高等学校教材

# 线性代数与空间解析几何

（第二版）

郑宝东 主编

郑宝东 邓廷权 编

高等教育出版社

高等学校教材

# 线性代数与空间解析几何

（第二版）

郑宝东　主编
郑宝东　邓廷权　编

高等教育出版社

**内容提要**

本书是关于线性代数与空间解析几何两方面内容的教材。它将这两部分内容按其内在联系合理的结合起来，相互渗透，前后呼应，成为一体. 内容包括行列式、矩阵、向量、空间中的平面与直线、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、空间中的曲面与曲线.

本书是在第一版的基础上，广泛听取校内外教师的意见后修订而成的. 书中配有内容丰富的习题和综合练习100例. 全书层次清晰，论证简洁严谨，可读性强.

本书适合作为高等院校非数学理、工科各专业相应课程的教材或教学参考书，亦可作为硕士研究生入学考试的参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数与空间解析几何/郑宝东主编. —2版. 北京:高等教育出版社,2003.7(2004重印)
ISBN 7-04-011891-2

Ⅰ.线… Ⅱ.郑… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②空间几何:解析几何-高等学校-教材
Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第025075号

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-64054588 |
| 社　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| 经　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 排　版 | 高等教育出版社照排中心 | | |
| 印　刷 | 北京人卫印刷厂 | | |
| | | 版　次 | 2001年7月第1版 |
| 开　本 | 787×960　1/16 | | 2003年7月第2版 |
| 印　张 | 16.5 | 印　次 | 2004年10月第2次印刷 |
| 字　数 | 300 000 | 定　价 | 17.60元 |



**物料号：11891-00**

# 再版前言

自从本教材首次出版以来，作者收到读者很多反馈信息，他们对本教材提出了许多很有价值的改进意见。这是对我们工作的鼓励和支持，借此再版之机，向关怀和支持我们工作的广大读者及同行表示由衷的谢意。

根据目前教学改革的精神，结合我们的教学实践，此次修订对教材内容及习题作了小量增删。为使线性代数与空间解析几何更好地结合，我们对教材内容、体系作了小量调整。为开阔学生视野，作为附录，我们保留了广义逆矩阵简介、Jordan 标准形简介，并增加了多项式代数的有关内容，理科性质较强的工科专业的学生可以选学这部分内容。如果学生独立完成本教材的综合练习 100 题有困难，教师可选其中部分习题作为示范题讲解。

尽管此次修订过程中我们作了很大努力，力求克服第一版教材的不足，保持原教材的特点，但是由于我们水平有限，不妥之处在所难免，敬请广大读者再予指正。

编者

2003 年 3 月于哈工大

# 前　言

作为一种工具,数学在人类科学的进步中所起的作用是不言而喻的。今天,数学技术已成为高技术的突出标志和不可或缺的组成部分。随着科学的进步,尤其是计算机和信息技术的迅速发展,知识更新的速度不断加快。人们已不满足于把数学仅仅当作一种工具来看待,而且希望通过数学训练领会到数学的思想方法和精神实质,提高数学素养,形成一种能力,终生受益。基于这种观念,在教材的编写过程中,我们努力遵循如下几个原则:

1. 精心选择、安排教学内容,以利于培养学生对事物某一方面结构的归纳和抽象的能力,以及从具体到一般的联想能力。

2. 内容的论述科学、准确,使学生掌握一种精确的数学语言,体会到线性代数与空间解析几何的思想方法,使学生具有通过自学掌握新的数学工具和数学思想的能力。

3. 精心安排例题、习题、综合练习题,使学生养成正确的演绎推理习惯,具备较强的自己动手推理、计算的能力。

线性代数是研究有限维空间线性理论的数学分支,有限维线性空间的理论来源于二维、三维空间中的向量代数。我们把二维、三维空间的向量代数安排在一般 $n$ 维向量前讲授,以利于学生了解这部分内容的渊源。线性代数中的许多概念都是从几何中抽象推广出来的,在几何中可以找到这些概念的模型。解析几何是利用代数方法研究几何问题的数学分支。我们把这两部分内容按其内在联系合理地结合起来,使学生充分体会从具体到一般的抽象思维方法,充分体会代数学与几何学的相互支撑和相互促进的作用。

本书编者在编写过程中一直站在读者的角度,力求通俗易懂,并充分考虑当前全国硕士生入学考试的需要,其内容和难易程度符合全国研究生入学考试大纲的要求。

本书是在多年教学实践与教学改革的基础上逐步形成的,凝结了哈尔滨工业大学数学系许多教师的教学经验,尤其是戚振开教授给予我们许多指导,在此一并表示深深的谢意。

由于编者水平有限,教材中缺点和疏漏在所难免,恳请读者批评指正。

编者

2000 年 8 月于哈工大

策　　划　李艳馥
编　　辑　李　蕊
封面设计　于文燕
责任绘图　黄建英
版式设计　胡志萍
责任校对　尤　静
责任印制　宋克学

# 郑重声明

# 目　　录

# 第一章　$n$ 阶行列式

在工程技术和科学研究中，有很多问题需要用到“行列式”这个数学工具．本章主要讨论如下几个问题：

1．行列式的定义；

2．行列式的性质；

3．行列式的计算；

4．Cramer 法则．

## 1.1　$n$ 阶行列式的概念

### 1.1.1　全排列的逆序数、对换

为了给出 $n$ 阶行列式的定义，首先介绍全排列的“逆序数”和全排列的“对换”．

把 $n$ 个不同的元素排成一列，叫做这 $n$ 个元素的**全排列**（简称**排列**）．称 $n$ 个不同元素的排列为 $n$ 阶排列，给定 $n$ 个不同元素的排列共有 $n!$ 种．例如，自然数 1,2,3 的排列共有六种：

