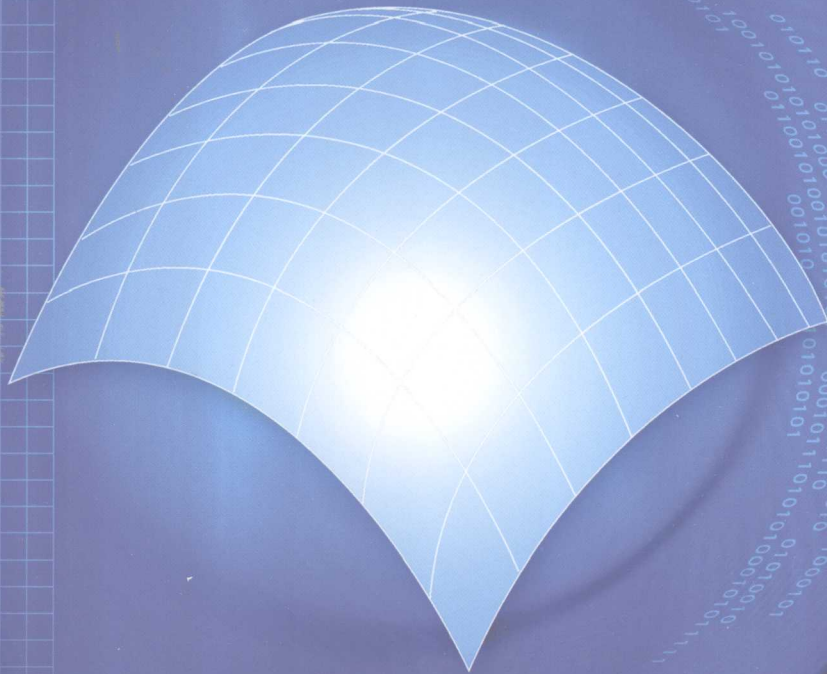




地球观测与导航技术丛书

轨道力学

[美] Howard D. Curtis 著
周建华 徐波 冯全胜 译



科学出版社

www.sciencep.com

地球观测与导航技术丛书

轨道力学

〔美〕 Howard D. Curtis 著
周建华 徐波 冯全胜 译

科学出版社

北京

图字:01-2009-6025 号

Orbital Mechanics for Engineering Students, First Edition

Howard D. Curtis

Copyright © 2005, Howard D. Curtis. Published by Elsevier. All rights reserved.

内 容 简 介

本书系统地介绍了航天器轨道力学及其相关知识,主要内容包括:二体问题、轨道的描述、初始轨道确定、轨道机动、空间交会、行星际轨道、卫星姿态动力学和火箭动力学等方面。全书内容丰富、理论体系严谨,物理图像清晰并配以大量通俗易懂的例题和生动形象的插图加以说明,同时对一些可用于工程实践的常用算法进行了高度的概括与归纳,并对重点、难点处加以详尽的解释与说明。此外,对于读者而言,书后附录所给出的一些航天轨道方面常用算法的 MATLAB 实现亦是一笔不可多得的财富。

本书可作为高等院校相关专业的教材或参考书,也可供相关技术人员参考。

对于学生:附录 D 中 MATLAB 程序的备份可通过网上访问公司主页下载完成。登陆网址 <http://books.elsevier.com/companions> 根据屏幕提示便可完成相应操作。

对于老师:教师可以获得一本完全的教科书,其中含有详尽的课后习题解答。登陆网址 <http://books.elsevier.com/manuals> 根据屏幕提示便可完成相应操作。

Printed in China by Science Press under special arrangement with Elsevier (Singapore) Pte Ltd. This edition is authorized for sale in China only, excluding Hong Kong SAR and Taiwan. Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. Violation of this Law is subject to Civil and Criminal Penalties.

本书简体中文版由 Elsevier (Singapore) Pte Ltd. 授权科学出版社在中华人民共和国境内(不包括香港、澳门特别行政区以及台湾地区)发行与销售。未经许可之出口,视为违反著作权法,将受法律之制裁。

图书在版编目(CIP)数据

轨道力学/(美)柯蒂斯(Curtis, H. D.)著;周建华等译. —北京:科学出版社,2009

(地球观测与导航技术丛书)

ISBN 978-7-03-025323-1

I. 轨… II. ①柯…②周… III. 轨道力学 IV. O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 147401 号

责任编辑:韩 鹏 于宏丽 / 责任校对:陈丽珠

责任印制:钱玉芬 / 封面设计:王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 10 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2009 年 10 月第一次印刷 印张:34 1/4

