ZHISHI YU YINGYONG

JICHU SHUXUE GAOZHONG

肖竞择 宋忠仁 江志 主编

华中师范大学出版社

青年自学数学丛书

高中数学基础知识与应用

青年自学数学丛书

高中数学基础知识与应用

肖竞择　朱忠仁　江　志　主编

华中师范大学出版社

一 式与方程

内容概述

本章主要从式的恒等变形、化简与求值，以及方程的基本知识等方面，作整体的粗略介绍，强调指出在平时学习时容易忽略的地方，为以下各章的学习作一铺垫。

在中学阶段，我们学习了代数式(有理式与无理式)及简单的超越式(指数式与对数式、三角式与反三角式)，学习了代数方程(有理方程与无理方程)及简单的超越方程(指数方程与对数方程、三角方程等)，务必把握以下各点：

1．对于式与方程中代表变量或未知数的字母，应注意其允许值范围，特别要注意隐蔽的、已知的约束条件．例如给出方程

$\log_{(cx+\frac{d}{x})}x=-1$（其中$c$、$d$、$x$为实数，$c\neq0$，$x$为未知数）

我们应该注意什么呢？对于这一实数集内的对数方程，其有解的条件应是实参数c、d满足的某种关系(各自的取值范围或相互间的关系)，此方程的解也应是含c、d的解析式．根据对数概念，首先考虑的约束条件应是真数$x>0$，底数$cx+\dfrac{d}{x}>0$且$\neq1$，然后再将对数转化为指数形式求解。

一般来说，在中学阶段有一些约定是不言自明的：分解因式一般指在有理数集合内；式与方程中的字母一般指在实数集合内；给出的已知条件，如果未指明要讨论，那么其中

的字母允许值范围随之确定；等等。如

已知$\sin\alpha=a$，求$\mathrm{tg}\alpha$。

在求解时，$|a|\leqslant 1$应是已知的约束条件，不必讨论$|a|>1$的情况。又如

m是什么实数时，方程$x^2-(m+2)x+4=0$有实数根？

如果作出解答："$m=2$时，此方程有实数根。"这样行吗？由于我们通常把"m是什么实数时"理解为"当且仅当m为何实数时"，即求此方程有实数根的充要条件，故上述解答是不完全的。应求出使得此方程有实数根的实数m的所有值：$m\leqslant-6$或$m\geqslant 2$。

2．式的恒等变形是相对而言的，关键在于字母允许值集合的确定。如代数式$\sqrt{a^2}$与a的恒等是在非负的实数集合内；$\lg x^2$与$2\lg x$的恒等是在正实数集合内；$|x|^2$与x^2的恒等是在实数集合内；$\sin x$与$\cos x\cdot\mathrm{tg}x$恒等是在集合$\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z,\ x\in R\}$内；……等等。

方程的变形，主要有以下三种情况：

（1）变形后的方程与原方程是同解方程。

（2）变形后的方程是原方程的结果（即原方程的解都是变形后方程的解，变形后方程的解不一定是原方程的解）。

如方程$x-1=1$两边各自乘方，得方程$(x-1)^2=1$；那么方程$(x-1)^2=1$是方程$x-1=1$的结果。

（3）在方程变形中，由于对方程两边的式子进行恒等变形而扩大或缩小了未知数的取值范围，而增解或失解。

如方程$\lg x^2=2$变形为$2\lg x=2$，未知数x的取值范围显然缩小了，因而失解$x=-10$。

又如方程$\sin x \cdot \mathrm{ctg}\, x=1$变形为$\cos x=1$，未知数$x$的取值范围显然扩大了，因而增解$x=k\pi$，$k\in Z$。

在式与方程的变形中，对于“式”来说，要注意是否恒等；对于“方程”来说，要注意是否同解。

3．解方程时应注意：方程的解集与在什么数集内求解方程有关（由题设条件和实际问题的情境决定）；与形的结合（如一元二次方程与二次函数图象，指数、对数方程与指数、对数函数图象，二项方程根的几何意义等）以及与绝对值、不等式、数和式的分类知识等的联系；等等。

含有字母参数的式与方程，往往需要对参数的不同情况进行讨论，这种问题有利于灵活运用能力的考查，应引起足够的重视。

§1.1　式的恒等变形

自学要点及例题

1．如果两个解析式中的字母在一切允许值范围内任取一值，都能使这两式有相同数值，则称这两式恒等；把一个解析式用与之恒等的式子去代替，则称恒等变形。

2．对于所含字母的一切允许值都能成立的等式，叫做恒等式。利用恒等式的性质，将其两边的对应系数相比较，可确定未知的系数，这种方法叫做待定系数法。待定系数法一般有两种：数值代入法、系数比较法。

