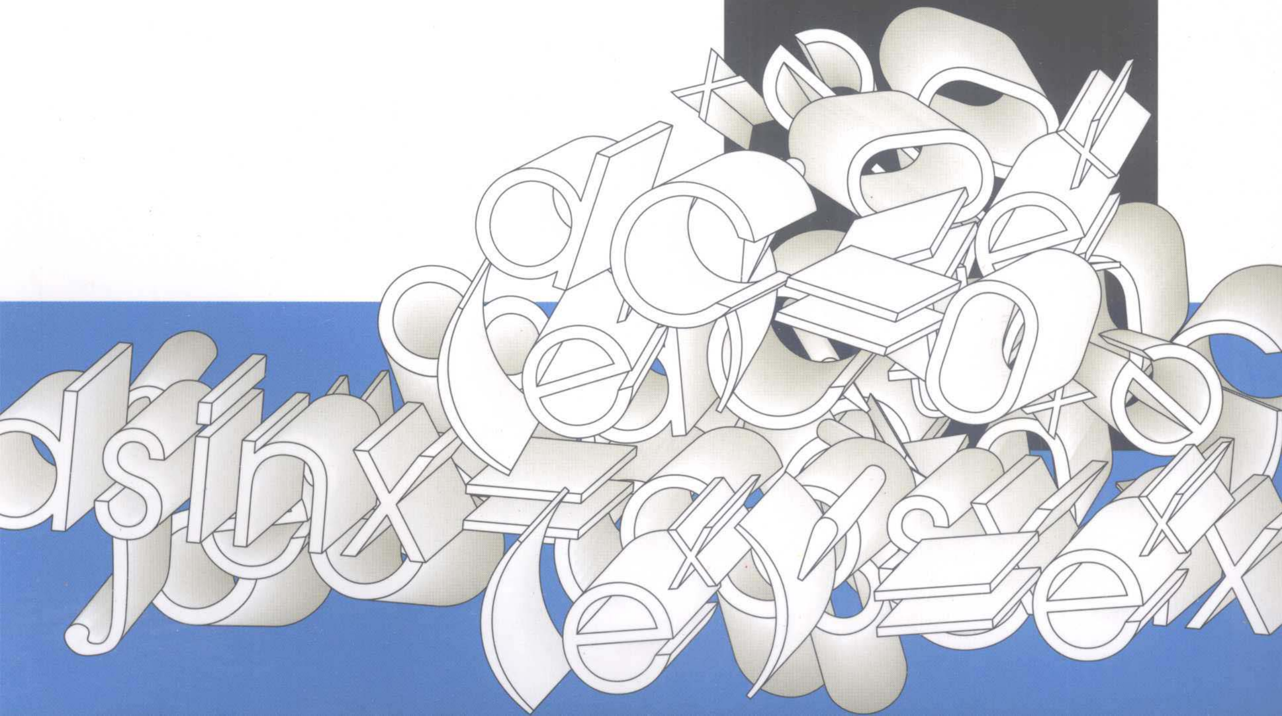
微积分

（下）

CALCULUS

主编　王国政　王婷

西南财经大学出版社



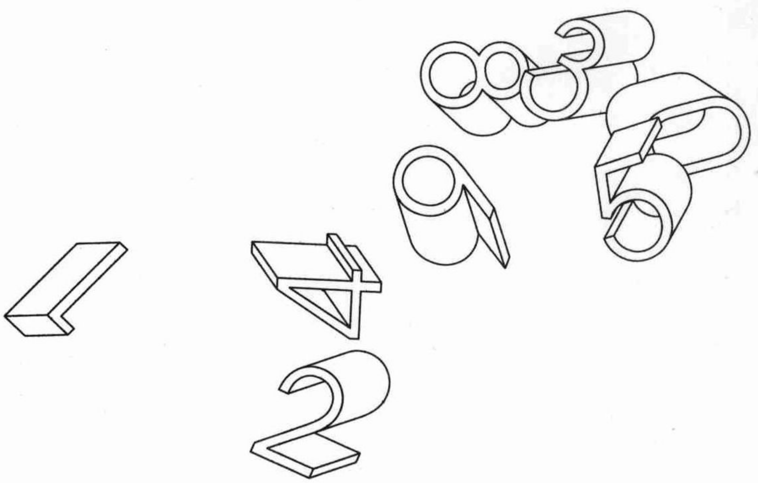
微积分

（下）

CALCULUS

主编：王国政　王　婷
编委：赵海玲　秦春艳
张高勋　周　霞
邓畏平　葛丽艳

西南财经大学出版社



图书在版编目(CIP)数据

微积分．下册/王国政，王婷主编．—成都：西南财经大学出版社，2009.1
ISBN 978-7-81138-190-0

Ⅰ.微…　Ⅱ.①王…②王…　Ⅲ.微积分—高等学校—教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第002334号