印数:1—2 500 字数:794 000

定价:88.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《地球观测与导航技术丛书》出版说明

地球空间信息科学与生物科学和纳米技术三者被认为是当今世界上最重要、发展最快的三大领域。地球观测与导航技术是获得地球空间信息的重要手段,而与之相关的理论与技术是地球空间信息科学的基础。

随着遥感、地理信息、导航定位等空间技术的快速发展和航天、通信和信息科学的有力支撑,地球观测与导航技术相关领域的研究在国家科研中的地位不断提高。我国科技发展中长期规划将高分辨率对地观测系统与新一代卫星导航定位系统列入国家重大专项;国家有关部门高度重视这一领域的发展,国家发展和改革委员会设立产业化专项支持卫星导航产业的发展;工业与信息化部和科学技术部也启动了多个项目支持技术标准化和产业示范;国家高技术研究发展计划(863计划)将早期的信息获取与处理技术(308、103)主题,首次设立为“地球观测与导航技术”领域。

目前,“十一五”计划正在积极向前推进,“地球观测与导航技术领域”作为863计划领域的第一个五年计划也将进入科研成果的收获期。在这种情况下,把地球观测与导航技术领域相关的创新成果编著成书,集中发布,以整体面貌推出,当具有重要意义。它既能展示973和863主题的丰硕成果,又能促进领域内相关成果传播和交流,并指导未来学科的发展,同时也对地球观测与导航技术领域在我国科学界中地位的提升具有重要的促进作用。

为了适应中国地球观测与导航技术领域的发展,科学出版社依托有关的知名专家支持,凭借科学出版社在学术出版界的品牌启动了《地球观测与导航技术丛书》。

丛书中每一本书的选择标准要求作者具有深厚的科学研究功底、实践经验,主持或参加863计划地球观测与导航技术领域的项目、973相关项目以及其他国家重大相关项目,或者所著图书为其在已有科研或教学成果的基础上高水平的原创性总结,或者是相关领域国外经典专著的翻译。

我们相信,通过丛书编委会和全国地球观测与导航技术领域专家、科学出版社的通力合作,将会有一大批反映我国地球观测与导航技术领域最新研究成果和实践水平的著作面世,成为我国地球空间信息科学中的一个亮点,以推动我国地球空间信息科学的健康和快速发展!

李德仁

2009年10月

前 言

本书源于作者对航天工程院校学生近十年的轨道力学教学中所形成的一系列笔记。这些学生先前并没有接触过此类学科,但是他们已经完成了物理学、动力学和高等数学(含微分方程和线性代数)等相关课程的学习,而这些就是读者学习本书的先决条件。

首先需要指出的是本书并不是对航天领域所有学科进行的全方位描述,而是立足基础,作为一个迈向航天领域尖端研究的平台。因此,本书通过重点强调物理现象和解析过程来掌握并预测航天器的在轨行为。尽管本书力求对读者更具可读性,但对需要掌握的知识难点丝毫未予以回避。近地轨道的航天器操作被考虑为行星际空间任务。虽然本书并未涉及航天器控制系统的一些重要领域,但是本书的内容再加上与控制理论相关的课程可为航天器姿态控制的研究提供基础。

纵观目录可知,本书所涵盖的知识绝非短短一个学期所能完成。第1章主要回顾了牛顿运动定律以及万有引力定律条件下的三维空间中的矢量运动学。因为航天器交会以及卫星姿态动力学主要涉及相对运动问题,所以此章亦对其进行相关阐述。第2章介绍了经典二体问题的矢量解法,同时还为轨道分析提供了一系列工程计算公式。为了引入拉格朗日点的概念,限制性三体运动问题亦在此章进行了介绍。第3章主要推导不同轨道条件下与位置和时间相关的开普勒方程,同时介绍了全局变量的概念。第4章描述了三维空间中的轨道形态,并阐述了地球扁率、非球形等主要影响。第5章重点讲述了初始轨道的确定方法,即吉伯斯法、高斯法和兰伯特问题的解法。此外,本章还对地球坐标系、儒略日计算和恒星时的相关知识进行了简要介绍。第6章着重介绍了一些利用脉冲速度增量进行轨道转移的常用方法,即霍曼(Hohmann)转移法、共面轨道相位调节法和非共面轨道平面变换法。第7章推导并运用了相对运动方程来解决双脉冲交会问题。第8章对行星际太空任务的基本问题作了介绍。第9章主要讲述了刚体动力学的基本知识,这些知识对于分析在轨卫星姿态是十分重要的。第10章主要介绍了通过喷气推进、陀螺和其他设备来改变、稳定和控制航天器姿态的一些常用方法。第11章对多级运载火箭的特点和设计进行了简要介绍。

