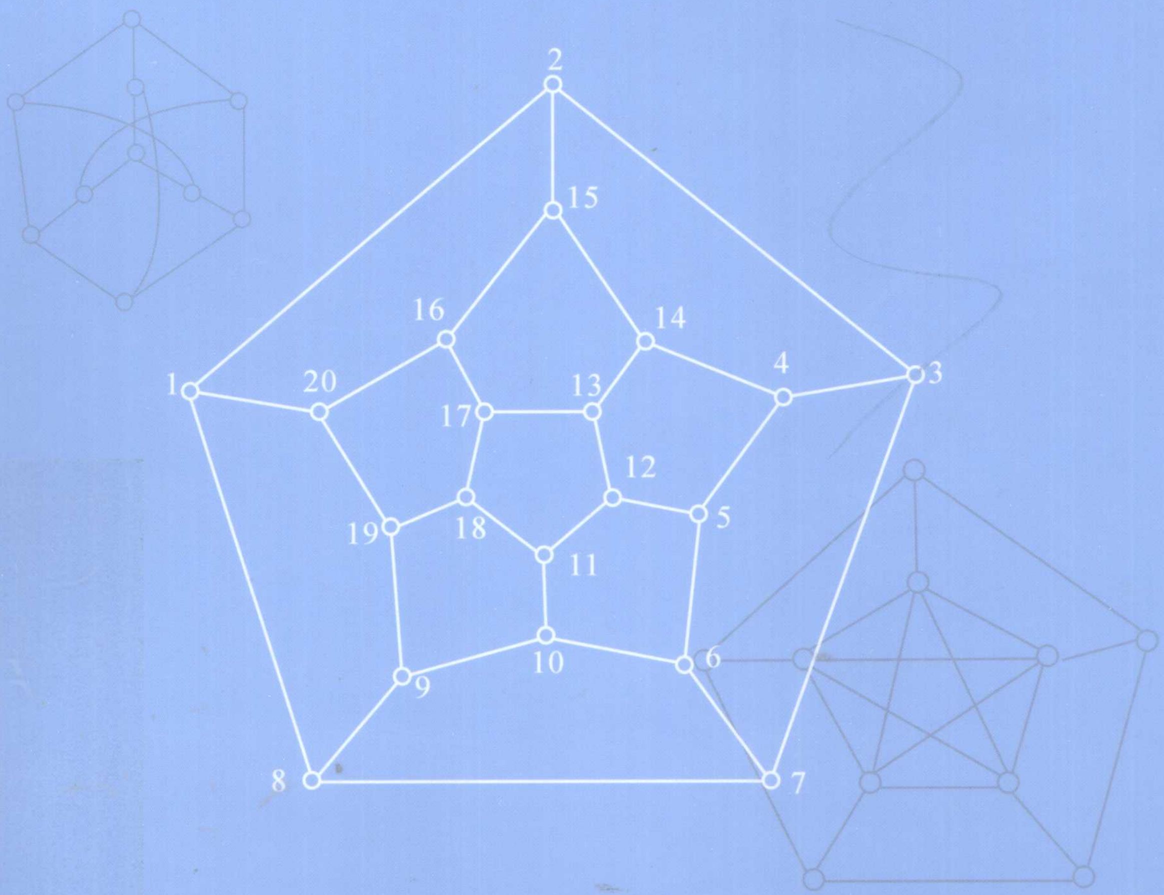
中国地质大学（武汉）“十一五”规划教材

离散数学

LISAN SHUXUE

蔡之华 薛思清 吴 杰 编著



中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

中国地质大学(武汉)“十一五”规划教材

LISAN SHUXUE

离散数学

蔡之华　薛思清　吴　杰　编著

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

内 容 简 介

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机类专业的重要基础课程. 本书全面介绍了离散数学的主要内容，即数理逻辑初步、集合论、代数结构、图论等基本内容，并对离散数学的应用进行了初步介绍。

本书适合于高等院校理工科计算机类学生作专业基础课教材，也适合有关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/蔡之华，薛思清，吴杰编著. —武汉：中国地质大学出版社，2008. 9
ISBN 978-7-5625-2281-2

Ⅰ. 离…
Ⅱ. ①蔡…②薛…③吴…
Ⅲ. 离散数学-高等学校-教材
Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 122422 号

离散数学 蔡之华 薛思清 吴 杰编著

责任编辑：方 菊 张晓红 责任校对：戴 莹

出版发行：中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号) 邮政编码：430074
电 话：(027)67883511 传真：67883580 E-mail：cbb @ cug. edu. cn
经 销：全国新华书店 http://www. cugp. cn