微积分(下)

主编：王国政　王婷

责任编辑：邓克虎
封面设计：穆志坚
责任印制：封俊川

出版发行：	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址：	http://www.xcpress.net
电子邮件：	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码：	610074
电　　话：	028-87353785　87352368
印　　刷：	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸：	170mm×240mm
印　　张：	12.75
字　　数：	235千字
版　　次：	2009年1月第1版
印　　次：	2009年1月第1次印刷
印　　数：	1—5000册
书　　号：	ISBN 978-7-81138-190-0
定　　价：	26.00元

前 言

高等数学是普通高等院校本、专科各专业普遍开设的一门公共基础课程。它既是学习线性代数、概率论与数理统计等后续课程的基础,也是在自然科学和经济技术等各领域中应用广泛的数学工具。本书是根据教育部颁发的《经济数学基础教学大纲》编写的,其适用性强、浅显适中,适合普通高等院校经济与管理类专业的学生使用,亦可供有志学习本课程的读者选用。

本书在编写上力求内容适度、结构合理、条理清晰、循序渐进,文字叙述方面力求简明扼要、深入浅出。

本书具有如下特点:

(1)在满足教学要求的前提下,淡化理论推导过程;

(2)语言精简严谨,篇幅较传统教材要少,但内容基本概括,且有一定的深度;

(3)章节安排符合认知规律,语言通俗易懂,既便于教师讲授,也易于学生阅读、理解;

(4)注重理论联系实际,增加了大量数学在经济等方面应用的例子,以更好地培养学生解决实际问题的能力;

(5)每一章都有丰富的练习题,便于学生练习。

本书在不定积分与定积分的处理上与其他微积分教材略有区别,主要采用由浅入深的介绍方法,尽可能让读者便于掌握。

本书的作者是长期工作在教学一线的专业教师,具有丰富的教学经验。本书编写的分工如下:本书六章分别由张高勋、赵海玲、葛丽艳、秦春艳、邓畏平、周霞编写,王国政与王婷负责统稿和全书修订工作。

编写本书的目的,是试图为一般院校经济与管理类专业的学生提供一本比较适合的教材。由于编者学识有限,加上时间仓促,本书疏漏与错误之处在所难免,恳请读者不吝批评与指正。

编者
2008 年 7 月

目　录

7　多元函数微分

一元微分学中，我们讨论的函数都只有一个自变量，但在许多实际问题中，往往要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，就是一个变量的变化可能依赖于多个其他变量的变化，由此可引入多元函数的概念.

我们将在一元函数微积分的基础上，进一步讨论多元函数的微积分学。本章主要介绍二元函数微分学. 这些概念和方法大都能推广到二元以上的多元函数.

7.1　多元函数的概念

7.1.1　平面区域的概念

与数轴上邻域的概念类似，我们引入平面上点的邻域的概念.

定义 7.1　设 $P(x_0,y_0)$ 为直角坐标平面上一点，δ 为一正数，称点集

$$\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

为点 P 的 **δ 邻域**，简记为 $U(P,\delta)$.

根据定义 7.1 可知：点 P 的 δ 邻域实际上是以点 P 为圆心、δ 为半径的圆的内部（见图 7－1）.

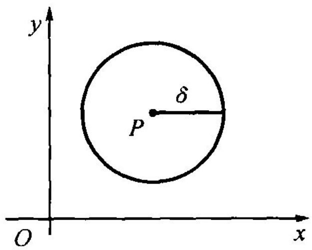


图 7－1

下面我们看平面上点与集合之间的关系.

设 D 为平面上的一个点集，P 为平面上的一个点，则点 P 与集合 D 必存在以下三种关系之一：

（1）　若存在 $\delta>0$，使得 $U(P,\delta)\subseteq D$，则称点 P 为 D 的**内点**；

（2）　若存在 $\delta>0$，使得 $U(P,\delta)\cap D=\Phi$，则称点 P 为 D 的**外点**；

(3) 若点 P 既非 D 的内点也非外点，则称点 P 为 D 的**边界点**.