第1~4章是初级轨道力学课程的核心。第1章所花费的时间取决于学生的知识背景。可以简要浏览一下,此后仅作为资料参考。第4章之后的学习情况取决于此课程的学习目标。第5~8章是关于轨道力学的。其中第6章轨道机动是必学的内容。第5、7、8章是可选内容。但如果关于行星际太空任务的第8章是教学计划的一部分,那么5.3节关于兰伯特问题的解法也是必须要事先掌握的。如果教学目标中有卫星动力学的相关知识,那么第9、10章是必须学习的,同时,第5、7、8章便不需要深层次掌握。第11章是选学内容,如果有单独的课程,诸如火箭动力学、推进器理论等,可选学此章。

要掌握本书中知识并用以解决问题,需要用到很多大学数学相关知识。毫无疑问,数学是工程的语言。读者应当时刻谨记艾萨克·牛顿为了精确地解决轨道力学问题而创造

了微积分。牛顿(1642—1727)是一名伟大的英国物理学家和数学家,他于1687年发表的《自然科学的哲学原理》一直是最有影响力的科学著作之一。此外,德国数学家莱布尼茨(1646—1716)也因独立于牛顿在1670年发明微积分而誉满世界。

在尊重先辈们数学技巧的同时,读者也应充分利用计算机(也就是使用莱布尼茨创立的二进制)。市场上也有很多配合个人计算机用的数学软件包,可以减少重复乏味的计算。学习轨道力学时,读者可以很好地利用计算机编程技巧。书后一些基本的MATLAB程序是使用MATLAB5.0版开发并成功通过6.5版测试。更多关于MATLAB的信息,可通过联系其注册商标公司Math Works得到。

本书包含很多详细的解释和已运行成功的例子,旨在让学生更好地理解其内容。人们通常认为初次学习的材料要尽可能详细,以至于留给读者的想象空间微乎其微。当然要达到这一目标还得考虑其他一些情况,诸如所要陈述的重点内容及全书的篇幅。例如,在第6章,单位脉冲的概念被制作成反映火箭引擎特性的表格以精确显示速度增量与推进燃料消耗之间的关系。在第10章中,罗斯-赫兹稳定判据未经证明使用来定量地说明某一卫星特定状态是稳定的(事实也确实如此)。单位脉冲在第11章中有更详尽的讲述,线性系统的稳定性亦在控制理论类书籍中有更深的介绍,比如,Nise(2003)和Ogata(2001)的著作。

书后附录中有补充材料。其中,附录A列出了全书中所用到的物理数据。附录B为阅读第1~3章的导读图。附录C讲述了如何建立 N 体的运动方程并在MATLAB中予以实现。附录D列举了前述章节中算法的MATLAB实现。附录E给出了均匀球体的引力场与将其质量集中于中心一点时的引力场是一样的。

航天学科知识丰富且涉及领域广阔,本书所引用的参考资料罗列于书后。此外,参考文献还列出了相关科目的一些书籍,这些书对有兴趣做更深层次探索的读者会有所裨益。

我要衷心感谢我的同事们,在本书的出版中,他们为我提供了难得的建议和指正。Yechiel Crispin 和 Charles Eastlake 为火箭动力学的相关内容提供了建设性意见。Habib Es-lami、Lakshmanan Narayanaswami、Mahmut Reyhanoglu 和 Axel Rohde 都将本书原始材料用作空间动力学课程的教材或参考材料。根据课堂教学实际情况,他们反馈给我宝贵的建议和更多的鼓励。Tony Hagar 自愿为本书进行校正,并提出许多宝贵意见。我也非常感激本书的出版编辑,他们为本书的改进和应涵盖的知识等方面提供了许多重要的建议。

最后,让我将深深的感谢赋予那些用过此书,并将其称为开启航天动力学大门所必备之书籍的学生们。

Howard D. Curtis
Embry-Riddle Aeronautical University
Daytona Beach
Florida

目 录

前言

第 1 章 质点动力学	1
1.1 引言	1
1.2 运动学	1
1.3 质量、力和牛顿万有引力定律.....	5
1.4 牛顿运动定律	7
1.5 运动矢量的时间导数.....	11
1.6 相对运动.....	15
习题	23
第 2 章 二体问题	25
2.1 引言.....	25
2.2 惯性系中的运动方程.....	25
2.3 相对运动方程.....	27
2.4 角动量和轨道方程.....	32
2.5 能量定律.....	38
2.6 圆轨道($e=0$).....	39
2.7 椭圆轨道($0<e<1$)	43
2.8 抛物线轨道($e=1$).....	50
2.9 双曲线轨道($e>1$).....	53
2.10 近焦点坐标系.....	59
2.11 拉格朗日系数.....	61
2.12 限制性三体问题.....	71
习题	81
第 3 章 轨道位置的时间函数	85
3.1 引言.....	85
3.2 近地点时刻.....	85
3.3 圆轨道.....	86
3.4 椭圆轨道.....	86
3.5 抛物线轨道.....	99
3.6 双曲线轨道	100
3.7 全局变量	107
习题.....	117
第 4 章 三维空间中的轨道	120