开本：787 毫米×1092 毫米 1/16 字数：430 千字 印张：16. 625
版次：2008 年 9 月第 1 版 印次：2008 年 9 月第 1 次印刷
印刷：武汉教文印刷厂 印数：1—3 000 册

ISBN 978-7-5625-2281-2 定价：33. 00 元

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机类专业的重要基础课程。它以研究离散量的结构及其相互间的关系为主要目标，其研究对象一般是有限个或可数个元素，因此离散数学可以充分描述计算机学科离散性的特点。由于离散数学在计算机科学中的重要作用，国内外几乎所有大学的计算机类专业的教学计划中都将其列为核心课程进行重点建设，它是其他骨干课程，如数据结构、操作系统、人工智能、计算机网络、软件工程、编译原理等的先修课程，国内许多大学将其作为计算机专业类研究生入学考试的内容。学生通过离散数学的学习可以使其抽象思维能力和逻辑推理能力得到提高。

十几年前，我校离散数学教学小组曾编写了《离散数学》教材。在十多年的教学过程中，我们发现，有一些学生对这门课程产生厌学情绪，并且认为离散数学对计算机软件及硬件系统的设计和开发没有直接的指导作用。产生这种情况的因素固然很多，但教材内容与计算机学科特点相互脱离是其中的一个重要原因。早期的教材主要由长期担任数学专业教学的教师编写，内容的陈述以纯数学的方式进行，在概念的背景和举例等方面缺乏与计算机应用的相关介绍，学生无法从抽象的概念和性质中理解离散数学与计算机科学的关系。

本书全面介绍了离散数学的主要内容，即数理逻辑初步、集合论、代数结构、图论等基本内容，并对离散数学的应用进行了初步介绍。

全书由蔡之华、薛思清、吴杰编写，曾三友、赵曼、童恒建、李向、王改芳、谷淑化等参加了部分文字的录入和校订工作。

由于编者水平所限，不当之处在所难免，欢迎读者批评指正。

作者

2008 年 7 月 15 日

目　　录

第 1 章　命题逻辑

逻辑学是研究推理过程规律的一门科学．数理逻辑则是用数学的方法研究思维规律的一门学科．由于它使用了一套符号，简洁地表达出各种推理的逻辑关系，因此数理逻辑又称为符号逻辑或理论逻辑．

数理逻辑和计算机的发展有着密切的联系，它为机器证明、自动程序设计、计算机辅助设计等计算机应用和理论研究提供了必要的理论基础．

数理逻辑的主要分支包括公理化集合论、证明论、递归函数论、模型论等．从本章开始，我们用三章的篇幅介绍数理逻辑的基本内容：命题逻辑、谓词逻辑和非经典逻辑简介．

命题逻辑研究的是以原子命题为基本单位的推理演算，其特征在于，研究和考查逻辑形式时，我们把一个命题只分析到其中所含的原子命题成分为止．通过这样的分析可以显示出一些重要的逻辑形式，这种形式和有关的逻辑规律就是命题逻辑．

1.1　命题与联结词

1.1.1　命题与命题变元

语言的单位是句子．句子可以分为疑问句、祈使句、感叹句与陈述句等，其中只有陈述句能分辨真假，其他类型的句子无所谓真假．

定义 1.1　能够分辨真假的陈述句叫做**命题**(Proposition).

从这个定义可以看出命题有两层含义．①命题是陈述句．其他的语句，如疑问句、祈使句、感叹句均不是命题.②这个陈述句表示的内容可以分辨真假，而且不是真就是假，不能不真也不假，也不能既真又假．

作为命题的陈述句所表示的判断结果称为命题的**真值**，真值只取两个值：真或假．凡是与事实相符的陈述句是真命题，而与事实不符合的陈述句是假命题．通常用 1(或大写字母 T)表示真，用 0(或大写字母 F)表示假．

例 1.1　判断下列语句是否为命题，并指出其真值．

(1)北京是中国的首都．

(2)5 可以被 2 整除．

(3)$2+2=5$.