D 的所有边界点所构成的集合，称为 D 的**边界**.

根据上述内容可知，点集 D 的内点必属于 D，而边界点则可能属于 D，也可能不属于 D.

定义 7.2

(1) 若点集 D 内任意一点均为 D 的内点，则称 D 为**开集**；

(2) 设 D 为开集，若对于 D 内任何两点都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 D，则称开集 D 为**连通区域**，简称**区域**或**开区域**，区域与区域的边界所构成的集合，称为**闭区域**；

(3) 对于点集 D，若存在正数 δ，使得 $D\subset U(O,\delta)$，则称 D 为**有界集**，否则称为**无界集**，这里 O 为坐标原点.

例 1 点集 $D=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是开集，也是区域，圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 均为 D 的边界.

例 2 点集 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 为闭区域，并且为有界集.

例 3 平面上的多边形、圆形都是有界区域，而无限延伸的扇形为无界区域.

7.1.2 多元函数的概念

矩形的面积公式 $A=xy(x>0,y>0)$ 描述了面积 A 与其边长 x 和 y 这两个量之间确定的关系，x 和 y 取定一对值时，就唯一确定 A 的一个值，这就是以 x 和 y 为自变量，A 为因变量的二元函数.

定义 7.3 设 D 为平面上的一个非空点集，若对于 D 内任意点 (x,y)，按照某种对应法则 f，都有唯一确定的实数 z 与之对应，则称 f 为 **D 上的二元函数**，记作

$$z=f(x,y)\quad (x,y)\in D$$

其中 x,y 称为**自变量**，z 为**因变量**，D 为该函数的**定义域**，集合 $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为该函数的**值域**.

类似地，可定义三元及三元以上的函数. 当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数统称为**多元函数**.

例 4 求函数 $z=[\sin(x^2+y^2)]^{-1}$ 的定义域.

解 根据题意知定义域为：

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq k\pi,k\in Z^+\cup\{0\}\}$$

例 5 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y-x^2}}{x^2+(y-1)^2}$ 的定义域.

解 根据题意知定义域为：

$$D=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2 \text{ 且}(x,y)\neq(0,1)\}$$

如图 7－2.

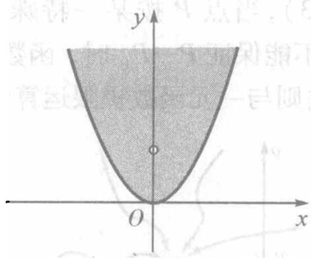


图 7-2

例 6　已知函数 $f(x+y,x-y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,求 $f(x,y)$.

解　设 $u=x+y,v=x-y$. 则

$$x=\frac{u+v}{2},y=\frac{u-v}{2}$$

所以有

$$f(u,v)=\frac{(\frac{u+v}{2})^2-(\frac{u-v}{2})^2}{(\frac{u+v}{2})^2+(\frac{u-v}{2})^2}=\frac{2uv}{u^2+v^2}$$

即

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

7.1.3　二元函数的极限与连续性

类似一元函数的情形，二元函数的极限是指当点 $P(x,y)$ 在直角坐标平面上以任何方式无限趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,对应的函数值 $f(x,y)$ 无限趋近于一个常数 A，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，严格的数学定义如下:

定义 7.4　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，A 为常数，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0)$$

也记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$$

对于二元函数的极限定义,应特别注意:

(1) $P\to P_0$ 的方式是任意的，而不局限于某一种特定路径,这比一元

函数更为复杂（见图 7－3），当点 P 按某一特殊方式趋于点 P_0 时，函数 $f(x,y)$ 的极限存在，但并不能保证 $P\to P_0$ 时，函数 $f(x,y)$ 的极限存在；

（2）求极限的运算法则与一元函数极限运算法则类似.

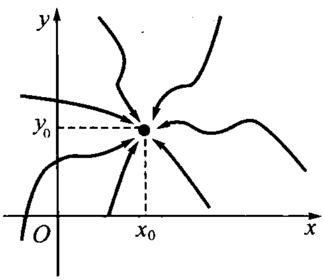


图 7－3

例 7　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,5)}\dfrac{x}{\sin xy}$.