3．证明等式，实质上是在某一特定的数集内或某种约束条件下，证明恒等式的问题。证明的过程，即是式的恒等变形过程。在不同的数集中，都有各自的运算性质和法则，但都满足运算的基本定律：加法交换律、加法结合律、乘法

交换律、乘法结合律、乘法对加法的分配律。

4．证明等式的要点是：看清变形目标、从两边接近目标、变化成容易证明的形式、利用等式条件或已知等式。

例1　求出下列各题中两式恒等的条件：

（1）a^2与$|a|^2$　$(a\in c)$；

（2）$\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$与$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}$

（其中n是正整数，a、$b\in c$）；

（3）ax^2+bx+c与$a\left[x-\dfrac{-b+\sqrt{-(b^2-4ac)i}}{2a}\right]\left[x-\dfrac{-b-\sqrt{-(b^2-4ac)i}}{2a}\right]$ $(a、b、c\in R)$；

（4）$\log_a\sqrt{(1-a)^2}$与$\log_a(|a|-1)$　$(a\in R)$；

（5）$\cos\alpha$与$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$　$(\alpha\in R)$；

（6）$\arccos(\cos x)$与x　$(x\in R)$。

解　(1)令$a=m+ni$(其中m、$n\in R$)，则$a^2=(m+ni)^2=(m^2-n^2)+2mni$，$|a|^2=(\sqrt{m^2+n^2})^2=m^2+n^2$。

使a^2与$|a|^2$恒等的条件是$\begin{cases}m^2-n^2=m^2+n^2\\2mn=0\end{cases}$，

故$n=0$，$m\in R$，即$a\in R$。

（2）$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}$是以$a^{n-1}$为首项，$a^{-1}b$为公比的等比数列前$n$项之和，当$a^{-1}b\neq1$，即$a\neq b$时，可变换为$\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$。(若$a=0$且$b\neq0$时，两式仍恒等)

故使两式恒等的条件是a、b为不相等的复数。

（3）由实系数方程$ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$在复数集C中有两个根：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}i\quad(b^2-4ac<0).$$

故得到两式恒等的条件是a、b、$c\in R$，$a\neq 0$且$b^2-4ac<0$。

（4）$\log_a\sqrt{(1-a)^2}$中a的取值范围是$a>0$且$a\neq 1$；$\log_a(|a|-1)$中a的取值范围是$a>1$．在$a>1$的条件下两式都可变形为$\log_a(a-1)$。

故得到两式恒等的条件是$a\in R$且$a>1$。

（5）由同角三角函数的关系知：

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{\sec^2\alpha}=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha},\ 其中\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z.$$

故使$\cos\alpha$与$\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$恒等的条件是

$$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ 其中k\in Z.$$

（6）对于$\arccos(\cos x)$中的字母x可取一切实数值，但需$\arccos(\cos x)$与x恒等．由反正弦函数的定义知，此时必须$x\in[0,\pi]$．

【附注】 式的恒等是相对的，关键在字母允许值的范围．

例2 若$H(x)$是关于x的整式，$(x-1)\cdot(x^2+1)\cdot H(x)=x^8+Ax^2+B$是关于$x$的恒等式，求常数$A$、$B$的值。

分析 由题意知，$H(x)$是关于x的五次式，若利用系数比较法则繁，可利用特殊数值代入法处理．

解 对于x的一切复数值，都有

$$(x-1)\cdot(x^2+1)\cdot H(x)=x^8+Ax^2+B.$$

选择适当数值：$x=1$、$x=i$，使左式为零。可得：

$$\begin{cases}1+A+B=0\\1-A+B=0,\end{cases}\text{求出}\begin{cases}A=0\\B=-1.\end{cases}$$

【附注】 还可利用整除关系来解.