(4)请勿吸烟．

(5)乌鸦是黑色的吗？

(6)这个小男孩多勇敢啊！

(7)地球外的星球上存在生物．

(8)我正在说谎．

解　(1)～(3)是命题，其中(1)是真命题，(2)(3)是假命题．值得注意的是，像 $2+2=5$ 这

样的数学公式也是一个命题．事实上，一个完整的数学公式与一个完整的陈述句并没有什么本质的差异．

(4)是祈使句，(5)是疑问句，(6)是感叹句，因而这三个句子都不是命题．

(7)是命题，虽然目前我们无法确定其真值，但它们的真值客观存在，而且是唯一的，随着科技的发展，不久的将来就会知道其真值．因此一个语句本身是否能分辨真假与我们是否知道它的真假是两回事．也就是说，对于一个句子，有时我们可能无法判定它的真假，但如果它本身是有真假的，那么这个语句是命题，否则就不是命题．

(8)不是命题，若(8)的真值为真，即"我正在说谎"为真，则(8)的真值应为假；反之，若(8)的真值为假，即"我正在说谎"为假，也就是"我正在说真话"为真，则又推出(8)的真值应为真．可见(8)的真值无法确定，它显然不是命题．像(8)这样由真推出假，又由假推出真的语句叫悖论．凡是悖论都不是命题． ■

涉及命题的逻辑领域称为**命题逻辑**(Propositional Logic)或**命题演算**(Propositional Calculus)．它最初是在2300年前由古希腊哲学家亚里士多德(Aristotle)系统创建的．亚里士多德曾师从柏拉图，但他的哲学思想与柏拉图有很大的不同．与柏拉图相比，亚里士多德更注重实际，研究问题更注重提出疑难，注重多方面收集材料、尝试和探索．他的著作可分为两大类：一是他生前公开发表供一般人阅读的，用的是对话体，这类著作大部分已经散失，只有一些片段流传到今天；另一类作品朴素无华，推论严谨，大概是亚里士多德的讲授提纲、研究札记或学生的听讲笔记，此类保存下了一部分．

命题可以分为两类：一类是原子命题，一类是复合命题．所谓**原子命题**(Atomic Proposition)，是指不能再分解为更简单命题的命题；所谓**复合命题**(Compound Proposition)是指由若干命题用联结词组成的新命题．例如"雪是白的"是原子命题；"昨天下雨，而且打雷""如果明天天晴我就去打球或者游泳"都是复合命题．

为了对命题进行逻辑演算，需要将论述或推理中的各种要素都符号化，即构造各种符号语言来代替自然语言，我们称完全由符号所构成的语言为**形式语言**(Formal Language)，并约定用大写字母 P,Q,R,S,T 等表示命题，字母也可以带下标．例如，用 P 表示"北京是中国的首都"，Q 表示"5 可以被 2 整除"等．当 P 表示任一命题时，P 就称为命题变元，有如下的定义．

定义 1.2 真值确定的原子命题称为**命题常元**(Propositional Constant)，真值不确定的原子命题称为**命题变元**(Propositional Variable)．

如果命题符号 P 代表命题常元，则意味它是某个具体命题的符号化；如果 P 代表命题变元，则意味着它可指代任何具体命题．本书中如果没有特别指明，通常用命题符号 P 等表示命题变元，即可指代任何命题．

1.1.2 命题联结词及真值表

在数理逻辑中，最重要最常用的命题联结词(Propositions Conjunction)有五个，下面分别予以介绍．

1. 否定词"$\neg$"

否定词(Negation)是一元联结词．设 P 表示一个命题，那么 $\neg P$ 表示命题 P 的否定．$\neg P$ 读作"非 P"．若 P 为真时，则 $\neg P$ 为假；若 P 为假时，则 $\neg P$ 为真．P 与 $\neg P$ 间的真值关系，用表 1.1 来表示，这个表称为真值表．

表 1.1 否定词的真值表

P	$\neg P$
0	1
1	0

日常用语中的“非”“不”“无”“没有”等均可用否定词表示. 但要注意,否定词是否定命题的全部,而不是部分. 例如,设 P 表示命题“雪是白的”,则“并非雪是白的”“雪不是白的”应表示为 $\neg P$,此时 $\neg P$ 为假,因为 P 为真.

2. 合取词“$\wedge$”

表 1.2 合取词的真值表

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

合取词(Conjunction)是二元联结词. 设 P,Q 表示两命题,那么 $P\wedge Q$ 表示合取 P 和 Q 所得的命题,即 P 和 Q 同时为真时 $P\wedge Q$ 为真,否则 $P\wedge Q$ 为假. $P\wedge Q$ 读作“P 合取 Q”或“P 并且 Q”. 合取词 $\wedge$ 的意义和命题 $P\wedge Q$ 的真值状况由表 1.2 给出.

