21世纪普通高等学校数学系列规划教材

高等数学学习指导

下册

陈克东 主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪普通高等学校数学系列规划教材

高等数学学习指导

下册

陈克东　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书根据高等学校工科本科高等数学课程教学基本要求，结合硕士研究生入学考试之数学考试大纲的要求编写，与陈克东主编的《高等数学·下册》教材配套。全书分上、下两册，下册内容包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程等5章。每一章均按内容提要、重点与难点、例题分析以及教材中该章部分习题的解答四部分编写，且以典型例题的分析、解法、评述为主。

本书的宗旨是指导读者同步学习高等数学，也是为了帮助读者全面系统地复习高等数学内容。本书选择的例题范围广，类型多，技巧性强，具有典型性，同时有由浅入深的讲解，以有助于读者学习高等数学课程，提高数学思维水平和应试能力。

本书适合作为高等院校各理工类专业、经济管理类专业师生的教学参考书，也可作为报考硕士研究生的辅导书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导. 下册/陈克东主编. 一北京：中国铁道出版社，2009.3
(21世纪普通高等学校数学系列规划教材)
ISBN 978-7-113-08824-8

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第028980号

书　　名：高等数学学习指导·下册
作　　者：陈克东　主编

策划编辑：李小军
责任编辑：李小军　　　编辑部电话：(010)83550579
编辑助理：徐盼欣
封面设计：付　巍　　　封面制作：白　雪
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街8号　　邮政编码：100054)
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
版　　次：2009年3月第1版　　2009年3月第1次印刷
开　　本：787mm×960mm　1/16　　印张：15.5　　字数：276千
印　　数：4000册
书　　号：ISBN 978-7-113-08824-8/O·177
定　　价：26.00元

前　言

高等数学是高等理工科院校和经济管理类院校一门十分重要的公共必修基础课,也是硕士研究生入学考试的一门国家命题的必试科目。为了指导读者同步学习高等数学,也为了帮助读者全面系统地复习高等数学内容,深刻领会高等数学的思维方法,深入理解高等数学的基本概念和基本理论,切实掌握高等数学的基本方法和解题技巧,认真培养高等数学的素质和能力,进而从总体上提高高等数学的学习水平和应试水平,编者经过长时间的酝酿,编写了这本教学参考书。

本书根据高等学校工科本科高等数学课程教学基本要求,并结合硕士研究生入学考试之数学考试大纲的要求编写。全书分上、下两册出版。下册内容包括:第8章多元函数微分学,第9章重积分,第10章曲线积分与曲面积分,第11章无穷级数,第12章常微分方程等。特别说明,《高等数学·上册》教材之第7章微积分学实验Ⅰ,《高等数学·下册》教材之第13章微积分学实验Ⅱ,由于不需要编写相应的学习指导,所以没有编写这两章的学习指导。然而,考虑到读者在教材与学习指导书之间查询的方便,这本《高等数学学习指导·下册》仍从第8章开始排序,以与我们编写的《高等数学·下册》教材相对应。每一章都按照内容提要、重点与难点、例题分析以及教材中该章部分习题的解答等四个部分编写,且以典型例题的分析、解法、评述为主,期望读者从中得到启迪,以提升其学习效果。

在高等数学的教学过程中,正面临着无法回避且日益突出的矛盾。这就是:一方面高等数学课程的教学课时普遍减少;而另一方面,高等数学课程的教学内容却在不断拓展延伸,教学要求也在相应提高。正是为了较好地解决这一矛盾,我们萌发了编写本书的想法。

在本书的编写过程中,我们努力提高编写的质量。本书既反映了编者在长期高等数学教学实践中积累的一些有益的经验,体现"数学思想方法是数学教学的灵魂"的改革创新理念,同时吸收了同类教学参考书中某些成功的做法,还考虑到读者对象的一些特点。基于此,本书对于基本概念的叙述力求深入浅出,清晰准确;对于基本方法的介绍从分析、比较切入,力求阐明数学思维方法的本质特征及其应用技巧;对

于例题的选择力求典型规范，内容覆盖面广，题型种类多；有些例题构建成组合题，有些例题给出几种解法，强调内容的融会贯通，以启迪思维，培育读者的创新能力，并且在各章的最后一节提供了主教材中部分习题的解答，供读者参阅。

