳ. O13 O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第077596号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宏信印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2004年7月第1版
开　　本	787×960　1/16		2009年7月第2版
印　　张	21	印　　次	2009年7月第1次印刷
字　　数	390 000	定　　价	22.80元

物料号　27253-00

《大学数学》系列教材编委会

第二版前言

《大学数学》系列教材面世已经5年了,在此期间,有不少高校同行在使用本系列教材的过程中提出了许多宝贵意见,结合过去5年我们使用本系列教材的教学实践经验和近几年大学数学课程改革的一些新动态,编委会决定对本系列教材进行修订、完善。新版列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本次修订的指导思想是: 1. 保持原书风格与特色,力求叙述简洁明了,把基础知识尽可能交待得透彻些; 2. 在加强理论知识系统性的同时,尽可能突出数学思想方法的讲授,删繁就简; 3. 突出数学应用的广泛性,提高数学技术应用的深度和技巧。

本书第二版突出了以随机变量的分布为核心的编写思路,删去了第一版教材中随机过程部分(第十一章至十三章),重新编写了随机变量的分布及数字特征部分(第二章至第五章),其余部分做了较大幅度的修改和完善,使得内容安排和例题搭配更加合理,文字叙述及理论推导更为准确。

参加本书第二版编写的有李忠范(第二、五、七、八章)、孙毅(第四、六章)、高文森(第一、三、九、十章),由李忠范统稿并最后定稿。

在本书的修订过程中,得到了吉林大学数学学院和高等教育出版社数学分社的大力支持和帮助,吴晓俐女士承担了本系列教材修订的编务工作,在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,书中的错误和不当之处,敬请读者批评指正。

《大学数学》系列教材编委会

2009年1月

第一版前言

《大学数学》系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材。本系列教材共四册:《微积分》(上、下)、《线性代数》和《随机数学》。

本系列教材的编写体现了时代的特点。本着加强基础、强化应用、整体优化、注重后效的原则,力争做到科学性、系统性和可行性的统一,使传授数学知识和培养数学素养得到了较好的结合。

本系列教材是在吸取国内外同类教材的精华,借鉴近几年我国出版的一批“面向21世纪课程教材”成功经验,结合在吉林大学公共数学教学、教研的具体实践,针对非数学类理工科大学生的特点编写的。

本系列教材内容充实,可作为高等学校非数学类理工科各专业的教材或教学参考书。在教材体系与内容的编排上,认真考虑了不同专业、不同学时的授课对象的需求。对数学要求较高的物理、计算机、电子等专业,原则上可讲授本教材的全部内容;其他专业可以在不带“* ”号的内容中,根据实际需要选择适当的章节讲授。每章后面所配备的习题分成两类,其中(A)是体现教学基本要求的习题;(B)是对基本内容提升、扩展以及综合运用有关知识的习题。与教材中“* ”号内容相应的习题用“* ”号做了标注。书后给出了习题参考答案或提示,供读者参考。

本册《随机数学》的一、六至十三章由高文森编写,二至五章由潘伟编写。

在《大学数学》系列教材的编写过程中,得到了吉林大学教务处的大力支持,数学学院尹景学教授为本套教材初稿的版面设计、软件培训提供了悉心的技术指导;公共数学教学与研究中心副主任吴晓俐女士承担了本系列教材初稿的编务工作,研究生王军林、孙鹏、任长宇、李明、柯长海、吴刚、姜政毅及湖北大学郑巧仙老师完成了本系列教材初稿的排版制图工作,在此一并致谢。作者要特别感谢高等教育出版社高等理工分社的领导和编辑们,他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持。

由于我们水平所限,书中的错误和不妥之处,恳请广大读者批评指正,以期不断完善。

《大学数学》系列教材编委会

2004 年 7 月

目　录

第一章 随机事件及其概率

随机数学是研究随机现象统计规律性的数学学科,它的理论和方法在自然科学、社会科学、工程技术、经济、管理等诸多领域中得到了广泛的应用.

概率论是随机数学的理论基础,它给出描述随机现象规律性的数学模型. 随机事件及随机事件的概率是概率论中最基本的概念. 早在17世纪,人们就开始用古典概型来研究人口统计、天文、产品检查等各个方面的问题,促进了概率论的发展. 但直到20世纪30年代概率论才有了建立在公理化体系上的严密的理论基础.

本章介绍随机试验、样本空间、随机事件、随机事件的频率和概率、条件概率以及随机事件的独立性等基本概念,介绍古典概型和几何概型,介绍加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯(Bayes)公式以及二项概率公式等计算概率的基本公式.