日常用语中的“与”“和”“也”“并且”“而且”“既……,又……”“一面……,一面……”等可用合取词表示. 例如,设 P 表示命题“你去了学校”,Q 表示命题“我去了工厂”,则 $P\wedge Q$ 表示命题“你去了学校并且我去了工厂”. $P\wedge Q$ 为真,当且仅当你、我分别去了学校和工厂.

需要注意的是,并非命题中所有出现的“与”或“和”就一定使用合取词,而是要看它在命题中的含义. 例如,“张三和李四是同学”就不是一个复合命题,虽然命题中也使用了联结词“和”,但这个联结词“和”是联结该句主语的,而整个句子仍是简单命题,因此只能用一个命题变元 P 表示.

3. 析取词“$\vee$”

表 1.3 析取词的真值表

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

析取词(Disjunction)是二元联结词. 设 P,Q 表示两命题,那么 $P\vee Q$ 表示 P 和 Q 的析取,即当 P 和 Q 有一个为真时,$P\vee Q$ 为真,只有当 P 和 Q 均为假时,$P\vee Q$ 为假. $P\vee Q$ 读作“P 析取 Q”或“P 或者 Q”. 析取词 $\vee$ 的意义及复合命题 $P\vee Q$ 的真值状况由表 1.3 给出.

日常用语中的“或”“要么……要么……”等可用析取词表示. 例如,设 P,Q 分别表示“今晚我看书”和“今晚我去看电影”,则 $P\vee Q$ 表示“今晚我看书或者去看电影”. 当我于当晚看了书,或者看了电影,或者既看了书又看了电影时,$P\vee Q$ 为真,只是在我既没看书也没看电影时,$P\vee Q$ 为假.

需要注意的是,析取词“$\vee$”与日常语言中的“或”并不完全相同. 后者既可表示“排斥或”,又可表示“可兼或”,而数理逻辑中的析取词“$\vee$”仅指“可兼或”. 例如,“选修过微积分或计算机科学的学生可以选修本课程.”这句话中的“或”表达的即是“可兼或”. 若餐馆的菜单上写着“米饭或面条,加一道小菜”. 一般这都表示顾客可以选择米饭,也可以选择面条,但不是既选米饭又选面条时,才加一道小菜. 因此,这里“或”是“排斥或”而不是“可兼或”.

4. 蕴含词“$\rightarrow$”

表 1.4 蕴含词的真值表

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

蕴含词(Implication)是二元联结词. 设 P,Q 表示两命题,那么 $P\rightarrow Q$ 表示命题“如果 P,那么 Q”. 当 P 真而 Q 假时,命题 $P\rightarrow Q$ 为假,否则均认为 $P\rightarrow Q$ 为真. $P\rightarrow Q$ 中的 P 称为蕴含前件,Q 称为蕴含后件. $P\rightarrow Q$ 的读法较多,可读作“P 蕴含 Q”“若 P 则 Q”“如果 P,那么 Q”“P 是 Q 的充分条件”“Q 是 P 的必要条件”等等. 数学中还常把 $Q\rightarrow P$,$\neg P\rightarrow$

$\neg Q, \neg Q \to \neg P$ 分别叫做 $P \to Q$ 的逆命题，否命题，逆否命题．蕴含词"$\to$"的意义及复合命题 $P \to Q$ 的真值状况由表 1.4 给出．

日常用语中的"若……则……""如果……那么……""只有……才……"等可用蕴含词表示. 例如，设 P 表示"我有车"，Q 表示"我去接你"，则 $P \to Q$ 表示命题"如果我有车，那么我去接你". 当我有车时，若我去接了你，这时 $P \to Q$ 为真；若我没去接你，则 $P \to Q$ 为假．当我没有车时，我无论去或不去接你均未食言，此时认定 $P \to Q$ 为真是适当的．

需要注意的是，$P \to Q$ 中的 P,Q 可以没有任何关系，只要 P,Q 为命题，$P \to Q$ 就有意义．例如"如果 $2+2=5$，那么雪是黑的"，就是一个有意义的命题，且据定义其值为"真". 蕴含词的这种规定形式，在讨论数学问题和逻辑问题时是正确的、充分的、方便的，这在日常用语中较少使用．

表 1.5　等价词的真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5. 等价词"$\leftrightarrow$"