解　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$，可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,5)}\frac{x}{\sin xy}=\lim_{(x,y)\to(0,5)}\frac{xy}{\sin xy}\cdot\frac{1}{y}$$

$$=\lim_{xy\to 0}\frac{xy}{\sin xy}\cdot\lim_{y\to 5}\frac{1}{y}=1\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$$

例 8　考查函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 $O(0,0)$ 处的极限.

解　设 $y=kx$（k 为非零常数），则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

容易得出所求函数 $f(x,y)$ 的极限随着 k 的改变而改变，因此函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 $O(0,0)$ 处的极限不存在.

与一元函数完全类似，利用二元函数的极限，不难定义二元函数的连续性.

定义 7.5　设函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)\ \text{或}\ \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**，否则，称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**间断**.

例 9 函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，在点 $O(0,0)$处间断.

解 显然函数$f(x,y)$在 $O(0,0)$处有定义，且$f(0,0)=0$. 但从例 8 已知极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$不存在，因而点 $O(0,0)$是该函数的间断点.

以上关于二元函数连续性的概念，可相应推广到多元函数上去.

若函数$f(x,y)$在区域 D 上每一点都连续，则称函数在 D 上连续. 与一元连续函数类似，在有界闭区域上的多元连续函数也有如下性质：

定理 7.1（有界性与最值原理） 有界闭区域 D 上的多元连续函数，在 D 上有界，且能取得最大值和最小值.

定理 7.2（介值定理） 有界闭区域 D 上的多元连续函数，可取得介于最大值和最小值之间的任何值.

以上定理的证明超出本书范围，故略去.

7.2 偏导数与全微分

7.2.1 偏导数

与一元函数类似，在实际问题中也需要考虑多元函数的变化率问题.

例如，对于道格拉斯(Cobb - Douglas)生产函数

$$Y=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

当考虑劳动力 L 不变的情况下，产出 Y 相对于资金 K 的变化率时，可将 Y 视为 K 的一元函数，由一元函数求导公式，可得

$$Y_K=\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}$$

类似地，考虑 K 不变时 Y 相对于 L 的变化率，将 Y 视为 L 的一元函数，则有

$$Y_L=\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}$$

这种让一个变量变化，其余变量固定不变时而得到的“导数”，称为多元函数的偏导数.

定义 7.6 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量：

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 x **的偏导数**，记为 $f_x(x_0,y_0)$，或记为$z_x\big|_{(x_0,y_0)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$.

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 y **的偏导数**，记为 $f_y(x_0,y_0)$，或记为 $z_y\big|_{(x_0,y_0)}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$.

若函数 $z=f(x,y)$ 在某一区域内每一点的偏导数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 都存在时，则称函数 $z=f(x,y)$ 在该区域内偏导数存在，分别记为：

$$f_x \text{ 或 } z_x, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, f_1$$

$$f_y \text{ 或 } z_y, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}, f_2$$

偏导数的几何意义：二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线 RPQ（见图 7－4）在空间点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线斜率；$f_y(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线 MPL（见图 7－5）在空间点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线斜率.

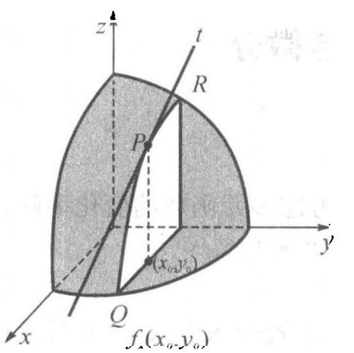


图 7－4

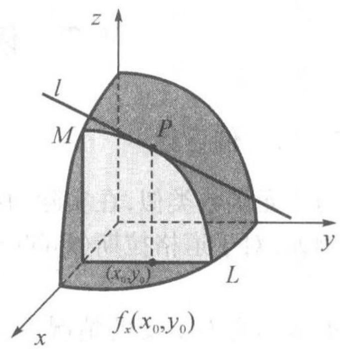


图 7－5

例 1 若函数 $z=x^2y+3y^3$，求偏导数 $z_x, z_y, z_x\big|_{(1,2)}, z_y\big|_{(1,2)}$.