4.1	引言	120
4.2	地心赤经-赤纬坐标系	120
4.3	状态向量与地心赤道坐标系	123
4.4	轨道根数与状态向量	127
4.5	坐标变换	132
4.6	地心赤道和近焦点坐标系间的坐标变换	139
4.7	地球扁率的影响	143
	习题	152
第 5 章	初始轨道确定	156
5.1	引言	156
5.2	吉伯斯三位置矢量定轨法	156
5.3	兰伯特问题	163
5.4	恒星时	172
5.5	测站坐标系	176
5.6	测站赤道坐标系	179
5.7	测站地平坐标系	180
5.8	角度与斜距观测数据的初始轨道确定	184
5.9	单纯角度观测数据的初始轨道确定	190
5.10	初始轨道确定的高斯方法	191
	习题	203
第 6 章	轨道机动	207
6.1	引言	207
6.2	脉冲机动	207
6.3	霍曼转移	208
6.4	双椭圆霍曼转移	213
6.5	调相机动	216
6.6	共拱线的非霍曼转移	221
6.7	拱线转动	225
6.8	追击	231
6.9	非共面机动	234
	习题	246
第 7 章	相对运动与交会	253
7.1	引言	253
7.2	轨道上的相对运动	253
7.3	轨道相对运动方程的线性化	258
7.4	Clohessy-Wiltshire 方程	259
7.5	双脉冲交会机动	264
7.6	邻近圆轨道上的相对运动	271

习题	273
第 8 章 行星际轨道	277
8.1 引言	277
8.2 行星际霍曼转移	277
8.3 交会窗口	279
8.4 影响球	283
8.5 圆锥曲线拼接法	287
8.6 行星际出发	287
8.7 敏感度分析	292
8.8 行星际交会	294
8.9 行星际飞越	300
8.10 行星星历表	309
8.11 非霍曼行星际转移轨道	313
习题	318
第 9 章 刚体动力学	320
9.1 引言	320
9.2 运动学	320
9.3 平动方程	327
9.4 转动方程	328
9.5 转动惯量	332
9.6 欧拉方程	348
9.7 动能	353
9.8 旋转陀螺	355
9.9 欧拉角	359
9.10 俯仰角、偏航角和滚转角	368
习题	371
第 10 章 卫星姿态动力学	378
10.1 引言	378
10.2 无外力矩的自由运动	378
10.3 无外力矩自由运动的稳定性	385
10.4 双自旋航天器	389
10.5 章动阻尼器	392
10.6 圆锥机动	399
10.7 姿态控制推力器	401
10.8 yo-yo 消旋原理	403
10.9 陀螺姿态控制	408
10.10 重力梯度稳定	420
习题	429

第 11 章 火箭动力学	434
11.1 引言	434
11.2 运动方程	434
11.3 推力方程	436
11.4 火箭性能	438
11.5 自由空间中的火箭分级问题	440
11.6 最佳级数	448
习题	454
附录 A 物理数据	456
附录 B 导读图	458
附录 C N 体运动方程的数值积分法	459
附录 D MATLAB 算法	462
附录 E 球体的引力势能	533
参考文献	536

第 1 章 质点动力学

1.1 引言

本章是质点运动学与动力学及一些基本矢量运算的参考章节,并且本章涉及的概念与符号将在后续章节中使用。熟悉质点动力学的人可快速浏览,以后必要时用作参考。而对于那些需要一些补充知识的人来说,本章包含了他们在后续章节中学习轨道力学所需要的足够材料。

本章从描述三维空间中质点的曲线运动开始,随后引入力和质量的概念以及牛顿的引力平方反比定律,紧接着的内容是牛顿第二运动定律(力等于质量与加速度之积)以及角动量这一重要概念。

为描述运动坐标系下的运动情况作铺垫,本章先推导出一些计算运动矢量时间导数的关系式。这些关系式要用来计算相对速度和相对加速度。然后举例说明了利用这些关系详细考虑了地球的转动如何影响所测量的速度与加速度,从而引入了科里奥利力这一概念。本章的课后习题主要是验证几个重要的矢量关系,这些矢量关系将在后续章节中经常用到。