等价词(Equivalence)或称双向蕴含词是二元联结词．设 P,Q 为两命题，那么 $P \leftrightarrow Q$ 表示命题"P 与 Q 等价""P 当且仅当 Q"，即当 P 与 Q 同真值时，$P \leftrightarrow Q$ 为真，否则为假．$P \leftrightarrow Q$ 读作"P 等价于 Q""P 当且仅当 Q""P 双向蕴含 Q". 等价词的意义及 $P \leftrightarrow Q$ 的真值状况由表 1.5 给出．

日常用语中的"等价""当且仅当""充要条件"等可用等价词表示．例如，设 P 表示命题"$\triangle ABC$ 是直角三角形"，Q 表示命题"$\triangle ABC$ 有一个角是直角"，则 $P \leftrightarrow Q$ 表示"$\triangle ABC$ 是直角三角形当且仅当$\triangle ABC$ 有一个角是直角".

为使下一节讲到的命题公式的形式更为清晰、简洁，我们给联结词规定优先级顺序：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$和$\leftrightarrow$，即 $\neg$ 的优先级最高，$\leftrightarrow$的优先级最低．

1.2　命题公式

1.2.1　命题公式与命题符号化

定义 1.3　**命题公式**(Propositional Formula)归纳定义如下：

(1)命题变元是命题公式；

(2)如果 α 是命题公式，则 $\neg\alpha$ 也是命题公式；

(3)如果 α 和 β 是命题公式，则 $\alpha\wedge\beta$，$\alpha\vee\beta$，$\alpha\to\beta$，$\alpha\leftrightarrow\beta$ 均是命题公式；

(4)只有有限次地利用(1)～(3)形成的符号串才是命题公式．

按照上述定义可知，$\neg(P\wedge Q)$，$P\to(P\vee Q)$等都是命题公式，而 $CP\to Q$，$\wedge R\to P$ 等不是命题公式．由定义可看出，命题公式归根结底是由命题变元和命题联结词组成的公式，其基本元素是命题变元和联结词．

显然，如果把公式中的命题变元代以原子命题或复合命题，则该公式便是一个复合命题．因此，对复合命题的研究可化为对公式的研究，今后我们将以公式为主要研究对象．

命题公式不是命题，只有当公式中的每一个命题变元都被赋以确定的真值时，公式的真值才被确定，从而成为一个命题．

命题逻辑里讨论的对象是命题公式，而日常生活中的推理问题是用自然语言描述的，因此要进行推理演算必须先把自然语言符号化(或形式化)为逻辑语言，即命题公式，然后再根据逻辑演算规律进行推理演算．

例 1.2 将下列用自然语言描述的命题符号化．

(1)我和他既是弟兄又是同学．

解 令 P:我和他是弟兄;Q:我和他是同学，则该语句可符号化为 $P \land Q$.

(2)我和你之间至少有一个要去海南岛．

解 令 P:我去海南岛;Q:你去海南岛，则该语句可符号化为 $P \lor Q$.

(3)如果他没来见你，那么他或者是生病了，或者是不在本地．

解 令 P:他来见你;Q:他生病;R:他在本地，则该语句可符号化为 $\neg P \to (Q \lor \neg R)$.

(4)n 是偶数当且仅当它能被 2 整除．

解 令 P:n 是偶数;Q:n 能被 2 整除，则该语句可符号化为 $P \leftrightarrow Q$. ■

从以上例子可以看出，所谓命题符号化是指把一个用自然语言叙述的命题相应地写成由命题变元、联结词和圆括号表示的命题公式．符号化应该注意下列事项：

1)确定给定句子是否为命题;

2)句子中连词是否为命题联结词;

3)要正确地表示原子命题和适当选择命题联结词．

1.2.2 命题公式的分类

设 n 元命题公式 α 中所含有的不同命题变元为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，我们把这些命题变元组成的变元组$(P_1, P_2, \cdots, P_n)$称为 α 的**变元组**，α 的变元组$(P_1, P_2, \cdots, P_n)$的任意一组确定的值都称为该公式 α 关于该变元组$(P_1, P_2, \cdots, P_n)$的**完全指派**．如果仅对变元组中部分变元赋以确定的值，其余变元没有赋以确定的值，则这样的一组值称为该公式 α 关于该变元组$(P_1, P_2, \cdots, P_n)$的**部分指派**．

例 1.3 设 $\alpha = (P \land (Q \to R)) \lor S$，其变元组为$(P, Q, R, S)$．$(P, Q, R, S) = (1, 0, 1, 1)$为 α 的完全指派，$(P, Q, R, S) = (0, 0, 1, S)$为 α 的部分指派． ■