本书由陈克东任主编，黄文韬、张楠任副主编。第 8 章由唐生强编写，第 9 章、第 10 章由张楠编写，第 11 章的 11.1、11.2、11.3 和第 12 章的 12.1、12.2 由陈克东编写，第 11 章的 11.4 和第 12 章的 12.3 由陈利霞编写。全书由陈克东统稿、修正、定稿。

在本书编写过程中，得到桂林电子科技大学教务处、数学与计算科学学院的热情支持，唐清干、刘翠玉、凌琳诸同志给予了不少帮助，在此特致以衷心感谢。

限于编者的水平，书中难免有错漏或不足之处，恳请同行和读者指正。

陈克东

2008 年 9 月

于桂林电子科技大学仁和苑

目　录

第 8 章

多元函数微分学

8.1 多元函数的基本概念

8.1.1 内容提要

以二元函数为例,三元及三元以上的函数与其类似.

1. 极限

设函数 $f(x,y)$的定义域为 D,点(x_0,y_0)是 D 的聚点,如果存在常数 A,对任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得适合于不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切 $P(x,y)\in D$,都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

2. 连续

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

这里的点(x_0,y_0)是 $f(x,y)$的定义域 D 的聚点,且$(x,y)\in D$. 如果函数 $f(x,y)$在 D 的每一点都连续,则称 $f(x,y)$在 D 上连续.

(1) 多元初等函数在其定义域内是连续的.

(2) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数,在 D 上一定有最大值和最小值.

(3) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数,如果在 D 上取得两个不同的函数值,则它在 D 上取得介于这两个值之间的任何值.

3. 偏导数

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对 x 的偏导数,记作 $f_x(x_0,y_0)$,$z_x(x_0,y_0)$等.

类似地,可定义

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

而高阶偏导(函)数定义为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xx}(x,y)=z_{xx},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xy}(x,y)=z_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yx}(x,y)=z_{yx},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yy}(x,y)=z_{yy}.$$

4. 全微分

$$z=f(x,y).$$

若

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho),\end{aligned}$$

其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$,而仅与点 $P_0(x_0,y_0)$ 有关,$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,$o(\rho)$ 是当 $\rho\to 0^+$ 时关于 ρ 的高阶无穷小,则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分,简称可微.

若函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处可微,则在该点处函数 $z=f(x,y)$ 对 x,对 y 的偏导数都存在,且有

$$A=\frac{\partial f}{\partial x},\quad B=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

全微分 $\mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f=A\Delta x+B\Delta y$.

5. 空间曲线 Γ

$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$的切线及法平面.

若点(x_0,y_0,z_0)对应于 $t=t_0$,且$\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不全为零,则在点$(x_0,y_0,z_0)$处:

曲线的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$;

曲线的法平面方程为 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$.

6. 曲面的切平面及线法

曲面方程为 $F(x,y,z)=0$,若在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$处 $F(x,y,z)$有连续偏导数,且不同时为零,则在该点处:

曲面的切平面方程为 $F_x'(P_0)(x-x_0)+F_y'(P_0)(y-y_0)+F_z'(P_0)(z-z_0)=0$;

曲面的法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x'(P_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y'(P_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z'(P_0)}$.

曲面方程为 $z=f(x,y)$,若在点(x_0,y_0)处 $z=f(x,y)$有连续偏导数,则在该点处:

曲面的切平面方程为 $f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)=z-z_0$;

曲面的法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.

7. 几条结论

(1)若函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微,则

①在该点处偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$存在；

②$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续.

(2)若函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处有连续的偏导数，则在点(x_0,y_0)处函数可微.

8.1.2　重点、难点

多元函数微分学的基础是一元函数微分学，几何基础是向量代数与空间解析几何.

多元函数在诸多方面不同于一元函数，这既是本节的重点也是难点．以二元函数 $z=f(x,y)$为例.

极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在，要求点$(x,y)$以任何方向趋于点$(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$都趋向于某常数.

偏导数 $f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$是否存在仅与函数 $f(x,y)$在直线 $y=y_0$上的值有关，因此偏导数存在，函数不一定连续.

全微分．函数在某点(x_0,y_0)处可微，则函数在该点处连续，且函数在该点的偏导数存在（这一点与一元函数相同），但偏导数存在，函数不一定可微分.