§1 随机试验与随机事件

1.1 随机试验

在自然界和人类社会中出现的各种现象大致可以分为两类:必然现象和随机现象.

在一定条件下必然出现的现象叫做**必然现象**. 例如,每天早晨太阳从东方升起,人从地面向上抛起的石块经过一段时间后落到地面,同性电荷互相排斥等,都是必然现象.

在相同的条件下可能出现也可能不出现的现象叫做**随机现象**. 例如,抛掷一枚骰子出现的点数,抽样检查某产品的检验结果,某城市某日的交通事故发生的次数等,都是随机现象. 许多随机现象在相同的条件下可以重复出现. 如果我们对这种随机现象进行大量重复地观测,则在每次观测之前不能预先确定其结果,这就是这种现象的随机性;但在进行了大量重复地观测之后,其结果往往会表现出某种规律性,这就是统计规律性. 例如,抽样检查一大批电子元件,每次抽查的一件可能是合格品,也可能是次品,检验之前无法预先确定是哪一个结果,这就是随机性;但在多次抽查之后,次品出现的比率(即在抽查中出现的次品件数与

抽查总件数的比值）将在整批电子元件的次品率附近摆动，这就是统计规律性.

为了研究和揭示随机现象的统计规律性，我们需要对随机现象进行大量重复地观察、测量或试验. 为了方便，将它们统称为试验. 如果试验具有以下特点：

（1）可重复性 试验可以在相同条件下重复进行多次，甚至进行无限多次；

（2）可观测性 每次试验的所有可能结果都是明确的、可以观测的，并且试验的可能结果有两个或两个以上；

（3）随机性 每次试验出现的结果是不确定的，在试验之前无法预先确定究竟会出现哪一个结果，

则称之为**随机试验**，简称为**试验**.

我们用字母 E 表示一个随机试验. 随机试验 E 的基本结果称为**样本点**，用 ω 表示. 随机试验 E 的所有基本结果的集合称为**样本空间**，用 $\Omega=\{\omega\}$ 表示.

例 1.1 抛掷一枚硬币，观察正面和反面出现的情况（将这两个基本结果依次记为 ω_1 和 ω_2），则该试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}.$$

例 1.2 抛掷一枚骰子，观察出现的点数，将基本结果"出现 i 点"记为 ω_i（$i=1,2,3,4,5,6$），则该试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}.$$

例 1.3 在一只罐子中装有大小和形状完全一样的 2 个白球和 3 个黑球，依次在 2 个白球上标以数字 1 和 2，在 3 个黑球上标以数字 3，4 和 5，从罐子中任取一个球，观察球上的数字，用 ω_i 表示"取出的是标有数字 i 的球"（$i=1,2,3,4,5$），则试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}.$$

例 1.4 在一个箱子中装有 10 个同型号的某种零件，其中有 3 个次品和 7 个合格品，从该箱子中任取 3 个零件，观察其中次品的个数. 由于次品个数可能是 0，1，2，3，因此试验的样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,3\}.$$

例 1.5 记录某机场在一天内收到咨询电话的次数，则试验的样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}.$$

例 1.6 从某一大批同型号电子元件中任取一个元件测试其使用寿命（单位：h），则试验的样本空间为

$$\Omega=[0,+\infty).$$

为了研究随机现象的统计规律性，需要合理地安排随机试验，分析试验的样本空间. 在许多实际问题中，人们不仅关心试验的基本结果，还关心某些特定的结果在重复试验中是否会出现，出现的比率（即该结果出现的次数与试验总次数的比值）有多大. 例如，在例 1.6 中，如果规定该型号电子元件优质品的标准是

使用寿命超过1000h,则“任取1个元件是优质品”这一结果可以用样本空间$\Omega = [0, +\infty)$的一个子集$A = (1000, +\infty)$来表示. 这一结果在重复试验中有时出现,有时不出现. 如果这一结果在重复试验中出现的比率较高,则表明这批元件的优质品率较高.

1.2 随机事件及其运算

1. 随机事件的概念

我们把随机试验E的样本空间$\Omega = \{\omega\}$的子集(进一步还要要求这些子集满足一些特定的性质,在此不做讨论)称为随机试验E的**随机事件**,简称为**事件**,用大写字母A,B,C等表示. 设$A \subseteq \Omega$,如果试验结果$\omega \in A$,则称在这次试验中事件A发生;如果$\omega \notin A$,则称事件A不发生.

在上面的例子中,$A = (1000, +\infty) \subseteq \Omega = [0, +\infty)$,$A$是一个随机事件. 如果取出一个元件的使用寿命$\omega = 1500$h,则$\omega \in A$,表明事件$A$发生;如果取出另一个元件的使用寿命$\omega = 920$h,则$\omega \notin A$,表明事件$A$没有发生.