1.2 运动学

在欧几里得几何空间中描述一质点 P 的运动情况,需要建立一个坐标系,该坐标系包括一个时钟和一个笛卡儿坐标系。时钟用来记录时间 t ,笛卡儿坐标系中的 xyz 轴用来标出质点 P 的空间位置。在非相对论力学中一个单独的统一时钟可用于所有笛卡儿坐标系。所以当提及一个坐标系时,仅需考虑笛卡儿坐标系。

全书中的时间单位为秒(s),长度单位为米(m),但当距离和速度较大时将使用千米(km)作为单位。千米、英里、海里三者之间的转换关系可参考表 A. 3。

给定一个坐标系,质点 P 在时刻 t 的位置可由位置矢量 $\mathbf{r}(t)$ 表示,其中 $\mathbf{r}(t)$ 从原点出发指向点 P (矢量用粗体表示),如图 1.1 所示。

$\mathbf{r}(t)$ 包含 x 、 y 和 z 三个方向的分量

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

式中, \hat{i} 、 \hat{j} 和 \hat{k} 分别为指向 x 、 y 和 z 轴正向的单位矢量。任何具有“ $\hat{\quad}$ ”的矢量(如

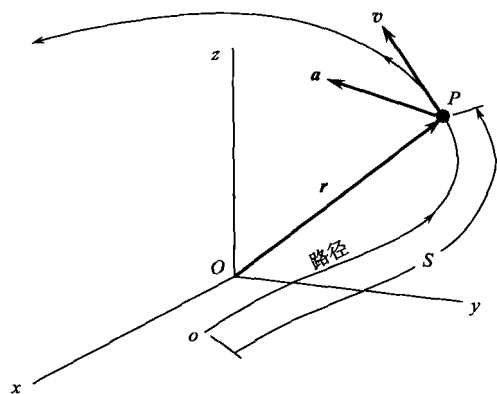


图 1.1 位置、速度和加速度矢量

\hat{a})均可看成是单位矢量。

从原点到质点 P 的距离为 r 的模或长度,记作 $\|r\|$ 或简记为 r

$$\|r\| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

r 的模,或其他任何矢量 A 的模均可通过点乘运算来得到

$$r = \sqrt{r \cdot r}, \quad \|A\| = \sqrt{A \cdot A}$$

质点的速度 v 和加速度 a 分别为位置矢量的一次和二次时间导数

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{k} = v_x(t) \hat{i} + v_y(t) \hat{j} + v_z(t) \hat{k}$$

$$a(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \hat{k} = a_x(t) \hat{i} + a_y(t) \hat{j} + a_z(t) \hat{k}$$

简便起见,通常用上方加点来表示时间导数。用此方法,假设 (A) 为任意量,则

$$(\dot{A}) \equiv \frac{d(A)}{dt}, \quad (\ddot{A}) \equiv \frac{d^2(A)}{dt^2}, \quad (\dddot{A}) \equiv \frac{d^3(A)}{dt^3}$$

例如

$$v = \dot{r}$$

$$a = \dot{v} = \ddot{r}$$

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

质点在空间运动时,其所处空间位置点发生变化而形成的轨迹称之为路径或轨迹。如果路径为一条直线,则为直线运动;否则为曲线运动。速度矢量 v 与路径相切。设 \hat{u}_t 为单位矢量并与轨迹相切,则

$$v = v\hat{u}_t$$

式中,速率 v 为速度 v 的大小。在 dt 时间间隔内,质点 P 沿其路径所通过的距离 ds 可由速率得出

$$ds = vdt$$

即

$$v = \dot{s}$$

式中,距离 s 为从某一起点沿路径所测的距离。如将其形象地比作汽车里程表的话,那么速率 \dot{s} 即为速率计上所显示的数值。

注意: $v \neq \dot{r}$, 即 r 导数的模不等于 r 模的导数。

例 1.1 位置矢量(m)与时间(s)之间的函数关系为

$$r = (8t^2 + 7t + 6) \hat{i} + (5t^3 + 4) \hat{j} + (0.3t^4 + 2t^2 + 1) \hat{k} \text{ (m)}$$

当 $t=10\text{s}$ 时,求出 v (r 导数的模)和 \dot{r} (r 模的导数)。

将已知位置矢量对时间微分可得速度矢量如下:

$$v = \frac{dr}{dt} = (16t + 7) \hat{i} + 15t^2 \hat{j} + (1.2t^3 + 4t) \hat{k}$$