对具体函数求偏导数，如给出一个函数 $f(x,y)$的表达式，要求$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，只要把 y 视作 x 的一元函数对 x 求导数就可以了.

对高阶偏导数，要注意，若$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$连续，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

多元函数微分学的几何应用在于空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面与法线的概念．求空间曲线的切线及法平面，关键是求切向量．而求曲面的切平面及线法，关键是求法向量.

8.1.3　例题分析

例 1　(1) 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}$；

(2) 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}$；

(3) 证明极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x+y}$不存在.

关于多元函数求极限的问题，常见的有两种类型．其一，如本题的(1)，(2)两小题，解法为：利用多元初等函数在其定义域内的连续性，利用一元函数求极限的方法．其二，如本题的(3)小题，它不能化成一元函数求极限问题，而多元函数的极限要求(x,y)以任何方式趋于(x_0,y_0)时，极限都存在且相等.

解 (1) 二元函数 xy 处处有定义,从而处处连续,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}}=0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{1+xy}+1)}{(\sqrt{1+xy}-1)(\sqrt{1+xy}+1)}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{1+xy}+1)=2.$$

(2) 当 $xy\neq 0$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\frac{\sin xy}{x}\right|=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\frac{\sin xy}{xy}\cdot y\right|=0;$$

当 $x\neq 0, y=0$ 时,仍有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\frac{\sin xy}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin 0}{x}\right|=0.$$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|y|=0$,所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\frac{\sin xy}{x}\right|=0$.

(3) 因为

$$\lim_{\substack{x=-y\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{2y^2}{2y^2}=\lim_{y\to 0}1=1,$$

$$\lim_{\substack{x=y\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{2y^2}{2y^2+2y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y+1}=0,$$

$$\lim_{\substack{x=-y\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x+y}\neq\lim_{\substack{x=y\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x+y},$$

故极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x+y}$ 不存在.

例 2 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{当 } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{当 } x^2+y^2=0\end{cases}$$

的连续性.

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,$f(x,y)$ 连续.

当 $x^2+y^2=0$ 时,取 $x=ky^2(k\neq 0)$,并考虑

$$\lim_{\substack{x=ky^2\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{ky^4}{(k^2+1)y^4}=\frac{k}{k^2+1}.$$

因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处极限不存在,故它在点 $(0,0)$ 处不连续.

例 3 研究下列函数在点 $(0,0)$ 处是否连续?偏导数是否存在?是否可微?

(1) $z=f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{当 } xy\neq 0\\ 0 & \text{当 } xy=0\end{cases}$;

(2) $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & 当\ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & 当\ x^2+y^2=0\end{cases}$.

多元函数不同于一元函数．对一元函数来说，可导⇒连续，可导⇔可微．对多元函数来说，偏导数存在不一定连续，偏导数存在不一定可微．但可微⇒连续，偏导数存在且连续⇒可微.

解　(1) $f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续是显然的．但 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$都存在.

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=0.$$

(2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$处处有定义，处处连续，但 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$不存在．事实上，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}不存在,$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}不存在.$$

(3) $f(x,y)$处处连续.

因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$，　$\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0).$$

偏导数：
$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\Delta y\sin\frac{1}{(\Delta y)^2}=0.$$

$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，因为

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0^+}\frac{f(x,y)-xf'_x(0,0)-yf'_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0^+}\frac{(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0^+}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

但 $f(x,y)$在点$(0,0)$处的偏导数不连续，因为当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f'_x(x,y)$不存在.

例 4　(1) 设 $f(x,y)=y\sin(xy)+(1-y)\arctan x+\mathrm{e}^{-2y}$，求 $f'_x(1,0)$；

(2) 求曲线$\begin{cases}z=x^2+y^2\\y=6\end{cases}$上的点(1,6,37)处切线的斜率.

解 (1) $f(x,0)=\arctan x+1$,

$$f_x'(1,0)=\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=1}=\frac{1}{2}.$$

(2) $z=x^2+y^2$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=6}}=\left.2x\right|_{\substack{x=1\\y=6}}=2.$

该曲线的切线平行于坐标面 zOx,对 x 轴正向的斜率为 2.

