



21世纪普通高等学校数学系列规划教材

全国数学方法论研究中心重点课题研究成果

数学方法论与数学教学

徐献卿 纪保存 编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

中国数学教育学会 2015 年学术年会论文集

中国数学教育学会 2015 年学术年会论文集

数学方法论与数学教学

张景贵 张景贵 张景贵

张景贵

21 世纪普通高等学校数学系列规划教材

数学方法论与数学教学

徐献卿 纪保存 编著
杨 之 审定

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 提 要

本书是全国数学方法论研究中心重点课题研究成果。编者经过 10 余年的教学实践和研究,在对“数学方法论指导数学教学”系统探索与总结的基础上,撰写了此书。

本书论述了辩证唯物主义的数学观和数学文化教育观,阐述了数学方法论指导数学教学的理论、方法和途径,探索建立了 21 世纪的数学教育教学理论。本书尤其注重理论联系实际,引领读者如何更新观念、拓展知识、提高技能,从而增强数学教育素养。

本书适合作为高等师范院校数学教育专业教材,也可作为数学教师专业教育的教材或数学教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学方法论与数学教学 / 徐献卿, 纪保存编著. —北京:

中国铁道出版社, 2009. 6

(21 世纪普通高等学校数学系列规划教材)

ISBN 978-7-113-10086-5

I. 数... II. ①徐... ②纪... III. 数学方法—方法论—高等学校—教材 IV. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 100687 号

书 名: 数学方法论与数学教学

作 者: 徐献卿 纪保存 编著

策划编辑: 李小军

责任编辑: 李小军 徐盼欣

封面设计: 付 巍

责任印制: 李 佳

编辑部电话: (010)63583215

封面制作: 李 路

出版发行: 中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街 8 号 邮政编码: 100054)

印 刷: 北京市彩桥印刷有限责任公司

开 本: 787mm × 960mm 1/16 印张: 20.75 字数: 469 千

版 次: 2009 年 7 月第 1 版 2009 年 7 月第 1 次印刷

印 数: 4 000 册

书 号: ISBN 978-7-113-10086-5/0·192

定 价: 29.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社计算机图书批销部调换。

序 一

徐献卿、纪保存编著的《数学方法论与数学教学》是一部现代数学教育学方向的教科书。这本著作既有一定的理论性,又有鲜明的实用性。全书以数学知识为载体,解说了数学是什么,阐述了数学的教育功能,探索了数学方法论与数学教学的关系,介绍了数学教学设计的原理与方法,在附录中还对现代信息技术在数学教学中的应用提供了较为翔实的案例与资料。为我国广大的数学教师提供了必需的营养套餐。

数学是一门基础学科。数学教育在各级各类的学校中都占有重要的地位。然而,作为数学教育的课程设置一直是大有争议、值得在实践中认真探索的课题。实践证明,数学教育是以数学为载体的教育,通过必要的数学知识的学习,训练数学思维,发展数学能力,培养数学观念,提高创新意识,并逐步地了解数学文化,使受教育者能够融入现代的科学文化氛围之中,成为一个具有一定数学文化素养的现代社会的公民。这也就是人民大众的数学文化素质教育。这样的数学教育是整个学校素质教育的组成部分,必然对教师提出了更高的要求。要实现这个目标,显然几十年前的《数学教材教法》已经远远落伍了,后来的《数学教育学》也不能完全适应要求。因此,徐献卿、纪保存编著的《数学方法论与数学教学》,是在 21 世纪初为了适应数学教育新发展所作的一次有益的尝试!

20 世纪 80 年代以来,改革开放带来了我国科学的春天和学术的繁荣以及教育事业的大发展。世界各国的先进教育理念,心理学等学科的新成就陆续不断地像春风一样吹进了中国。诸如[美]G·波利亚(1887—1985)的《数学的发现》、[荷兰]弗赖登塔尔(1905—1990)的《作为教育任务的数学》等学术著作的翻译出版,引起了国内对数学方法论与数学教育研究的热潮。因此,近 30 年来我国的数学教改实验,大都是为落实某一种教育教学理念为指导的试验。这些实验风起云涌,最终人们发现,作为一名数学教师,必须树立以学生为本的教育理念,必须有相当坚实的数学基础,必须以数学方法论为思想武器分析、研究教材,必须坚持启发式的教育方式,还必须坚持科学发展观做到与时俱进,才能真正胜任 21 世纪新时期的数学教育工作的需求。而《数学方法论与数学教学》一书正是按上述要求来编写的,努力体现上述的基本要求。本书的面世,适应了与时俱进的数学教育发展的新形势。