定义 1.4 对于任一命题公式 α，凡使得 α 为真的指派，不管是完全指派还是部分指派，都称为 α 的**成真指派**;凡使得 α 为假的指派，也不管是完全指派还是部分指派，都称为 α 的**成假指派**．

例 1.4 设 $\alpha = (P \to (Q \land R)) \lor (\neg R \land S)$，则完全指派$(P, Q, R, S) = (0, 1, 0, 1)$和部分指派$(P, Q, R, S) = (0, 1, 0, S)$都是 α 的成真指派，而指派$(P, Q, R, S) = (1, 0, 1, 0)$为 α 的成假指派． ■

定义 1.5 对于命题公式中命题变元的每一种可能的完全指派，以及由它们确定出的公式真值所列成的表，称为该命题公式的**真值表**(Truth Table).

定义 1.6 设 α 为命题公式，β 为 α 中的一个连续的符号串，且 β 为命题公式，则称 β 为 α 的**子公式**(Sub Formula).

例如，设公式 $\alpha = (P \lor Q) \to (P \land (Q \lor R))$，则$(P \lor Q)$，$(Q \lor R)$，$(P \land (Q \lor R))$等都是 α 的子公式，而$(P \lor Q) \to$，$(P \land (Q \lor$，$(Q \lor R))$等都不是 α 的子公式，因为它们本身不是公式．

用归纳法不难证明，对于含有 n 个命题变元的公式，有 2^n 个完全指派，即在该公式的真值表中有 2^n 行．为方便构造真值表，特约定如下．

①命题变元按英文字母顺序排列．

②对每个指派，以二进制数从小到大或从大到小顺序列出．

③若公式较复杂，可先列出各子公式的真值(若有括号，则应从里层向外层展开)，最后列出所求公式的真值．

例 1.5 利用真值表求命题公式 $\neg(P\rightarrow(Q\vee R))$ 的成真指派和成假指派．

解 命题公式 $\neg(P\rightarrow(Q\vee R))$ 的真值表如表 1.6 所示．

表 1.6 命题公式 $\neg(P\rightarrow(Q\vee R))$ 的真值表

P	Q	R	$Q\vee R$	$P\rightarrow(Q\vee R)$	$\neg(P\rightarrow(Q\vee R))$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

从表 1.6 可看出，指派(1,0,0)为成真指派，而指派(0,0,0)，(0,0,1)，(0,1,0)，(0,1,1)，(1,0,1)，(1,1,0)及(1,1,1)均为成假指派． ■

定义 1.7 设 α 为任一命题公式．

(1)若公式 α 的所有完全指派均是成真指派，则公式 α 称为**重言式或永真式**(Tautology)；

(2)若公式 α 的所有完全指派均是成假指派，则公式 α 称为**矛盾式或永假式**(Absurdity)；

(3)若公式 α 中有成真指派，则公式 α 称为**可满足式**(Contingency).

从定义不难看出以下几点．

1)α 是可满足式的等价定义为：α 至少存在一个成真指派．

2)重言式一定是可满足式，但反之不真．因而，若公式 α 是可满足式，且它至少存在一个成假指派，则称 α 为非重言式的可满足式．

3)真值表可用来判断公式的类型：

①若真值表最后一列全为 1，则公式为重言式；

②若真值表最后一列全为 0，则公式为矛盾式；

③若真值表最后一列中至少有一个 1，则公式为可满足式．

例 1.6 判断下列公式的类型．

(1)$(P\wedge Q)\rightarrow Q$.

解 令 $\alpha=(P\wedge Q)\rightarrow Q$，公式 α 的真值表如表 1.7 所示．

表 1.7 公式 α 的真值表

P	Q	$P\wedge Q$	α
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

因为公式 α 的真值表的最后一列全为 1，所以该公式为重言式．

(2) $(Q\rightarrow P)\wedge(\neg P\wedge Q)$.

解　令 $\beta=(Q\rightarrow P)\wedge(\neg P\wedge Q)$，公式 β 的真值表如表 1.8 所示．

表 1.8　公式 β 的真值表

P	Q	$Q\rightarrow P$	$\neg P\wedge Q$	β
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

因为公式 β 的真值表的最后一列全为 0，所以该公式为矛盾式．

(3) $(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg P\wedge Q\wedge R)$.