123，　132，　213，　231，　312，　321．

为了方便，今后把自然数 $1,2,\cdots,n$ 视为 $n$ 个不同的元素的代表．用 $p_i$ 表示这 $n$ 个数中的一个（$i=1,2,\cdots,n$），且当 $i\neq j$ 时 $p_i\neq p_j$，于是 $p_1p_2\cdots p_n$ 便是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列．对于排列 $p_1p_2\cdots p_n$，我们把排在 $p_i$ 前面且比 $p_i$ 大的数的个数 $t_i$ 称为 $p_i$ 的**逆序数**，把这个排列中各数的逆序数之和

$$t_1+t_2+\cdots+t_n$$

称为这个排列的**逆序数**，记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$．

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**．显然，排列 $12\cdots n$ 的逆序数为 0，故它是偶排列．称此排列为**自然排列**．

**例 1**　求排列 23514 的逆序数．

**解**　在排列 23514 中，2 的逆序数是 0；3 的逆序数是 0；5 的逆序数是 0；1 的逆序数是 3；4 的逆序数是 1，故排列 23514 的逆序数

$$t(23514)=0+0+0+3+1=4.$$

在一个排列中，将某两个数的位置对调（其他数不动）的变动叫做一个**对换**.两个相邻数的对换称为**相邻对换**.

**定理 1.1** 一个排列中的任意两个数对换后，排列改变奇偶性.

**证** 先证相邻对换的情形.

设一个排列为 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_m$，对换 $a$ 与 $b$ 后，排列变为 $a_1a_2\cdots a_sbab_1b_2\cdots b_m$.显然，经过此对换后，$a_1,a_2,\cdots,a_s,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的逆序数并不改变，而 $a,b$ 两数的逆序数为：当 $a<b$ 时，$a$ 的逆序数增加 1，而 $b$ 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，$a$ 的逆序数不变，而 $b$ 的逆序数减少 1.所以，排列 $a_1a_2\cdots a_sab\,b_1b_2\cdots b_m$ 与 $a_1a_2\cdots a_sbab_1b_2\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

对排列 $a_1\cdots a_sab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 做 $m$ 次相邻对换，变成 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_mc_1\cdots c_n$，再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1a_2\cdots a_sbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$.总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，可以把排列 $a_1\cdots a_sa\,b_1\cdots b_mb\,c_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_sbb_1\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$.所以，这两个排列的奇偶性相反.□

### 1.1.2 行列式的定义

行列式的概念源于对线性方程组的研究.

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

现在讨论方程组(1)的求解公式.对(1)作加减消元得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

由 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

式(2)就是方程组(1)的求解公式.但式(2)不易记忆，因而有必要引进新的符号表示式(2).这就是行列式的起源.我们看到 $x_1,x_2$ 的表达式中分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，$x_1$ 的表达式的分子是将 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 中的 $a_{11},a_{21}$ 分别用 $b_1,b_2$ 代替而成，$x_2$ 的表达式的分子是将 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 中的 $a_{12},a_{22}$ 分别用 $b_1,b_2$ 代替而成。于是，只要把分母的结构搞清楚，那么 $x_1,x_2$ 的结构也就搞清楚了.

设 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 是任意四个数，称代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为**二阶行列式**，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

称 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 为这个行列式的**元素**，$a_{ij}$ 的两个下角标 $i,j$ 分别表示 $a_{ij}$ 所在的行和列的序号.

例如：$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5-4\times 2=-3.$

利用二阶行列式，线性方程组(1)的解可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

记 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则 $$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例如，对线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2=1, \\ -x_1+2x_2=1. \end{cases}$$

由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3\times 2-5\times(-1)=11\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\times 2-5\times 1=-3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3\times 1-1\times(-1)=4.$$

所以

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{3}{11}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{4}{11}. \end{cases}$$

为了得出关于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的类似解的表达式,我们引入三阶行列式.称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{3}$$

为三阶行列式.

例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\times1\times0 + 0\times2\times2 + 4\times1\times1 - 3\times2\times1 - 0\times1\times0 - 4\times1\times2 = -10.$$

利用三阶行列式,可以把一类三元线性方程组的解表示成简洁的形式.例如,设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则该方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

由三阶行列式的定义容易看出：

1．式(3) 等号后共有 3!项.