数学方法论的学习与研究一定要结合数学实际和数学教育实际。一定要通过

数学教学实践来领悟数学方法论的精神,才能正确地理解数学方法论,才能真正地用数学方法论指导数学教学工作。本来,数学教学与数学方法论是活生生地融合在人们的数学教育实践活动中的有机整体,如果分开来学习,是很难悟到其真谛、掌握其要领的。本书写作的特点是将二者结合在一起,融为一炉,这无疑为读者的学习引领了理论与实际相结合的正确途径,为还未走上数学教师岗位的大学生提供了学习的方便,也为岗前培训提供了相应的范本。特别是书中精选的大量的例题和每章后的练习题,为大家的学习提供了思考的余地和创新的空间。

我国的数学教育事业正在大发展的情势中,如何做到又好又快地发展是值得在实践中认真思考解决的新问题。我国数学教育学科也在飞速地建设和发展之中,具有中国数学教育特色的“数学学科教育学”需要几代人的探索、努力才可能不断完善,逐步完成。重要的是广大的数学教育工作者都在辛勤地耕耘、积极地探索,并且通过自己的实践总结成论文或专著,使这些涓涓细流不断地汇集成大江大河。这也正是我国数学教育学科发展的希望。应该说,本书不但是作者自己劳动的结晶,而且汇集了广大数学教育工作者的智慧和成果,并且进行了开拓与探索。既然是探索,难免有不完备的地方,需要在这本著作的使用中逐步充实、完善与提高。也希望广大读者提出宝贵的建议。以期再版时修订,使其日臻完善。

首都师范大学数学科学学院

周春荔

2009年5月1日

序 二

一

翻读徐、纪二君关于数学教学法的力作《数学方法论与数学教学》，不禁想起一件匪夷所思之事。

20世纪60年代，我从师范大学毕业，先当老师，后参加数学教育教学研究工作，深感教学方式方法之重要：明确的教学目标，恰当的方式方法，往往吸引学生全身心地投入，课堂气氛活跃，教学效果好，事半功倍。反之，则课堂混乱或沉闷，教得吃力而效果不佳。然而，当年在大学作为课程学习的数学教学法，却是不受学生们欢迎的。

这到底是为什么呢？

是不是“书到用时方恨少”，大家尚未走上教学岗位，还不知道“教学法”重要呢？自然有这个因素。但不全是。反思当时的感受，大约有三点：一是它虽叫数学教学法，却没有数学味，是一般教学法加上简单的教学事例，没有数学的特征；二是它不像一门科学，有“原理”无论证，否则方法一大堆，互相之间并不关联，松散得像操作手册；三是缺少对教师、学生、教学过程的深入分析，没有令人信服的案例和课例，缺乏可读性、可学性。

二

正是这些原因，20世纪80年代以后，“数学教学法”逐渐被边缘化，淡出高师院校的“专业课”，取而代之的是《数学教育学》（名称来自前苏联斯脱利亚尔的著作《数学教育学》，其内容一部分是对原有“数学教学法”较为理论化的内容的概述，另一部分就是对波利亚《数学与猜想》一书的详细摘编）。同时，这一时期还有弗赖登塔尔的力作《作为教育任务的数学》摘译出版，该书用哲学的观点分析了众多的数学基本内容，自认为是一本数学教育哲学的书。

波利亚的三部著作《怎样解题》、《数学的发现》和《数学与猜想》是从数学方法论角度研究数学以及数学的教与学的，弗赖登塔尔则是从哲学的角度研究数学与数学的教与学。

这使我明白了那时的“数学教学法”总使人感到对数学与数学教学分析得不深不透、不痛不痒的根源，其在于：缺少哲学和数学方法论的观点，而对数学教学来说，这是根本的。

三

由上面看出,富于数学味、突出数学特征,运用哲学和数学方法论加以统摄,自成一个严谨的科学系统等三点,是数学教学法(或叫做“数学教材教法”、“数学教育学”都可以)的灵魂。然而,20世纪80年代至今,我们推出的“数学教育学”,仍只不过是三论(教学论、学习论、课程论)的拼盘(且至今未见“书”出来);我们培养的数学教育“硕士”、“博士”,多表现出“去数学化”、“去哲学化”的特征;我们进行的多项“数学教育改革实验研究”(方案、课题),不过是教育学、心理学或程序教学某一学说的推论,仍是缺乏数学味和哲学味。由于严峻的环境和自身的种种缺陷,它们多是无果而终,杳无下文。