例 5 (1) 设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}-\cos(xy^2)$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(2) 设 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$,其中 f 具有二阶导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

对具体的多元函数求偏导,多元抽象函数求偏导,与一元函数求导无多大区别,只要将其他变量看作常数就可以了.

解 (1) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}+y^2\sin(xy^2)$$

$$=-\frac{y}{x^2+y^2}+y^2\sin(xy^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}+2xy\sin(xy^2)$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}+2xy\sin(xy^2).$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2)+4x^2f''(x^2+y^2)$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'(x^2+y^2)+4y^2f''(x^2+y^2)$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xyf''(x^2+y^2)$.

例 6 设 $z=f(x,y)$满足:$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2y,\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}=\cos y\\f(1,y)=0\end{cases}$,求 $f(x,y)$.

解 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=-2y$,所以$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2xy+\varphi(y)$,$\varphi(y)$为 y 的任意函数.

$\frac{\partial f}{\partial x}=-2xy+\varphi(y)$，两边对 x 积分，得 $f(x,y)=-x^2y+x\varphi(y)+\psi(y)$，$\psi(y)$ 也是 y 的任意函数.

由 $\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}=\cos y=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}=\left[-2xy+\varphi(y)\right]\Big|_{x=0}=\varphi(y)$，知 $\varphi(y)=\cos y$.

由 $f(1,y)=0=f(x,y)\Big|_{x=1}=\left[-x^2y+x\varphi(y)+\psi(y)\right]\Big|_{x=1}=-y+\cos y+\psi(y)$，知 $\psi(y)=y-\cos y$.

因此，$f(x,y)=(1-x^2)y+(x-1)\cos y$.

例 7　在曲线 $x=t,y=2t^2,z=3t^3$ 上求一点，使曲线在该点处的切线平行于平面 $8x+7y-4z=1$.

解　$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4t,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=9t^2$.

曲线上切线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{1,4t,9t^2\}$，平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{8,7,-4\}$，令

$$1\times8+4t\times7+9t^2\times(-4)=0,$$

解得 $t=1$ 或 $t=-\frac{2}{9}$.

曲线上有两个点，该点处的切线平行于平面 $8x+7y-4z=1$，$t=1$ 时，对应的点是 $(1,2,3)$，$t=-\frac{2}{9}$时，对应的点是$\left(-\frac{2}{9},\frac{8}{81},-\frac{8}{243}\right)$.

例 8　设 $z=\arctan(x-y)^2$，求在点$(0,1)$处的全微分，并求曲面 $z=\arctan(x-y)^2$ 在点$\left(0,1,\frac{\pi}{4}\right)$处的切平面和法线方程.

解　$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\left.\frac{2(x-y)}{1+(x-y)^4}\right|_{(0,1)}=-1,$

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=\left.\frac{-2(x-y)}{1+(x-y)^4}\right|_{(0,1)}=1,$

$\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

切平面方程为
$$-(x-0)+(y-1)=z-\frac{\pi}{4},$$
即
$$-x+y-z+\frac{\pi}{4}-1=0.$$

法线方程为
$$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}.$$

例 9　求曲线$\begin{cases}x^2+2y^2+3z^2=3a^2\\x^2+2y^2=2ax\end{cases}$上点$\left(a,\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$处的切线和法平面方程.

解　y,z 看作x 的一元函数，由方程 $x^2+2y^2+3z^2=3a^2$ 和 $x^2+2y^2=2ax$ 两边分别对

x 求导,得

$$\begin{cases}2x+4y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\\2x+4y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2a\end{cases}.$$

解上述方程组,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a-x}{2y},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{a}{3z}.$$

在点$\left(a,\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$处有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

切线方程为
$$\frac{x-a}{1}=\frac{y-\dfrac{a}{\sqrt{2}}}{0}=\frac{z-\dfrac{a}{\sqrt{3}}}{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}.$$

法平面方程为
$$(x-a)-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(z-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=0.$$

例 10 证明曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$上任一点处的切平面在三坐标轴上的截距之和为常数.