例 3 已知$y=f(x)$在它的定义域内是增函数，且函数的解析式$f(x)$与它的反函数的解析式$f^{-1}(x)$恒等，求证$f(x)\equiv x$。

分析 在函数的定义域内任取一值，说明它不可能大于或小于相应的函数值。

证明 在$y=f(x)$的定义域内任取一自变量的值$x=a$，且设$f(a)=b$。

$\because$ $f(x)\equiv f^{-1}(x)$，$\therefore$ $a=f^{-1}(b)=f(b)$。

假设$a<b=f(a)$：

由于$f(x)$是增函数，则有$f(a)<f(b)$，即$b<a$。与假设$a<b$矛盾，故$f(a)$不可能大于a。

假设$a>b=f(a)$：

由于$f(x)$是增函数，则有$f(a)>f(b)$，即$b>a$。与假设$a>b$矛盾，故$f(a)$不可能小于a。

因此$f(a)=a$。a是函数定义域内任一自变量的值，故$f(x)\equiv x$。

【附注】 "$\equiv$"表示恒等。

习 题 1.1

1．在下列各方框中填入整数，使下列等号两边的式子恒等：

(1) $x^2+2x+3=\boxed{}(x-1)^2+\boxed{}(x-1)+\boxed{}$；

(2) $\boxed{}x(x-1)(x-2)+\boxed{}x(x-1)+\boxed{}x+\boxed{}=x^3$；

(3) $\dfrac{9x^2}{x^3-3x+2}=\dfrac{\boxed{}}{x-1}+\dfrac{\boxed{}}{(x-1)^2}+\dfrac{\boxed{}}{x+2}$.

2. 在实数范围内，求出下列每小题中两式恒等的条件：

(1) $\sqrt{ab}$与$\sqrt{a}\sqrt{b}$；　　(2) $\sqrt{2a^2-1-2a\sqrt{a^2-1}}$与$a-\sqrt{a^2-1}$；

(3) $(a^m)^n$与a^{mn}；

(4) $\log_a b$与$\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$；

(5) $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}+\sec\alpha$与$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. 证明恒等式$a^{\log_a x}=x$　（a、x是不等于1的正实数）。

4. 若x、y是正数，且x^2-y^2与xy成正比，证明x与y成正比。

5. 若多项式$f(x)=4x^4-4px^3+4qx^2+2p(m+1)x+(m+1)^2$ $(p\neq0)$与$F(x)=(2x^2+ax+b)^2$恒等，则有$p^2-4q-4(m+1)=0$.

§1.2　式的化简与求值

自学要点及例题

式的化简与求值，需要借助于式的恒等变形，一方面应牢固掌握有关运算性质和法则、公式，另一方面应学会一些常用的变形技巧。在化简过程中，必须注意保持恒等，必要时要加以讨论。同时也应注意是否达到了化简的要求。求值往往是将式化简后求得的。

例1　选择题（将各题所给的答案中唯一正确的答案填入题后括号内）：

(1) 若$n\in Z$，则$\dfrac{1}{16}[1-(-1)^n](n^2-1)$的值是

(A) 一定是零。　　(B) 一定是偶数。

(C) 是整数不一定是偶数。(D) 不一定是整数。

解　选(C)。

根据数的分类，n分为偶数和奇数，表达式分别为$2k$和$2k+1(k\in Z)$。

当$n=2k$时，原式$=0$；当$n=2k+1$时，原式$=\frac{1}{2}k(k+1)$，由于k与$k+1$是两个连续整数，必有一奇一偶，故$\frac{1}{2}k(k+1)$必是整数，但不一定是偶数(如$k=\pm 2$)。故选(C)。（直接分析法）

（2）若$\sqrt{x-3}+1=\sqrt{x+3}$，则$x=$(　　)。

$(A)\ \frac{37}{4}$。　$(B)\ 5$　$(C)\ \frac{1}{4}$。　$(D)\ \frac{1}{2}$。

解　据题意知$x\geqslant 3$。故(C)、(D)不合；(B)显然不合。故选(A)。（逐步淘汰法）

（3）已知$(a+1)(b+1)=2(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$，那么$\operatorname{arctg}a+\operatorname{arctg}b$的弧度数等于(　　)。

$(A)\ \frac{\pi}{2}$。　$(B)\ \frac{\pi}{3}$。　$(C)\ \frac{\pi}{4}$。　$(D)\ \frac{\pi}{6}$。

解　取特殊数值：$a=0$，$b=1$，则$\operatorname{arctg}0+\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$。故选$(C)$。（数值代入法）