相比之下,我们倒是觉得“MM教育方式”较为切合以上三点,具有较强的生命力。大家知道,20世纪的30—50年代,在中国,有数学家、教育家傅种孙通过暑期教员讲习会用数学方法论之精神(处理数学内容)培训教师;在美国,有G·波利亚用“一般解题方法”、数学发现法等培训教师,都获得了很好的成效。但这里的应用数学方法论于数学教学是零星的,只在培训教师上和“解题教学”这一环节。徐沥泉特级教师设计的“MM教育方式”则是对数学方法论在数学教育教学上的系统应用,是在弄清数学方法论原理到学生素质的转化机制的基础上,将其设计成为一种数学教学的理论——操作系统,称为“数学方法论的教育方式”(即“MM教育方式”)。以栾慧敏、徐献卿为首的濮阳教育学院数学系MM课题组,在该院数学教育系进行了几轮实验,在实验过程中,经反复修改、讨论形成的MM(HT)实验方案,本身就是实验成果的一部分,在“MM(HT)教育方式”的基础上撰写的中小学数学教学法专著《数学方法论与数学教学》一书,水平很高,作为高师院校数学教育专业学生的教材,是非常合适的。

四

说上面提到的《数学方法论与数学教学》这部著作“水平很高”,“非常适合作为高师院校数学教育专业的教材”,不是瞎说的,是有根据的。作为一个虔诚的读者,我从头至尾、逐字逐句地阅读了全书,用了不下一个月的时间,还帮助改动了一些欠妥的字句。阅读中体会到,同我当年学习过的“数学教学法”对比,真是不可同日而语。据我的粗浅体会,本书至少有如下的四大特征:

1. 具有浓郁的数学味

与波利亚、华罗庚、弗赖登塔尔一样,通过数学讲方法,通过对具体的数学问

题的分析,概括出数学研究和数学教与学的方法,这是符合事物发展规律的。我们常说:钥匙就在锁中;那么最恰当的数学教与学的方法,应当就在数学之中。这样概括出来的教学法自然富有数学的特征。显然,我们这样说,并不排斥诸如教育学、(学习)心理学等对数学教学法的指导作用,但必须提升到哲学的层次,这样才能居高临下地指导。

2. 具有浓郁的哲学味

我们知道,“MM教育方式”充分运用傅种孙、波利亚、弗赖登塔尔、菲利克斯·克莱因和莫里斯·克莱因的数学教育思想,在发现的“数学方法论的基本原理到学生的素质”转化机制的基础上,通过巧妙而周到的设计,较为系统地把数学方法论(请注意,当时设计者徐沥泉先生是把“数学哲学研究”看做数学方法论的一部分来看待的)用到数学教学中,从而初步地实现了数学教育大师们的夙愿。在《数学方法论与数学教学》中,向未来的数学教师们较为系统地介绍了这种应用,从观念、意义和如何做几个方面做了清楚地论述。

3. 具有趣味性和可读性

本书不是单纯的抽象说教,而是在每次简短的说明后,都用“实例”加以“现身说法”,在正文及附录中分析了300余个问题、事例、课例和案例。它们多为从数学史中采集的名题和当前数学教学中选取的优秀案例,丰富有趣且令人深思,不仅可帮助加深理解,有的案例本身就很值得做进一步的研究探索。另外,每一章后都附有“问题与课题”供读者研究、撰写论文之用。

4. 这决不是一本“操作手册”式的著作

作为一部按照全新的数学观、教育观和学生观指导下的数学教育著作,它要求并帮助读者(未来的数学教师)通过学习和研究,做到三项更新:观念更新,知识更新,技能更新(如学会对课堂进行混沌控制,学会并参与数学研究、教学研究,参与数学教育实验等)。须知,站在一旁指指点点地阅读与执意参与其事地阅读,是完全不一样的。

最后,我愿意代作者说一句话。那就是为高师数学教育专业编著这样的“数学教学法”或数学教育学的教材,只是一种抛砖引玉式的尝试,读者、同学们还有很多质疑、建议和研究探索的空间,因为,离我国“数学教育学”的诞生时日尚远。