矢量的模为其各分量平方和的开方根

$$\|v\| = \sqrt{1.44t^6 + 234.6t^4 + 272t^2 + 224t + 49}$$

将 $t=10\text{s}$ 代入, 可得

$$v = 1953.3\text{m/s}$$

计算 r 的模为

$$\|r\| = \sqrt{0.09t^8 + 26.2t^6 + 68.6t^4 + 152t^3 + 149t^2 + 84t + 53}$$

将此表达式对时间微分, 可得

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{0.36t^7 + 78.6t^5 + 137.2t^3 + 228t^2 + 149t + 42}{(0.09t^8 + 26.2t^6 + 68.6t^4 + 152t^3 + 149t^2 + 84t + 53)^{\frac{1}{2}}}$$

将 $t=10\text{s}$ 代入, 可得

$$\dot{r} = 1935.5\text{m/s}$$

如果 v 已知, 则可以求出笛卡尔坐标系下单位向量 \hat{u}_i 的各分量

$$\hat{u}_i = \frac{v}{\|v\|} = \frac{v_x}{v}\hat{i} + \frac{v_y}{v}\hat{j} + \frac{v_z}{v}\hat{k}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

加速度可表示为

$$a = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n$$

式中, a_t 和 a_n 分别为加速度的切向分量和法向分量。

$$a_t = \dot{v} (= \dot{s}), \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (1.1)$$

ρ 为曲率半径, 即质点 P 到曲线路径中心的距离。单位法向矢量 \hat{u}_n 垂直于 \hat{u}_t 并指向曲率中心 C , 如图 1.2 所示。因此, 点 C 相对于质点 P 的位置即为

$$r_{C/P} = \rho \hat{u}_n$$

相互垂直的单位矢量 \hat{u}_n 和 \hat{u}_t 所形成的平面称之为密切平面。与密切平面相垂直的单位矢量为 \hat{u}_b , 其为 \hat{u}_n 与 \hat{u}_t 的叉乘

$$\hat{u}_b = \hat{u}_t \times \hat{u}_n$$

曲率中心位于密切平面中。当质点 P 移动一小距离 ds 时, 连接曲率中心与路径的半径则在密切平面内扫过一小角度 $d\phi$, 两者间的关系为

$$ds = \rho d\phi$$

由此可得 $\dot{s} = \rho \dot{\phi}$, 或表示为

$$\dot{\phi} = \frac{v}{\rho} \quad (1.2)$$

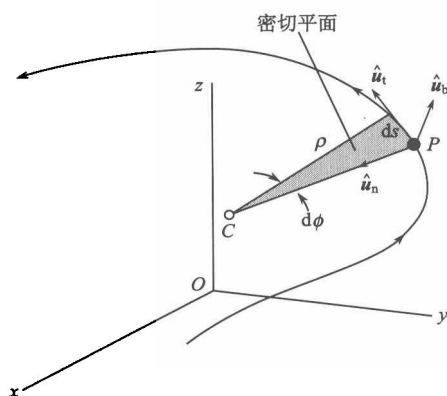


图 1.2 与运动点 P 相连的正交单位矢量组

例 1.2 笛卡儿坐标系下,在某一给定时刻,质点 P 的位置、速度及加速度矢量分别为

$$\mathbf{r} = 250 \hat{i} + 630 \hat{j} + 430 \hat{k} (\text{m})$$

$$\mathbf{v} = 90 \hat{i} + 125 \hat{j} + 170 \hat{k} (\text{m/s})$$

$$\mathbf{a} = 16 \hat{i} + 125 \hat{j} + 30 \hat{k} (\text{m/s}^2)$$

求出此刻曲率中心坐标。

首先,计算出速率

$$v = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{90^2 + 125^2 + 170^2} = 229.4 (\text{m/s})$$

单位切矢量为

$$\hat{\mathbf{u}}_t = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{90 \hat{i} + 125 \hat{j} + 170 \hat{k}}{229.4} = 0.3923 \hat{i} + 0.5449 \hat{j} + 0.7411 \hat{k}$$

将加速度在其切向上进行投影得到切向分量 a_t

$$a_t = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{u}}_t = (16 \hat{i} + 125 \hat{j} + 30 \hat{k}) \cdot (0.3923 \hat{i} + 0.5449 \hat{j} + 0.7411 \hat{k}) = 96.62 (\text{m/s}^2)$$

加速度 \mathbf{a} 的模为

$$a = \sqrt{16^2 + 125^2 + 30^2} = 129.5 (\text{m/s}^2)$$

因为 $\mathbf{a} = a_t \hat{\mathbf{u}}_t + a_n \hat{\mathbf{u}}_n$, 且 $\hat{\mathbf{u}}_t$ 与 $\hat{\mathbf{u}}_n$ 相互垂直, 可得 $a^2 = a_t^2 + a_n^2$, 即