（4）已知a、b、c都是小于1的正数，则$a(1-b)$、$b(1-c)$、$c(1-a)$中，一定是(　　)。

(A) 都大于$\frac{1}{4}$。　(B) 至少有一个不大于$\frac{1}{4}$。

(C) 至多有一个大于$\frac{1}{4}$。(D) 至少有二个不大于$\frac{1}{4}$。

解　(C)、(D)是同一含义，不可能都正确，故排除。(A)、(B)互为矛盾论断。若(A)正确，则

$$a(1-b)>\frac{1}{4},\ b(1-c)>\frac{1}{4},\ c(1-a)>\frac{1}{4}.$$

从而$\frac{a+(1-b)}{2}\geqslant\sqrt{a(1-b)}>\frac{1}{2}$，　$\frac{b+(1-c)}{2}\geqslant$

$\sqrt{b(1-c)}>\frac{1}{2}$，　$\frac{c+(1-a)}{2}\geqslant\sqrt{c(1-a)}>\frac{1}{2}$。

以上三式相加得$\frac{3}{2}>\frac{3}{2}$，矛盾。

故假设错误，即排除(A)。则选(B)。（反证排除法）

【附注】　解选择题时，必须根据题设条件及所给答案，采取恰当的解法.

例2　已知$\log_6 15=a$，$\log_{12}18=b$，求$\log_{25}24$。

分析　由$\log_{25}24=\frac{1}{2}(\log_5 3+3\log_5 2$，知，需确定$\log_5 3$与$\log_5 2$。又已知$a=\log_6 15=\frac{1+\log_5 3}{\log_5 2+\log_5 3}$，$b=\log_{12}18=\frac{\log_5 2+2\log_5 3}{\log_5 3+2\log_5 2}$，故可求出$\log_5 3$、$\log_5 2$。

略解　令$\log_5 2=x$，$\log_5 3=y$，由上知

$$\begin{cases} a=\dfrac{1+y}{x+y} \\ b=\dfrac{x+2y}{2x+y} \end{cases}$$ 消y得$(2b-ab-a-1)x=b-2$。

而$2b-ab-a-1=2\log_{12}18-\log_6 15\cdot\log_{12}18-\log_6 15-1$
$=(\log_{12}18-\log_6 15-1)+\log_{12}18(1-\log_6 15)$。

又$\log_{12}18<2$，$\log_6 15>1$，则$\log_{12}18-\log_6 15-1<0$；$\log_{12}18>0$，$1-\log_6 15<0$，则$\log_{12}18(1-\log_6 15)<0$；故$2b-ab-a-1\neq 0$，

得$x=\frac{b-2}{2b-ab-a-1}$，再求得$y=\frac{1-2b}{2b-ab-a-1}$。

故$\log_{25}24=\frac{1}{2}(\log_5 3+3\log_5 2)$

$$=\frac{1}{2}(y+3x)=\frac{5-b}{2a+2ab-4b+2}。$$

【附注】 注意含字母系数的方程的解法。

例3 （1）设$t=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$，求$t+\frac{1}{t}$。

（2）求证上述t是方程$x^5-1=0$的一个根，并求出$\cos\frac{4\pi}{5}$和$\cos\frac{2\pi}{5}$的值。

分析 （2）由$t^5-1=(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)=0$，使方程变成关于$(t+\frac{1}{t})$的方程形式.再利用（1）的结果。

解 （1）
$$t+\frac{1}{t}=(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5})+[\cos(-\frac{4\pi}{5})+i\sin(-\frac{4\pi}{5})]=2\cos\frac{4\pi}{5}。$$

（2）∵ $t^5=(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5})^5=\cos4\pi+i\sin4\pi=1$，∴ t是方程$x^5-1=0$的一个根。

$t^5-1=0$，则$(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)=0$，又$t\neq1$，故$t^4+t^3+t^2+t+1=0$。两边同除以t^2，得

$$(t+\frac{1}{t})^2+(t+\frac{1}{t})-1=0,$$

即 $4\cos^2\frac{4\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}-1=0$，

所以 $\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ （∵ $\cos\frac{4\pi}{5}<0$）。

故 $\cos\frac{2\pi}{5}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{4\pi}{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$。

【附注】 由于$t+\frac{1}{t}=2\cos\frac{4\pi}{5}$，需求$\cos\frac{4\pi}{5}$的值，则利用$t$是$x^5-1=0$的根，得到关于$t+\frac{1}{t}$的方程而求出。

习 题 1.2

1．设a、b为正整数，且$\lg(a-3)$与$\lg(4-b)$的算术平均数为$\lg\sqrt{5}$，求a、b的值。

2．若$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$，其中$a>0$，$b>0$，求$\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$的值。