杨之

2008.12.于天空陋室

前 言

早在1985年前后,本人任范县一中数学教师时,偶尔阅读了波利亚所著的《怎样解题》、《数学与猜想》和《数学的发现》,就被一个数学家、数学教育家大胆说“实话”吸引。

1997年,任教濮阳教育学院中学数学教材教法课程。1998年,有幸结识了杨世明先生,在先生的引荐下,认识了周春荔教授,决定在濮阳教育学院数学系开展数学方法论指导下的高师数学教育方式(简称MM(HT)教育方式)的实验研究工作。随后,特邀杨世明先生、徐沥泉先生等来濮阳讲学,拉开了“数学方法论指导高等数学教学”实验研究的序幕。

在MM(HT)教育方式的研究过程中,阅读学习了徐利治先生的专著《数学方法论选讲》,学习借鉴了徐沥泉先生亲自设计并直接组织实施的“贯彻数学方法论的教育方式,全面提高学生素质”数学教学实验(简称MM实验)的有关文章,深切感受到了高师院校开设数学方法论课程、研究构建数学方法论指导数学教学的教育理论以及进行数学教育的意义和必要性。

一门科学只有当它成功地应用了数学的时候,才臻于完善,也就是说一门科学的成熟与否,视其应用数学的程度而定。既然数学教育是一门科学,那么数学教师理应运用数学本身的思想方法来组织数学教学。每一位优秀的数学教育工作者都应当自觉地用数学的思想方法,指导自己的数学教学工作。

现代数学教育尽管成功地运用了现代教育学、心理学、生理学、认知科学以及脑科学等研究成果,但它在理论上有意无意地忽略了数学方法的指导作用,这不能不说是数学教育科学中的一大憾事。

2006年,全国数学方法论与数学教学改革第八届会议在新疆昌吉召开。在本届理事会议上,决定编写《数学方法论与数学教学》一书,本人不揣浅陋,冒昧请缨,有幸得到了全国数学方法论研究中心顾问王梓坤院士,中心主任、博士生导师林夏水先生,中心副主任杨世明先生、周春荔教授、徐沥泉先生、王光明教授等的肯定和各位理事的热情支持。

本书是全国数学方法论研究中心重点课题研究成果。我们在认真学习和借鉴国内外数学方法论研究的理论成果、践行用数学方法论指导数学教学的基础上,结合自己多年的教学、研究经历和经验,编写了这部抛砖引玉之作,供同行们研究。

本书共四篇十二章：

第一篇，从数学的研究对象、数学的形式与内容、数学的思维方法和现代数学概观等方面，论述了数学是什么，阐述了数学的显形态和隐形态以及两种形态与数学思想方法的关系。

第二篇，主要阐述了数学的两大教育功能及其关系。

第三篇，论述了数学宏观方法和微观方法在数学教学中的作用，阐述了数学教学的总目标和数学教学的基本原则。

第四篇，从数学方法论指导数学教学理念出发，论述了数学教学设计的理论、方法、层次和应注意的问题。同时还从宏观和微观等方面，阐述了数学课堂教学的设计与实施。

本书有以下几个特点：

1. 突出了数学方法论对数学教学的指导作用，着重研究了数学方法论指导数学教学的理论和思想。

2. 理论联系实际。采用大量实例，帮助读者理解数学方法论指导数学教学的思想内涵，既有较强的可读性，又能对数学教学起到有效的启发和指导作用。

本书适合作为高师院校数学教育专业的教材，也可用于在职数学教师专业教育的教材，同时也可作为数学教师的教学参考书。

本书借鉴了大量 MM 教育方式的理论与实验研究成果，在此对奋战在 MM 教育方式研究与实践战线上的同仁表示感谢，对参考文献的作者也一并表示感谢。

几年来，高等师范院校数学教育的课程体系发生了微妙的变化，先后出现了《数学方法论》、《数学方法论与数学解题》等著作，但还未出现《数学方法论与数学教学》的著作。尽管我们进行了多年的实践与研究，但由于数学方法论指导数学教学在我国数学教育中的历史较短，再加之我们学识所限，本书的内容难免有缺憾之处，希望得到专家和同行们的批评与指正。