解　令 $\gamma=(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg P\wedge Q\wedge R)$，公式 γ 的真值表如表 1.9 所示．

表 1.9　公式 γ 的真值表

P	Q	R	$P\vee\neg Q$	$\neg P\wedge Q\wedge R$	γ
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

■

因为公式 γ 的真值表的最后一列至少有一个 1，所以该公式为可满足式．

从以上的讨论可知，真值表不但能准确地给出公式的成真指派和成假指派，而且能判断公式的类型．

1.3　等值演算

1.3.1　等值式

定义 1.8　设 α,β 是两个命题公式，若 α,β 构成的等价式 $\alpha\leftrightarrow\beta$ 为重言式，则称公式 α 与 β 是**等值的**(Equivalent)，记作 $\alpha\Leftrightarrow\beta$.

定义中给出的符号 $\Leftrightarrow$ 与 $\leftrightarrow$ 是两个完全不同的符号．$\Leftrightarrow$ 不是命题联结词而是公式间的关系符号，$\alpha\Leftrightarrow\beta$ 不表示一个公式，即不代表命题，它表示公式 α 与公式 β 有等值关系，而"$\leftrightarrow$"是命题联结词，$\alpha\leftrightarrow\beta$ 是一个公式，表示某个命题．然而这两者之间有密切的联系，即 $\alpha\Leftrightarrow\beta$ 的充要条件是公式 $\alpha\leftrightarrow\beta$ 为重言式．

下面讨论判断两个公式 α 与 β 是否等值的方法，其中最直接的方法是用真值表法判断 $\alpha\leftrightarrow$

β是否为重言式.

例 1.7 判断$\neg(P\vee Q)$与$\neg P\wedge\neg Q$这两个命题公式是否等值.

解 要判断$\neg(P\vee Q)$与$\neg P\wedge\neg Q$这两个命题公式是否等值,即用真值表法判断$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)$是否为重言式,此等价式的真值表如表 1.10 所示.

表 1.10 公式$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)$的真值表

P	Q	$\neg(P\vee Q)$	$\neg P\wedge\neg Q$	$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

从表 1.10 可知,$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)$是重言式,因而$\neg(P\vee Q)$与$\neg P\wedge\neg Q$等值,即$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)$. ■

虽然用真值表法可以判断任何两个命题公式是否等值,但当命题变元较多时,工作量是很大的,可以先用真值表验证一组基本的又是重要的等值式,以它们为基础进行公式之间的演算,来判断公式之间是否等值.下面给出 16 组重要的等值式(在后面的推理演算中以大写字母 E 加以引用),这些等值式也称作**命题定律**(Propositions Laws),其正确性可以用真值表加以证明.下面公式中α,β,γ均为任意的命题公式.

(1)双重否定律

$$\alpha\Leftrightarrow\neg(\neg\alpha)$$

(2)等幂律

$$\alpha\Leftrightarrow\alpha\vee\alpha,\ \alpha\Leftrightarrow\alpha\wedge\alpha$$

(3)交换律

$$\alpha\vee\beta\Leftrightarrow\beta\vee\alpha,\ \alpha\wedge\beta\Leftrightarrow\beta\wedge\alpha$$

(4)结合律

$$(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\Leftrightarrow\alpha\vee(\beta\vee\gamma),\ (\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Leftrightarrow\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$$

(5)分配律

$\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\Leftrightarrow(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$ ($\vee$对$\wedge$的分配律)

$\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\Leftrightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$ ($\wedge$对$\vee$的分配律)

(6)德摩根律

$$\neg(\alpha\vee\beta)\Leftrightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta,\ \neg(\alpha\wedge\beta)\Leftrightarrow\neg\alpha\vee\neg\beta$$

(7)吸收律

$$\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)\Leftrightarrow\alpha,\ \alpha\wedge(\alpha\vee\beta)\Leftrightarrow\alpha$$

(8)零一律

$$\alpha\vee 1\Leftrightarrow 1,\ \alpha\wedge 0\Leftrightarrow 0$$

(9)同一律

$$\alpha\vee 0\Leftrightarrow\alpha,\ \alpha\wedge 1\Leftrightarrow\alpha$$

(10)排中律

$$\alpha\vee\neg\alpha\Leftrightarrow 1$$

(11)矛盾律

$$\alpha \wedge \neg\alpha \Leftrightarrow 0$$

(12)蕴含等值式

$$\alpha \to \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$$

(13)假言易位

$$\alpha \to \beta \Leftrightarrow \neg\beta \to \neg\alpha$$

(14)等价等值式

$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha),\ \alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

(15)等价否定等值式

$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta$$

(16)归谬论

$$(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \neg\beta) \Leftrightarrow \neg\alpha$$

下面证明蕴含等值式，其余类似．

例 1.8 证明蕴含等值式 $\alpha \to \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$.