3．已知$f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}$，且$f(\lg a)=\sqrt{10}$，求a。

4．选择题：

（1）若实数a、b、c满足关系式$|a|+a=0$，$|ab|=ab$，$|c|-c=0$，那么代数式$\sqrt{b^2}-|a+b|-\sqrt{(c-b)^2}+|a-c|$的值等于（　　）。

（A）$2a-b$。（B）$2b-2a$。（C）b。（D）$-b$。

（2）已知x、$y\in N$，$x>y$，$x^3+19y=y^3+19x$，$a=\log_{\frac{1}{2}}(x+y)$，则有$a\in$（　　）。

（A）$(-3,-2)$。（B）$(-2,-1)$。（C）$(-1,1)$。（D）$(1,2)$。

（3）已知$f(x)=x^2+px+q$，则$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$中，一定是（　　）。

（A）至少有一个小于$\frac{1}{2}$。（B）至少有一个不小于$\frac{1}{2}$。

（C）至多有二个不小于$\frac{1}{2}$。（D）都小于$\frac{1}{2}$。

（4）a、b两复数的和与积都是正数，则（　　）。

（A）a、b都是正数。（B）a、b都不是负数。

（C）a、b中至少有一个正数。（D）不一定是以上情况。

（5）对于满足$x>3$的每一个x，要使$y<x$成立的充要条件是（　　）。

(A) $y=3$.　　(B) $y\neq 3$.　　(C) $y>3$.

(D) $y<3$.　　(E) $y\geqslant 3$.　　(F) $y\leqslant 3$.

(6) 设复数$z=a+bi(a、b\in R$且$b\neq 0)$，则$|z^2|$、$|z|^2$，z^2的关系是(　　).

(A) $|z^2|=|z|^2\neq z^2$　　(B) $|z^2|=|z|^2=z^2$.

(C) $|z^2|\neq|z|^2=z^2$.　　(D) 互不相等.

§1.3　方程的基本知识

自学要点及例题

1．方程的基本知识包括：什么是方程、方程的分类、方程的解和解方程、同解方程和方程的同解原理、解方程的一般步骤、基本思路以及方程的增失解等。

2．高中阶段主要研究简单的指数方程、对数方程、简单的三角方程、复系数的一元二次方程、二项方程等，也涉及到二元一次方程、二元二次方程（组）。

例1　a为何值时，方程$\log_{(x+a)}2x=2$有解？并求出解来。

解　原方程等价于下面的混合组：

$$\begin{cases}(x+a)^2=2x & ①\\ x+a>0 & ②\\ x+a\neq 1 & ③\end{cases}$$

由①、②知，$2x>0$，即$x>0$。

由①变形为$(x+a-1)^2=1-2a$　　④

由③、④知$1-2a>0$，即$a<\dfrac{1}{2}$。

当$a<\dfrac{1}{2}$时，方程①有两解：

$x_1=1-a+\sqrt{1-2a}$，$x_2=1-a-\sqrt{1-2a}$。

显然，$x_1+a=1+\sqrt{1-2a}>1$满足②、③.

而$x_2+a=1-\sqrt{1-2a}$，为满足②，须$1-\sqrt{1-2a}>0$，即须$a>0$，此时满足③.

故当$0<a<\frac{1}{2}$时，原方程有两解：

$x_1=1-a+\sqrt{1-2a}$，　$x_2=1-a-\sqrt{1-2a}$

当$a\leqslant 0$时，原方程有一解：

$x=1-a+\sqrt{1-2a}$.

【附注】　方程①与原方程并不同解，在讨论a的取值情况时，以方程①为主进行研究，然后构成满足②、③的条件.

例2　解关于x的方程$2\sqrt{x^2-1}=x-\sqrt{x^2-a}$.

分析　一种解法是先讨论x、a的范围或它们间的联系；另一种解法是先将方程化成最简整式方程求出解来，然后对其中的参数a进行讨论. 现采用后一种解法.

解　原方程两边平方，得

$$4(x^2-1)=x^2-2x\sqrt{x^2-a}+x^2-a,$$

即　$2x\sqrt{x^2-a}=-2x^2+(4-a)$.

再平方，得　$8(2-a)x^2=(4-a)^2$.