本书在编写过程中，得到了杨世明特级教师、周春荔教授、徐沥泉特级教师、郭璋特级教师和王光明教授的真诚帮助和大力支持，特此向他们表示衷心感谢。

徐献卿

2008年9月于濮上园

目 录

第一篇 数学是什么

第 1 章 数学的内容与形式	1
§ 1.1 数学内容的客观性	1
§ 1.2 数学是对客观实在的能动反映	4
§ 1.3 数学的形式与特点	5
§ 1.4 数学形式的作用	6
第 2 章 数学的方法与思维	11
§ 2.1 数学思想方法的基本要素	11
§ 2.2 数学中几种重大的思想方法	13
第 3 章 现代数学概观	43
§ 3.1 19 世纪数学的重大变革	43
§ 3.2 纯数学的主要特征和趋势	45
§ 3.3 现代数学应用概述	54
§ 3.4 计算机与现代数学	58

第二篇 数学的教育功能

第 4 章 数学的技术教育功能	63
§ 4.1 数学的“工具”教育功能	64
§ 4.2 数学的“语言”教育功能	66
§ 4.3 数学的技术教育功能	71
第 5 章 数学的文化教育功能	75
§ 5.1 概述	75
§ 5.2 数学的文化教育功能	79
§ 5.3 关于数学的文化教育功能的思考	86

第三篇 数学方法论与数学教学

第 6 章 宏观数学方法论与数学教学	89
§ 6.1 数学观与数学教学	89

§ 6.2	数学美在数学教学中的指导作用	97
§ 6.3	数学史、数学教育史对数学教学的影响	100
§ 6.4	数学学习心理与数学教学	105
第 7 章	微观数学方法论与数学教学	109
§ 7.1	观察、实验与数学教学	109
§ 7.2	合情推理与数学教学	114
§ 7.3	数学猜想及其教育价值	125
§ 7.4	思想实验与数学教学	134
§ 7.5	演绎推理与数学教学	142
第 8 章	一般解题方法的教学	155
§ 8.1	一般解题方法	155
§ 8.2	一般解题方法应用例说	158
第 9 章	数学教学的总体目标	190
§ 9.1	致力于引导学生自我增进一般科学素养	190
§ 9.2	增进学生的社会文化修养	194
§ 9.3	形成和发展数学品质	197
§ 9.4	提升身心健康水平	204
第 10 章	数学方法论与数学教学原则	209
§ 10.1	返璞归真原则	210
§ 10.2	“教猜想,教证明”并重的原则	212
§ 10.3	教学·学习·研究同步协调原则	216

第四篇 数学教学设计

第 11 章	数学教学设计概说	225
§ 11.1	数学教学设计应关注的问题	225
§ 11.2	数学教学设计的分类与层次	228
§ 11.3	数学教学设计的一般步骤	234
§ 11.4	说课	241
第 12 章	课堂教学的设计与实施	251
§ 12.1	课堂教学设计	251
§ 12.2	课堂教学设计案例	258
§ 12.3	课堂教学实施	269
附录 A	现代数学教学概述	288
	参考文献	316

第一篇

数学是什么

数学,作为人类思维对现实世界的表达方式,反映了人们积极进取的意志,缜密周详的推理以及对完美境界的追求.它的基本要素是:逻辑和直观、分析与构造、一般性和特殊性.虽然不同的传统可以强调不同的侧面,然而正是这些相互对立的力量的互相作用以及它们综合起来的努力,才构成了数学科学的生命、用途及其崇高价值.

第 1 章 数学的内容与形式

我们知道,数学在现实世界的各个方面有着广泛的应用,以至于在现代科学技术、社会科学、日常生活的某些方面,如果不借助于数学,不与数学发生关系,就不可能达到应有的精确度与可靠性.为什么?这只有正确地认识数学内容的客观性,才能做出科学的回答.

§ 1.1 数学内容的客观性

就数学内容而言,大多具有明确的客观意义,数学是思维对客观实在的能动反映,许多数学内容都有它的现实原型.就此而言,数学是人类所发现的.

一、数学内容的现实起源

我们知道,恩格斯对数学的定义是:“数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门科学.”我们从数与形的起源来分析.

数学发展至今已形成了日益庞杂的分支体系,然而数与形这两个基本概念始终是整个数学殿堂的两大柱石.数与形这两个概念的起源离不开现实世界,现实世界为数学的发展提供了必不可少的经验与材料.

例1 “数”的概念的起源.