由一个样本点ω组成的事件,称为**基本事件**. 样本空间Ω本身也是Ω的子集,它包含Ω的所有样本点,在每次试验中Ω必然发生,称为**必然事件**. 空集$\varnothing$也是Ω的子集,它不包含任何样本点,在每次试验中都不可能发生,称为**不可能事件**.

例1.7 在例1.3中,子集$A = \{\omega_1,\omega_2\}$表示事件“从罐子中任取一球是白球”,子集$B = \{\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$表示事件“从罐子中任取一球是黑球”. 事件“取出2号球”可表示为$C = \{\omega_2\}$,事件“取出的是白球或黑球”为必然事件,事件“取出的是黄球”为不可能事件.

在一个样本空间中,如果只有有限多个样本点,则称它为**有限样本空间**;如果有无限多个样本点,则称它为**无限样本空间**. 在例1.1 ~ 例1.4中的样本空间都是有限样本空间,在例1.5和例1.6中的样本空间都是无限样本空间.

2. 随机事件的关系

在一个试验E的样本空间Ω中可能有很多随机事件,每一事件具有各自的特性,在一些事件之间可能存在着某种联系. 为了考察一个比较复杂的事件,往往是把它与一些较为简单的事件联系起来,通过对这些简单事件的研究去掌握复杂事件的特性,因此我们需要研究事件的关系及事件的运算. 由于事件是样本空间的子集,因此事件的关系及运算与集合的关系及运算是互相对应的. 这里要注意的是理解事件的关系及运算的概率含义.

在以下的讨论中,假定Ω是试验E的样本空间,所论及的事件都是同一试验E的事件.

(1) 事件的包含 如果当事件A发生时事件B一定发生,则称事件B**包含**事件A,记作$A \subseteq B$.

在例1.7中,有$C \subseteq A$.

设试验E是将一个点随机地投入图1.1 ~ 图1.6中的矩形区域Ω内,事件A表示该点(称为随机点)落在圆形区域A内,事件B表示该点落在圆形区域B内,用Ω表示试验E的样本空间,用Ω的子集A和B分别表示事件A和事件B,则在图1.1中,有$A \subseteq B$.

对于任意事件A,有$\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$.

如果$A \subseteq B, B \subseteq C$,则$A \subseteq C$.

(2) 事件的相等 如果事件A和事件B相互包含,即$A \subseteq B$且$B \subseteq A$,则称事件A与事件B**相等**,记作$A = B$.

事件A与事件B相等,表明A和B是样本空间Ω的同一子集,实际上是同一事件.

(3) 事件的互不相容 如果事件A和事件B在同一次试验中不能同时发生,则称事件A与事件B是**互不相容**的,或称事件A与事件B是**互斥**的.

在例1.7中,事件A与事件B是互不相容的,事件C与事件B也是互不相容的. 这表明,事件B和事件C在同一次试验中是不能同时发生的,但也可能同时都不发生.

在图1.2中,随机点不能同时落在圆形区域A和B内,因此事件A与事件B是互不相容的. A和B作为样本空间Ω的子集,它们的交集是空集$\varnothing$.

(4) 事件的互逆 如果在每一次试验中事件A和事件B都有一个且仅有一个发生,则称事件A与事件B是**互逆**的或**对立**的,称其中的一个事件是另一个事件的**逆事件**,记作$\bar{A} = B$,或$\bar{B} = A$. 显然$\bar{\bar{A}} = A$.

在例1.7中,事件A与事件B是互逆的.

在图1.3中,事件A与事件B(阴影区域)是互逆的. 作为样本空间Ω的子集,$\bar{A} = B$是A在全集Ω中的补集(或称余集).

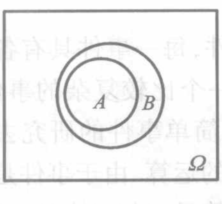

图1.1

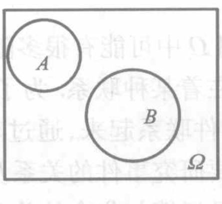

图1.2

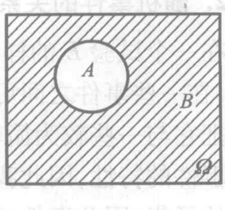

图1.3

3. 随机事件的运算

(1) 事件的并 如果事件A和事件B至少有一个发生,则这样的一个事件

称为事件 A 与事件 B 的**并事件**或**和事件**，记作 $A \cup B$，即并事件

$$A \cup B = \{\text{事件} A \text{发生或事件} B \text{发生}\} = \{\omega \mid \omega \in A \text{或} \omega \in B\}.$$

在例 1.7 中，并事件 $B \cup C = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

在图 1.4 中，并事件 $A \cup B$ 表示随机点落在圆形区域 A 或 B 内，用阴影区域表示. 事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集，并事件 $A \cup B$ 就是子集 A 与 B 的并集.