由原方程知$x\geqslant 0$，故当$a<2$时，有

$$x=\frac{4-a}{2\sqrt{2(2-a)}}.$$

将其代入原方程左右两边：

左边$=\dfrac{2|a|}{2\sqrt{2(2-a)}}$，右边$=\dfrac{4-a-|3a-4|}{2\sqrt{2(2-a)}}$

当且仅当$2|a|=4-a-|3a-4|$，即$0\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}$时，左、右两边相等.

则当$0\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}$时，方程的解是$x=\dfrac{4-a}{2\sqrt{2(2-a)}}$；当$a$

<0 或 $a>\frac{4}{3}$ 时，方程的解集是 ϕ.

例3　试确定使含复数 z 的方程 $|z|^2-2zi+2a(1+i)=0$ 有解的正实数 a 的值．并求出方程的解．

分析　设 $z=x+yi$，然后分别求出实数 x、y。

解　设 $z=x+yi$，$(x、y\in R)$，则原方程变形为

$$(x^2+y^2+2y+2a)+(2a-2x)i=0.$$

$$\therefore\ \begin{cases}x^2+y^2+2y+2a=0 & ①\\ 2a-2x=0 & ②\end{cases}$$

由②得 $x=a\ (>0)$ 代入①得

$$(y+1)^2=1-2a-a^2,$$

需 $1-2a-a^2\geqslant 0$，即 $0<a\leqslant -1+\sqrt{2}$.

所以　$y=-1\pm\sqrt{1-2a-a^2}$.

故方程有解的条件是 $0<a\leqslant -1+\sqrt{2}$，方程的解是

$$z_1=a+(-1+\sqrt{1-2a-a^2})i$$

$$z_2=a+(-1-\sqrt{1-2a-a^2})i.$$

习　题　1.3

1．选择题

(1) 方程 $(1+\sqrt{2})x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$ 的两根分别可作为(　　).

(A) 两椭圆的离心率.　　(B) 一抛物线和一椭圆的离心率.

(C) 两双曲线的离心率.　(D) 一椭圆和一双曲线的离心率.

(2) 方程 $\lg(x+1)^4=\lg_2^2(\frac{1}{4})$ 的解集是(　　).

(A) $\{-\frac{99}{100}\}$.　(B) $\{9\}$.

(C) $\{9,\ -11\}$,　(D) $\{9\}\cap\{-11\}$.

(3) 方程 $x^2+|x|=0$ 在复数集内的解集是(　　).

(A) $\{0\}$.　(B) $\{0,\ i,\ -i\}$.　(C) $\{0,\ i\}$.

(D) $\{\pm i\}\cup\varnothing$.

(4) 方程$\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+5}=\sqrt{11x+3}$在实数集内的解集是(　　).

(A) $\{-\frac{3}{14},\ 2\}$.　　　　(B) $\{-\frac{3}{14}\}$.

(C) $\{2\}$.　　　　(D) 不是(A)、(B)、(C).

(5) 对数方程$\lg(ax)=2\lg(x-1)$有解的条件是(　　).

(A) $a\leqslant-4$或$a\geqslant0$.　　(B) $a<-4$或$a>0$.

(C) $a>0$.　　(D) $a<-4$.

2．填空题：

(1) 已知x的二次方程$x^2-2(\sin\theta-2)x+3\cos2\theta=0$的两根分别为$\alpha$、$\beta$，当$\theta\in R$时，$\alpha^2+\beta^2$的最大值是______，最小值是______。当$\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$时，$\alpha^2+\beta^2$的最大值是______，最小值是______；当$\theta\in[0,\pi]$时，$\alpha^2+\beta^2$的最大值是_______，最小值是_______.

(2) 方程$\begin{cases}|x-1|+|y-5|=1\\ y=5+|x-1|\end{cases}$在实数集内的解集是______.

(3) 实系数方程$x^5+ax^4+bx^2+c=0$有纯虚根的充要条件是____________.

(4) 二次方程$3x^2-6x+4\lg a=0$的两实根的积大于$\frac{8}{9}$，则a的整数值是________.

(5) 给定方程组：

$$\begin{cases}x+2y-2=0 & ①\\ x^2-ay^2=1 & ②\end{cases}（其中a\neq0）$$

在实数集内，若①表示直线，②表示圆锥曲线，那么方程组的解的情况与相应二曲线间的位置关系分别是____.

(6) 已知复数$z=\cos\theta+i\sin\theta$，当实数$k=$_______且$\theta\neq$____或$k\neq$_______且$\theta=$_______时，复数$y^3+k\bar{z}^3$是纯虚数.