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{129.5^2 - 96.62^2} = 86.29 (\text{m/s}^2)$$

因此

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_n &= \frac{1}{a_n} (\mathbf{a} - a_t \hat{\mathbf{u}}_t) \\ &= \frac{1}{86.29} [(16 \hat{i} + 125 \hat{j} + 30 \hat{k}) - 96.62(0.3923 \hat{i} + 0.5449 \hat{j} + 0.7411 \hat{k})] \\ &= -0.2539 \hat{i} + 0.8385 \hat{j} - 0.4821 \hat{k} \end{aligned}$$

从方程 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ 可得

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{229.4^2}{86.29} = 609.9 (\text{m})$$

设 \mathbf{r}_C 为曲率中心 C 的位置矢量, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \mathbf{r} + \mathbf{r}_{C/P} = \mathbf{r} + \rho \hat{\mathbf{u}}_n \\ &= 250 \hat{i} + 630 \hat{j} + 430 \hat{k} + 609.9(-0.2539 \hat{i} + 0.8385 \hat{j} - 0.4821 \hat{k}) \\ &= 95.16 \hat{i} + 1141 \hat{j} + 136.0 \hat{k} (\text{m}) \end{aligned}$$

即 C 点的坐标为

$$x = 95.16 \text{m}, \quad y = 1141 \text{m}, \quad z = 136.0 \text{m}$$

1.3 质量、力和牛顿万有引力定律

与长度和时间一样,质量也是基本物理量:它不能通过其他物理量来定义。简单来说,质量即为物质的量。从工程使用角度来说,质量是衡量物体惯性大小的标准。惯性为阻碍物体改变原有运动状态的阻抗。质量越大,惯性越大,改变其运动状态也越困难。质量的单位为千克(kg)。

力是一个物体对另一个物体的作用,既可以通过直接接触来实现,也可以保持一段距离来实现力的作用。引力即为通过一定距离而产生的,此外,磁力和带电粒子之间的作用力亦是如此。两质量分别为 m_1 和 m_2 , 中心距离为 r 的物体所产生的万有引力为

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.3)$$

式(1.3)即为牛顿万有引力定律,其中 G 为引力常数,其值为 $6.6742 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ 。由于引力与距离的平方成反比,所以当两物体分离时,它们间的引力便迅速减小。通常情况下,两物体的质量不是很大时,可以认为引力是很小的。

一个大质量物体(如地球)作用在一个比其质量小很多倍的物体(如人)上的力称为重力,用 W 表示。设大质量物体质量为 M ,小质量物体质量为 m ,则小质量物体的重力为

$$W = G \frac{Mm}{r^2} = m \left(\frac{GM}{r^2} \right)$$

或者表示为

$$W = mg \quad (1.4)$$

式中

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad (1.5)$$

g 的单位为 m/s^2 , 也称为引力加速度。如果一物体只受地球的作用力,那么此物体将做自由落体运动。此引力将驱使该物体以加速度 g 向地心运动。通常情况下,我们通过地面的反作用力可以感知我们的体重。而自由落体时,因为没有反作用力,所以我们感觉不到自己的体重。虽然我们的体重并不为零,但当我们处于自由落体时就会经历失重。

计算一下式(1.5)在地球表面的值,由表 A.1 可知地球半径为 6378km。设 g_0 为标准海平面高度处的 g 值,则

$$g_0 = \frac{GM}{R_E^2} \quad (1.6)$$

在国际单位制中

$$g_0 = 9.807 \text{ m}/\text{s}^2 \quad (1.7)$$

设 z 为距离地面的高度,即 $r = R_E + z$ 。将式(1.6)代入式(1.5),可得

$$g = g_0 \frac{R_E^2}{(R_E + z)^2} = \frac{g_0}{(1 + z/R_E)^2} \quad (1.8)$$

商用客机通常飞行高度为 10km(6mi)。在此高度上,式(1.8)所算出的 g 值仅比以标准海平面高度算出的值小 0.33%。因此通常情况下,忽略 g 值随高度的变化。式(1.8)中 g 随高度由 0 变化至 1000km(近地轨道运行的最大值)时的数值变化如图 1.3 所示。在整个距离变化范围内, g 值的变化是显而易见的。即便如此,在空间站的高度(300km)上,其重力也仅比地表测量时小百分之十左右。宇航员们会经历失重,但他们并不是没有重量。