对于任何事件 A 与 B，有

$$A \cup A = A, A \cup \varnothing = A, A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cup \bar{A} = \Omega, A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B.$$

如果 $A \subseteq B$，则有 $A \cup B = B$.

事件的并可以推广到多个事件的情形：并事件

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\text{事件} A_1, A_2, \cdots, A_n \text{中至少有一个发生}\},$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{事件} A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \text{中至少有一个发生}\}.$$

例如，某人做一项试验，以 A 表示事件"该项试验成功"，以 A_i 表示事件"该项试验做到第 i 次才成功"$(i = 1, 2, \cdots)$，则有

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

(2) 事件的交　如果事件 A 和事件 B 同时发生，则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的**交事件**或**积事件**，记作 $A \cap B$ 或 AB，即交事件

$$A \cap B = \{\text{事件} A \text{发生且事件} B \text{发生}\} = \{\omega \mid \omega \in A \text{且} \omega \in B\}.$$

在例 1.7 中，交事件 $A \cap C = \{\omega_2\}$.

在图 1.5 中，交事件 $A \cap B$ 表示随机点落在圆形区域 A 和 B 的公共区域内，用阴影区域表示. 事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集，交事件 $A \cap B$ 就是子集 A 与 B 的交集.

对于任何事件 A 与 B，有

$$A \cap A = A, A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cap \bar{A} = \varnothing, A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B.$$

如果 $A \subseteq B$，则有 $A \cap B = A$. 如果 A 与 B 互不相容，则有 $A \cap B = \varnothing$.

事件的交可以推广到多个事件的情形：交事件

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\text{事件} A_1, A_2, \cdots, A_n \text{同时发生}\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{事件} A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \text{同时发生}\}.$$

(3) 事件的差　如果事件 A 发生而事件 B 不发生，则这样的一个事件称为

事件 A 与事件 B 的**差事件**,记作 $A-B$,即差事件

$$A-B=\{事件 A 发生但事件 B 不发生\}=\{\omega \mid \omega\in A 且 \omega\notin B\}.$$

在例 1.7 中,差事件 $A-C=\{\omega_1\}$.

在图 1.6 中,差事件 $A-B$ 表示随机点落在圆形区域 A 内且不落在 B 内,用阴影区域表示.

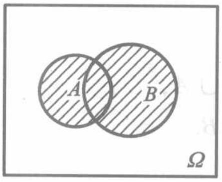

图 1.4

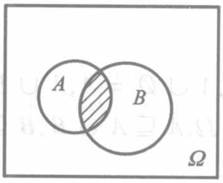

图 1.5

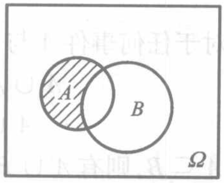

图 1.6

对于任何事件 A 与 B,有

$$A-A=\varnothing, A-\varnothing=A, A-B=A-AB=A\bar{B},$$
$$\Omega-A=\bar{A}, A-\Omega=\varnothing, (A-B)\cup B=A\cup B.$$

类似于集合的运算,事件的运算有如下的运算规律:

1° 交换律　$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA.$

2° 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (AB)C=A(BC).$

3° 分配律　$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC), A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C).$

4° 对偶律　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B},\quad \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}.$

对于多个随机事件,以上的运算规律也是成立的.

例 1.8　某工人加工出 3 个零件,以 A_i 表示事件“加工的第 i 个零件是合格品”($i=1,2,3$),试用 A_1,A_2 和 A_3 这 3 个事件表示下列事件:

(1) 只有第 1 个零件是合格品;

(2) 只有 1 个零件是合格品;

(3) 至少有 1 个零件是合格品;

(4) 最多有 1 个零件是合格品;

(5) 3 个零件全是合格品;

(6) 至少有 1 个零件是不合格品.

解　用 A,B,C,D,F 和 G 分别表示(1)~(6)中的事件.

(1) 事件 A 发生,意味着第 1 个零件是合格品,并且第 2 个和第 3 个零件都是不合格品,即事件 A_1 发生且事件 A_2,A_3 都不发生,因此

$$A=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3.$$

(2) 事件 B 发生,就是在 3 个零件中有 1 个是合格品,并且另外 2 个是不合格品,因此