证明 列出公式 $\alpha \to \beta$ 和公式 $\neg\alpha \vee \beta$ 的真值表如表 1.11 所示．

表 1.11 公式 $\alpha \to \beta$ 和公式 $\neg\alpha \vee \beta$ 的真值表

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \to \beta$	$\neg\alpha \vee \beta$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

从表 1.11 中可以看出，公式 $\alpha \to \beta$ 与公式 $\neg\alpha \vee \beta$ 所标记的列完全相同，因此 $\alpha \to \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$. ■

1.3.2 等值演算及几个重要定理

由已知的等值式可以推演出更多的等值式，我们把由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程称为**等值演算**(Equivalent Calculus). 等值演算是数理逻辑和布尔代数的重要组成部分．

定义 1.9 设 α 是一个命题公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是其中出现的所有命题变元．

(1)用某些公式代换 α 中的某些命题变元；

(2)若用公式 A 代换 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$，则必须用 A 代换 α 中所有的 P_i.

那么，由此而得到的新公式 β 叫做公式 α 的一个**代换实例**(Substitute Instance).

例如，设公式 $\alpha = P \to (R \wedge P)$ 用 $Q \leftrightarrow S$ 代换其中 P，可得公式 $\beta = (Q \leftrightarrow S) \to (R \wedge (Q \leftrightarrow S))$，公式 β 是 α 的一个代换实例．

显然，重言式的代换实例仍是一个重言式．因为重言式的真值与命题变元的真值无关，对任何指派，它的真值总为 1，即重言式的值不依赖于命题变元值的变化．因此，对命题变元以任何公式代入后，得到的仍是重言式．由此得到下面的重要定理．

定理 1.1(代入定理) 对于重言式中的任一命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，得到的仍是重言式． ■

于是，若对于等值式中的任一命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，则仍得到等

值式.

定理 1.2(置换定理) 设 A 是公式 α 的一个子公式且 $A \Leftrightarrow B$. 如果将公式 α 中的子公式 A 置换成公式 B 之后,得到的公式是 β,则 $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

证明 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是公式 α 和公式 β 中出现的全部命题变元. 因为 A 和 B 分别是 α 和 β 的子公式,所以 A 和 B 中所出现的命题变元都包含在 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 之中. 由于 $A \Leftrightarrow B$,因此对于命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的任意一组指派,A 和 B 的取值均相同,于是 α 与 β 的取值也必然相同. 按照公式等值的定义,有 $\alpha \Leftrightarrow \beta$. ■

下面比较一下代入定理和置换定理的区别,见表 1.12.

表 1.12 代入定理和置换定理的区别

项目	代入定理	置换定理
使用对象	任意重言式	任一命题公式
代换对象	任一命题变元	任一子公式
代换物	任一命题公式	任一与代换对象等值的命题公式
代换方式	代换同一命题变元的所有出现	代换子公式的某些出现
代换结果	仍为重言式	与原公式等值

有了代入定理和置换定理,我们便可以利用已知的一些公式等值式(如命题定律)推导出其他一些更复杂的公式等值式.

例 1.9 用等值演算法证明 $(P \vee Q) \rightarrow R \Leftrightarrow (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$.

证明 $(P \vee Q) \rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \vee R$ (蕴含等值式,代入定理)

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$ (德摩根律,置换定理)

$\Leftrightarrow (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$ (分配律,代入定理)

$\Leftrightarrow (P \rightarrow R) \wedge (\neg Q \vee R)$ (蕴含等值式,置换定理)

$\Leftrightarrow (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$ (蕴含等值式,置换定理) ■

例 1.10 用等值演算法判断下列公式的类型.

(1) $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$.

(2) $\neg(P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge R$.

(3) $P \wedge (((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q)$.

解 在以下的演算中不再写出所用的基本等值式,请读者自己填上.

(1) $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge P) \rightarrow Q$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q$

$\Leftrightarrow (\neg(\neg P \vee Q) \wedge \neg P) \vee Q$

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \vee Q$

$\Leftrightarrow ((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee Q$

$\Leftrightarrow (1 \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee Q$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee Q) \vee \neg P$