“数”的概念起源于数(shǔ),要数就得有被数的对象.原始人采用“结绳记数”——就是把猎获物等现实物体集合与绳子的“结”的集合进行对应或与手指、脚趾对应.当然,这是认识数的初级阶段.

数学发展史的研究再现了人类认识数的过程.正如恩格斯所言:“人们曾用来学习计数,从而用来做第一次算术运算的十个指头,也可以是任何别的东西,但总不是悟性的自由创造物.为了计数,不仅要有可以计数的对象,而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性仅仅顾及到数目的能力,而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果.”

由人类智慧所创造的“数”,可以用来数各种集合中的对象的个数,它和对象所特有的性质(物理性或化学性等)无关.譬如数“三”是从包含三个东西的实际集合中抽象而得,它不依赖这些对象的任何特殊性质,也不依赖表示它的符号.对儿童来说,数通常总是和实际的对象连在一起的,如手指或珠子等.在早期的语言中,是通过不同对象使用不同类型的数的语言来表达一个具体数的意义的.

我们不去过分追求从具体对象的集合转化到抽象数的概念的哲学性质,因此,我们把自然数及其两种基本运算——加法和乘法——当做已知的概念接受下来.

例2 “形”的概念的产生.

形的概念也是从现实世界中抽象出来的.物质世界中的物体以各种“形状”客观地存在着.伽利略(Galileo)说:“大自然以数学的语言讲话——这个语言的字母是三角形以及其他各种数学形体.”“大漠孤烟直,长河落日圆.”有文学家的合理形容,而原始树木是“直”的,满月是“圆”的,水晶和蜂巢是结构极其精巧规则的“多面体”,向日葵的种籽排列是按“对数螺线(非同圆)”排列的,有些植物绕竿攀援形成“螺旋线”,则是数学家对大自然的“理解”.古算书载:“今有木长三丈,围之三尺,葛生其下,缠木七匝,上与木齐,问葛长几何?”是从现实中抽象的数学问题.现代仿生学发现许多植物叶子的形状是自然形成的特殊闭曲线,如:

三叶草叶子满足方程式: $\rho = 4(1 + \cos 3\varphi + \sin^2 3\varphi)$.

睡莲叶子满足方程式: $(x^2 + y^2)^3 - 2ax^3(x^2 + y^2) + (a^2 - r^2)x^2 = 0$.

茉莉花瓣的形状是如下一族曲线: $x^3 + y^3 = 3axy$.

正如恩格斯所言:“几何学的结果不外是各种线、面、体或它们的组合.这些组合大部分早在人类以前就已经在自然界出现了(放射虫,昆虫,结晶体等).”^[1]

人类对形的认识:“必须先存在具有一定形状的物体,把这些形状加以比较,然后才构成形的概念.”^[2]

我们有理由推想,角的概念很可能是来自对人的大小腿(股)或上下臂的观察,因为大多数的语言中,角的边常用股或臂来表示.譬如英文中,直角三角形的两直角边叫两臂,汉语中直角三角形两直角边中的一条叫股.

二、数学内容的发展

我们反对把数学看成与现实世界无关的观点,同时也反对把数学看成只是经验的科学.在数与形的概念形成以后,随着数学的发展,数学问题的来源呈现了极为复杂的情况.

例3 微积分的产生.

微积分的产生有着明显的实践背景.最初求导数的流数法,就是人们纯粹地通过实验发现的,计算变速运动物体的瞬时速度或确定已知曲线切线的斜率,这就是微分学最初的两个基本问题;而求不规则平面图形的面积引起了最初的积分学.虽然这既不是从牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)开始,也不是由他们完成的,但不可否认他们两人在其中起了决定性作用.

例4 概率论的产生.

对有关概率问题发生兴趣,最初是由于保险业的发展.但是鼓舞伟大数学家思索的专门问题却来自于骰子和纸牌赌博.一个骑士德·梅雷向帕斯卡(Pascal)提出关于点子的问题,帕斯卡就这个问题(1654年)与费马(Fermat)通信,建立了概率论的基础.惠更斯(Huygens)到巴黎时,听说他们二人的通信,并试图自己找出答案.1657年惠更斯发表了论文《论机会游戏的演算》,这是概率论的第一篇论文.

例5 网络几何学.

18世纪东欧的哥尼斯堡城有如图1-1所示的七座桥.

居民经常沿河过桥散步,于是提出了一个问题:能否一次走遍七座桥,而每座桥只通过一次,最后仍回到起始地点呢?