解 求 z_x 时，将 y 看作常量，可得

$$z_x = 2xy + 0 = 2xy$$

所以

$$z_x\big|_{(1,2)} = 2\cdot 1\cdot 2 = 4$$

同理有

$$z_y = x^2 + 9y^2,\ z_y\big|_{(1,2)} = 1 + 36 = 37.$$

例 2 若函数 $f(x,y)=x^2\sin(xy^2)$，求偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= x^2\frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy^2)] + \sin(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\\ &= x^2\cos(xy^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \sin(xy^2)\cdot 2x\\ &= x^2\cos(xy^2)\cdot y^2 + 2x\sin(xy^2)\end{aligned}$$

$$=x^2y^2\cos(xy^2)+2x\sin(xy^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2\cos(xy^2)\cdot 2xy=2x^3y\cos(xy^2)$$

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数,例如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点(x,y,z)处的偏导数为:

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}$$

上述定义表明,在求多元函数对某个自变量的偏导数时,只需把其余自变量看作常数,然后直接利用一元函数的求导公式求导即可.

例3 若函数$f(x,y,z)=x^2+3xy+z^2$,求偏导数$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+3y+0=2x+3y$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0+3x+0=3x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0+0+2z=2z$$

定义7.7 设函数 $z=f(x,y)$ 在定义域内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$$

若二元函数 $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$ 的偏导数存在,则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**,二元函数 $z=f(x,y)$ 共有下面四种二阶偏导数:

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

其中$f_{xy}(x,y)$,$f_{yx}(x,y)$称为**混合偏导数**.

类似地,可以定义三阶、四阶……以及 n 阶偏导数,我们把二阶或二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

例4 设函数$f(x,y)=4x^3+3x^2y-3xy^2-x+y$,求$f_{xx}(x,y)$,$f_{xy}(x,y)$,$f_{yx}(x,y)$,$f_{yy}(x,y)$.

解 $f_x=12x^2+6xy-3y^2-1$

$f_y=3x^2-6xy+1$

$f_{xx}=24x+6y$

$f_{yy}=-6x$

$f_{xy}=6x-6y$

$f_{yx}=6x-6y$

由上面计算结果知:$f_{yx}(x,y)=f_{xy}(x,y)=6x-6y$,是否二阶偏导数都有此性质,关于这一点,我们有如下结论:

定理 7.3 若函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f_{yx}(x,y)$ 和 $f_{xy}(x,y)$ 在区域 D 内连续,则该区域内有 $f_{yx}(x,y)=f_{xy}(x,y)$.

例 5 求函数 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 的二阶偏导数.

解 $f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$

$f_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$

$f_{xx}=\dfrac{2(y^2-x^2)}{(x+y)^2}$

$f_{yy}=\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$f_{xy}=-\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$

$f_{yx}=-\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$

偏导数的经济意义:

与一元经济函数的导数类似,多元经济函数的偏导数也有其经济意义.

设某产品的需求量 $Q=Q(p,y)$,其中 p 为产品的价格,y 为消费者收入.

记需求量 Q 对于价格 p 和消费者收入 y 的偏改变量分别为:

$$\Delta_p Q=Q(p+\Delta p,y)-Q(p,y)$$
$$\Delta_y Q=Q(p,y+\Delta y)-Q(p,y)$$

易见,$\dfrac{\Delta_p Q}{\Delta p}$表示 Q 对价格由 p 变到 $p+\Delta p$ 的平均变化率,而

$$\frac{\partial Q}{\partial p}=\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta_p Q}{\Delta p}$$

表示当价格为 p,消费者收入为 y 时,Q 对 p 的变化率. 因此称

$$E_p=\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta_p Q/Q}{\Delta p/p}=\frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{p}{Q}$$

为需求量 Q **对价格** p **的偏弹性**.

同理称
$$E_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y Q/Q}{\Delta y/y}=\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{y}{Q}$$
为需求量 Q **对收入** y **的偏弹性**.

例 6 已知某种商品的需求量 Q 是该商品价格 p 以及消费者收入 y 的函数,表达式为:
$$Q(p,y)=\frac{1}{200}p^{-\frac{3}{8}}y^{\frac{5}{2}}$$
分别求 Q 对价格 p 和收入 y 的偏弹性.

解 由偏弹性的定义可知:
$$E_p=\frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{p}{Q}=-\frac{3}{8}$$
$$E_y=\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{y}{Q}=\frac{5}{2}$$

7.2.2 全微分

对于一元函数 $y=f(x)$,为了近似计算函数的改变量
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$$
我们引入了微分 $dy=f'(x)\Delta x$. 在 $|\Delta x|$ 比较小时, 可用 dy 近似代替 Δy,计算简单且近似程度较好.