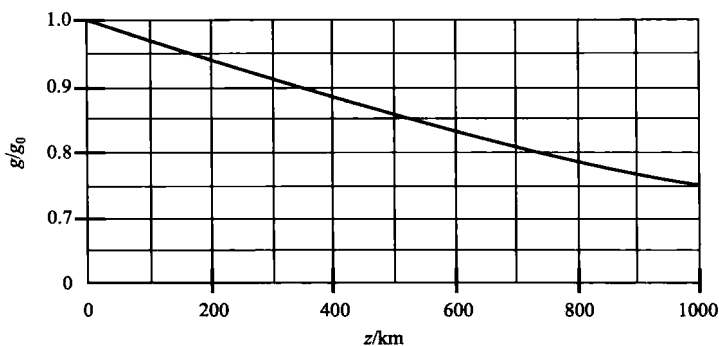


图 1.3 引力加速度与高度的关系

例 1.3 设引力加速度 g 为常量且不考虑地球的曲率影响,忽略空气阻力的影响时,验证一低空飞行物体的轨迹为抛物线。

如图 1.4 所示,在时刻 $t=0$ 时将一位于坐标为 (x_0, y_0) 处的物体以速度 v_0 , 飞行路径角 γ_0 掷出。因为此抛射体在发射后做自由落体运动,所以其加速度为引力加速度,方向为 $-y$ 轴方向

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

将等式两边对时间相积分并代入初始条件,可得

$$x = x_0 + (v_0 \cos \gamma_0)t \quad (\text{a})$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin \gamma_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{b})$$

从式(a)中解出 t 并将结果带入式(b)中,可得

$$y = y_0 + (x - x_0) \tan \gamma_0 - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0 \cos \gamma_0} (x - x_0)^2 \quad (\text{c})$$

此方程为二次曲线方程,其轨迹为一条抛物线,如图 1.4 所示。

例 1.4 一架飞机沿如图 1.4 所示的抛物线轨迹飞行时,其乘客将会感受到失重。忽略地球曲率影响,求其所需要的飞行路径角 γ 和速度 v 的关系?

图 1.5 表明,将地球看成是一平面时(即不考虑其球形影响), $dy = -d\phi$, 即 $\dot{\gamma} = -\dot{\phi}$ 。

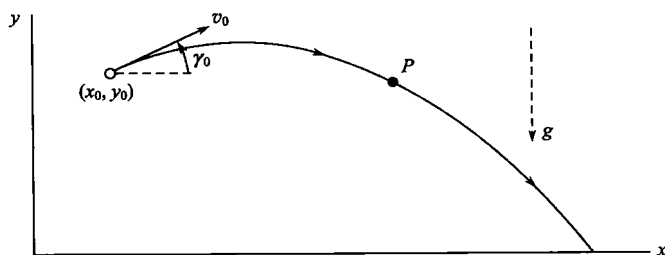
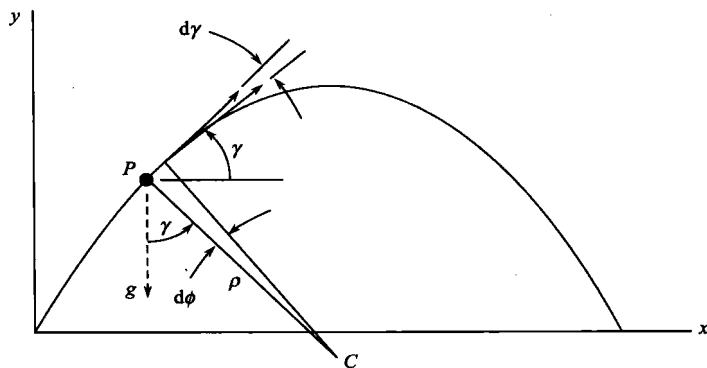


图 1.4 低高度抛射体的自由落体

图 1.5 假设地球为平面时 dy 与 $d\phi$ 的关系

由式(1.2)可得

$$\rho \dot{\gamma} = -v \quad (1.9)$$

法向加速度 a_n 即为引力加速度 g 在垂直于曲线方向上的分量(由 P 指向 C)。由图 1.5 可知

$$a_n = g \cos \gamma \quad (a)$$

将式(1.1)代入式(a)解出曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{g \cos \gamma} \quad (b)$$

合并式(1.9)与式(b)可得飞行路径角速率的变化

$$\dot{\gamma} = -\frac{g \cos \gamma}{v}$$

1.4 牛顿运动定律

与质量不同,力并不是一个基本物理量,它与运动和惯性两者紧密相连。事实上,改变一物体运动状态的唯一方法便是对其施加作用力。运动状态改变的程度反映了力的大小。牛顿第二运动定律给予了定量说明。设一质量为 m 的物体所受合力为 $F_{\text{合}}$,则