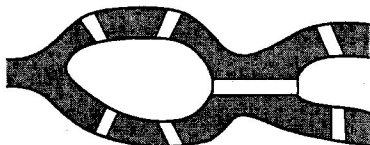


图 1-1

这个问题表面上看来很容易,但热心的人们始终没有找到这样的路线,最后问题传到了数学家欧拉(Euler)那里.欧拉证明了这样的走法根本不存在,并于1736年公布了他的结果,这就是著名的“七桥问题”.欧拉对这个问题的研究,建立了网络几何学(图论)的基础,它与拓扑学有着密切的联系.

例6 非欧几何(罗氏几何)的产生.

由欧氏几何第五公设的不显然性,许多数学家试图对公设进行证明.2000多年来不得其结果.很多优秀的数学家给出的所谓证明都犯了逻辑循环的错误——偷用了与第五公设的等价命题,最后罗巴切夫斯基(Лобачёвский)断定第五公设不能证明,而另外的假设也不会推出矛盾,从而发明了非欧几何.

哥德巴赫(Goldbach)猜想和费马大定理也是由数学内部提出的.

由以上数例可知,数学(问题)的来源有的通过生产、生活、游戏等形式从外部世界所提出,也有是纯粹由数学内部所提出.但总体来看,大多数数学分支那些最初、最古老的问题,是起源于现实经验,是由外部现实世界提出.我们说数学内容是某种起源于经验的东西,是来自外部世界,正是在这个意义下而言的.

§ 1.2 数学是对客观实在的能动反映

数学是对现实世界的一种能动反映,是系统化了的常识. 这种能动性表现在如下几个方面:抽象与数学化、发明与创造、想象与反思.

一、抽象与数学化

现实世界的量的规定性并不是以孤立的形式出现的,是与质的规定性结合在一起的. 但是,数学的抽象在于撇开现实事物的各种质的属性,从而得到纯粹的量的关系,这个抽象的过程称为:现实材料数学化. 现实世界中的5头牛、5只鹿、5个手指头,在数学中均抽象为“5”;圆月、车轮、圆木板抽象为“圆”. 经过抽象后的量及其量的关系,形成了一种思想事物,成为数学研究中处理的对象.

例1 任意的六个人中,至少存在三个人,他们之间相互认识或相互不认识,请证明之.

分析:我们将六个人抽象为点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F ,将认识或不认识分别抽象为实线或虚线,如图1-2所示. 首先观察 AB 、 AC 、 AD 、 AE 、 AF 五条线,因为只有两种线型,所以某一种线不少于三条,无妨设 AB 、 AC 、 AD 三条线同种. 继续观察 BC 、 BD ,若其中有一条与 AB 同种,命题得证;若 BC 、 BD 同种,且与 AB 不同种,继续观察 CD ,无论 CD 为何种,要么与 AC 、 AD 同种,要么与 BC 、 BD 同种.

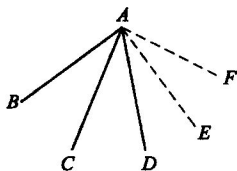


图 1-2

由以上分析可看出,数学的抽象就是将现实材料内容数学化,也就是将非数学内容组织成一个合乎数学要求的结构,这就是数学化. 数学是现实材料“数学化”后形成一种思想事物,所以说数学亦是研究思想事物的一门科学.

二、发明与创造

从数学内容的客观性来看,数学是人们发现的,而就“数学化”后的数学对象而言,数学是人类发明的. 人的思维可以创造出一系列更为抽象、更为高级、更为深刻、更为普遍的概念(数学对象),比如虚数、多元数、理想数、四维空间等. 进一步研究这些纯粹量之间的变化和相互关系,也就是与纯粹“量”的逻辑范畴打交道,这里的“量”是一种广义的概念,既可以是“数”,也可以是“形——结构”. 这个问题我们将在后面的章节中谈到.

人们对满足一定运算法则的数的研究创造了行列式及相关理论,对线性方程组的解法的研究创造了矩阵的概念,由某种满足一定运算的集合创造了群、环、域的概念,对数表的正名、数列概念的拓展创造了“数阵”的概念,等等.

三、想象与反思

联想与想象是思维能动性在数学中的集中表现,想象是数学的助产婆. 在数学上也是需要联想的,甚至没有联想就不可能发明微积分. 比如微分三角形就是联想的量,是在差分三角