对于二元函数也有类似的问题,若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 关于 x,y 分别有改变量 Δx 和 Δy,则函数的改变量
$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
称为**全增量**, 由此我们引入**全微分**的概念.

定义 7.8 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的改变量 Δz 可表示为
$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\end{aligned}$$
其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$,仅与 x_0,y_0 有关, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

因此,称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**可微**, $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的**全微分**, 记作 dz,即
$$dz=A\Delta x+B\Delta y$$

若函数在区域 D 内每一点处可微, 则称该函数在 D **内可微**.

关于多元函数的全微分、偏导数和连续性之间的关系,有下面三个基本定理.

定理 7.4 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微, 则该函数在点 (x,y) 的偏导数 z_x,z_y 必存在, 且有下面式子成立.
$$dz=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y=z_x\cdot\Delta x+z_y\cdot\Delta y \tag{7.1}$$

证明 由全微分定义知：

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

当 $\Delta y = 0$ 时，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta x|$，从而有

$$\Delta z = A\Delta x + o(|\Delta x|)$$

又因为

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\end{aligned}$$

所以有

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = A \cdot \Delta x + o(|\Delta x|)$$

上式两端除以 Δx，令 $\Delta x \to 0$ 并取极限得：

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{A \cdot \Delta x + o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A$$

即

$$z_x = A$$

同理可得 $z_y = B$. 定理得证.

定理 7.5 若函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则该函数在点 (x,y) 处连续.

证明 由函数可微定义知：

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

所以有

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}[A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)] = 0$$

即有

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$$

因此，函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续. 定理得证.

定理 7.6 若函数 $z = f(x,y)$ 的偏导数 z_x, z_y 在点 (x,y) 处连续，则该函数在点 (x,y) 处可微.

证明略.

由定理 7.4、定理 7.5、定理 7.6 可知，多元函数的全微分、偏导数和连续性之间，有如下的关系：

$$\text{偏导数存在且连续} \to \text{可微} \begin{cases} \nearrow \text{偏导数存在} \\ \searrow \text{连续} \end{cases}$$

与一元函数情形一样，我们记 $\Delta x = \mathrm{d}x$，$\Delta y = \mathrm{d}y$，相应地，(7.1) 式写成

$$\mathrm{d}z = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y = y_x \mathrm{d}x + z_y \mathrm{d}y$$

例 7 求函数 $z = 4xy^3 + 5x^2y^6$ 的全微分.

解 因为

$$z_x = 4y^3 + 10xy^6,\ z_y = 12xy^2 + 30x^2y^5$$

已知两个偏导数连续，由定理 7.6 知所求函数可微，所以有

$$\begin{aligned} dz &= z_x dx + z_y dy \\ &= (4y^3 + 10xy^6)dx + (12xy^2 + 30x^2y^5)dy \end{aligned}$$

例 8 求函数 $z = e^{xy}$ 在点(2,1)处的微分.

解 因为

$$z_x = ye^{xy},\ z_y = xe^{xy}$$

所以有

$$\begin{aligned} dz &= z_x dx + z_y dy \\ &= ye^{xy}dx + xe^{xy}dy \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} dz\big|_{(2,1)} &= z_x\big|_{(2,1)}dx + z_y\big|_{(2,1)}dy \\ &= e^2(dx + 2dy) \end{aligned}$$

7.3 复合函数的微分法

在一元函数的复合求导中,有所谓的“链式法则”,这一法则可以推广到多元复合函数的情形。

由 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 构成的一元复合函数 $y = f(\varphi(x))$,其求导公式为:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

对多元复合函数,也有类似的求导公式. 这里需要注意的是，因变量对自变量的导数,要通过各个中间变量达到自变量.

对于多元复合函数,先考虑最简单的情形.

设 $z = f(u,v)$ 是自变量为 u 和 v 的二元函数,而 $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ 是自变量 x 的一元函数,则

$$z = f(u,v) = f(\varphi(x), \psi(x))$$

是 x 的一元函数.

定理 7.7 设函数 $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ 在点 x 可导，而复合函数 $z = f(u,v)$ 在点(u,v)可微，则复合函数 z 对 x 可导，且有

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} \tag{7.2}$$

证明 由于函数 $z = f(u,v)$ 在点(u,v)可微，则它的全微分是

$$dz = z_u du + z_v dv = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

两端除以 dx,得