证 设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$,则

$$F'_x=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad F'_y=\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad F'_z=\frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

过曲面上点(x_0,y_0,z_0)处曲面的切平面方程为

$$F'_x\cdot(x-x_0)+F'_y\cdot(y-y_0)+F'_z\cdot(z-z_0)=0,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}.$$

化为截距式平面方程

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1,$$

其截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a.$$

8.2 多元函数微分法

8.2.1 内容提要

1. 复合函数的微分法

(1) 如果一元函数 $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$ 都在点 t 处可导,多元函数 $z=f(u,v)$ 在相应点 (u,v) 处具有连续偏导数,则有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

(2) 如果 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处有连续偏导数, $z=f(u,v)$ 在相应点 (u,v) 处也有连续偏导数,则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

复合函数求导(或求偏导)的其他情况,有相类似的结论.

2. 隐函数微分法

以二元、三元隐函数为例加以说明.

(1) 二元隐函数 $F(x,y)=0$.

若 $F(x_0,y_0)=0$,在点 (x_0,y_0) 的某邻域内偏导数 $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ 连续,且 $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$,则在点 (x_0,y_0) 的某邻域内 $F(x,y)=0$ 唯一确定一个单值函数 $y=f(x)$,且 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

(2) 三元隐函数 $F(x,y,z)=0$.

在类似于二元函数的条件下,确定一个单值函数 $z=f(x,y)$,且 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$ $(F'_z\neq 0)$.

3. 方程组的微分法

每个方程两边对自变量求导(或求偏导),再解线性方程组.

4. 一阶微分形式不变性

例如 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 均有连续偏导数,则

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v \quad 及 \quad \mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

8.2.2 重点、难点

(1)要分清是求导数还是求偏导数;要分清是一元函数还是多元函数.

例如 $z=f(x^2+y^2)$,其中 $f(u)$ 可导,求$\frac{\partial z}{\partial x}$.此题自变量有两个:$x$ 与 y.z 是 x 与 y 的二元函数,但中间变量只有一个.而 z 也是 x^2+y^2 的一元函数,z 对 x^2+y^2 是求导,而不是求偏导.其实题中条件说得很清楚:$f(u)$ 可导.所以,$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x^2+y^2)\cdot 2x$.而$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x^2+y^2)\cdot 2x$ 是错误的,其中记号 $f_x'(x^2+y^2)$ 不正确.

对照 $z=f(x^2,y^2)$,其中 $f(u,v)$ 有一阶连续偏导数,求$\frac{\partial z}{\partial x}$.此题中间变量有两个,自变量也有两个,$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x$,或记为$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x$.

(2)一些读者对抽象函数求一阶偏导尚能掌握,但对求二阶及三阶等偏导数掌握得甚差.其实若能掌握求一阶偏导,则就不难掌握求二阶偏导数,甚至可以把结果直接写出来.

(3)要熟练掌握由一个方程多个变量和两个方程多个变量所确定的隐函数的求偏导数的计算方法.

(4)隐函数求偏导数的计算可以归结为复合函数求偏导.计算前,首先要明确函数关系:哪些是自变量,哪些是因变量.一般来说,有几个方程就确定几个因变量,其余的都是自变量.至于哪些是自变量或哪些是因变量,这只能由题目本身确定.

8.2.3 例题分析

例 1 求函数 $z=(x^2+y^2)^{xy}$ 的一阶偏导数.

引入中间变量,利用复合函数求导法则,能方便地求出此类函数的一阶偏导数.

解 令 $u=x^2+y^2$,$v=xy$,则 $z=u^v$.

因此
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}\frac{\partial u}{\partial x}+u^v(\ln u)\frac{\partial v}{\partial x}\\&=2x^2y(x^2+y^2)^{xy-1}+y(x^2+y^2)^{xy}\ln(x^2+y^2),\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}\frac{\partial u}{\partial y}+u^v(\ln u)\frac{\partial v}{\partial y}\\&=2xy^2(x^2+y^2)^{xy-1}+x(x^2+y^2)^{xy}\ln(x^2+y^2).\end{aligned}$$

例 2 求下列函数的一阶、二阶偏导数,所给的函数均有连续的二阶偏导数.

(1) $z=f(u,v)$,$u=x^2y$,$v=3x^2-2y^2$;

(2) $z=f\left(\frac{x^2}{y},3y\right)$.

利用复合函数求导法则,注意$\frac{\partial f}{\partial u}=f_u'$等仍是复合函数.