2．式(3) 等号后的每一项恰是三个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$．如果将行指标按自然次序排成 123,则这三个元素的列指标排成 $p_1p_2p_3$，它是 1,2,3 的排列．因此,等号右边恰好是所有位于不同行、不同列的 3 个元素之积的代数和．

3．式(3) 等号后各项的正负号由列指标排列的奇偶性决定(此时行指标按自然次序排列)．对应的列指标的排列分别是 123,312,231 时,它们都是偶排列,取正号;对应的列指标的排列分别是 132,213,321 时,它们都是奇排列,取负号．

至此,可将行列式的概念推广到 $n$ 阶．

**定义 1.1** 设 $n^2$ 个数,排成 $n$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{4}$$

其中 $a_{ij}$ 是第 $i$ 行第 $j$ 列的数(称为元素)．每取由 1 至 $n$ 的一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$，做 $n$ 个元素 $a_{1p_1},a_{2p_2},\cdots,a_{np_n}$ 的乘积,并冠以符号 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}$，得到一项

$$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

这样的项共有 $n!$个．称这 $n!$项的和为与表(4) 相对应的 **$n$ 阶行列式**[①],记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中“$\sum$”是对所有 $n$ 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 取和．也可把行列式简记作 $\triangle(a_{ij})$．

因此,表(4) 所对应的行列式是 $n!$项的代数和．这些项是一切可能的取自表(4) 的不同行、不同列的 $n$ 个元素的乘积．其一般项为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时,此项取负号;当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时,此项取正号．

由定义可知,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

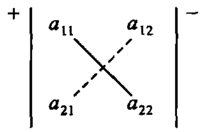
与前面的定义是一致的．

---

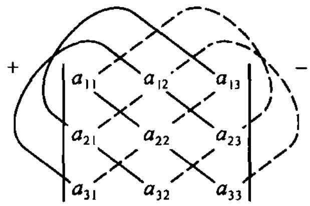
① 行列式的概念起源于十七世纪九十年代．

当 $n = 1$ 时,一阶行列式 $|a| = a$,不要与绝对值记号混淆.

仔细观察二阶行列式的定义,可以看出,二阶行列式的各项可按下面的对角线法则求出:




同样三阶行列式的各项也可按下面的对角线法则求出:




但是,阶数大于 3 的行列式没有类似的对角线法则.

显然,若行列式 $D$ 的某行(列)的元素全是零,则一般项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = 0$,故此行列式为零.

**例 2** 证明四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

**证** 这是一个四阶行列式,应有 $4! = 24$ 项.在每项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$ 中,只要有一个元素等于零,乘积就是零,所以只需计算乘积中不出现零的项.由于第 4 行中元素除了 $a_{44}$ 外都是 0,故只需取 $p_4 = 4$,第 3 行元素除了 $a_{33}, a_{34}$ 外都是 0,现已取 $p_4 = 4$,故只需取 $p_3 = 3$.同理,只需取 $p_2 = 2, p_1 = 1$.于是这个行列式的展开式中不为 0 的乘积只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,而排列 1234 的逆序数是 0,所以这一项所带的符号是正的.因此,该行列式等于 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. □

同理可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

称这种主对角线(从左上角到右下角这条线)以下(上)的元素都是0的行列式为**上(下)三角形行列式**.类似于上三角形行列式,还有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{t(n,n-1,\cdots,2,1)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

在行列式的定义中,为方便,我们将 $n$ 个元素的行指标按自然次序排列.事实上,数的乘法是可交换的,因而这 $n$ 个元素的次序是可以任意排列的.一般地,$n$ 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{5}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的两个排列.利用定理1.1可以证明,$n$ 阶行列式中,项(5)前面的符号等于

$$(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

事实上,对换 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中任两个数后,由于 $t(i_1i_2\cdots i_n)$ 和 $t(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性同时改变,所以 $t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性不变,从而 $(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}$ 不变.经一系列对换,可将 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 变成 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,于是

$$(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)} = (-1)^{t(1\,2\,3\,\cdots\,n)+t(p_1p_2\cdots p_n)} = (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)},$$

故由 $n$ 阶行列式的定义知,$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 前面的符号等于 $(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}$.

特别地,项 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 前面的符号等于 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}$.于是 $n$ 阶行列式的定义又可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}. \tag{6}$$

我们定义的行列式中的元素是数,事实上,可以将其推广成元素是某些其他数学对象的情形.例如,可以同样地定义元素是多项式的行列式.

## 1.2 行列式的性质

设
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

记
$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $D'$是这样得到的:把 $D$ 中第 $i$ 行作为$D'$的第 $i$ 列.这就是说 $D'$的第 $i$ 行第 $j$ 列处的元素恰为$D$ 的第$j$ 行第 $i$ 列处的元素.

称 $D'$为行列式$D$ 的**转置行列式**.

**性质 1.1** 行列式与它的转置行列式相等.

**证** 记 $b_{ij}=a_{ji}, i, j=1,2,\cdots,n$,则由式(6)可得

$$\begin{aligned} D' &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum(-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \\ &= D. \end{aligned}$$

性质 1.1 表明,对于行列式而言,关于“行”成立的性质,对于“列”也同样成立,反之亦然.

**性质 1.2** 互换行列式的两行(列),行列式变号.

**证** 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$