现代物理基础丛书 29

经典电动力学

曹昌祺 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代物理基础丛书　29

经典电动力学

(理论物理三卷集之一)

曹昌祺　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书第一章阐述电磁现象的基本规律和电场的基本性质，它是整本书的理论基础. 第二章和第三章从基本规律出发，分别讨论静电场和静磁场的状况，它们是场与介质相互作用所达到的静态. 第四章讨论电磁波的激发、传播和辐射. 第五章讨论带电粒子与电磁场的作用. 第六章阐述特殊相对论的实验基础和基本原理.

本书可作为电动力学的参考教材或作为教学参考书供教员使用.

图书在版编目(CIP)数据

经典电动力学/曹昌祺著. —北京：科学出版社，2009
(现代物理基础丛书；29)
ISBN 978-7-03-025233-3
Ⅰ.经… Ⅱ.曹… Ⅲ.电动力学 Ⅳ.O442
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 142798 号

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 8 月第一次印刷 印张：28 1/4
印数：1—3 000 字数：554 000
定价：78.00 元
如有印装质量问题，我社负责调换

序　言

电动力学是作者讲授时间最长的课程, 从 1956 年春季开始讲 (那已是半个世纪前的事了), 总共讲了二十多年. 最初是在兰州大学讲, 因为 1955 年夏作者从北京大学研究生院毕业后, 即由教育部分配去兰州大学任教 (当时尚无学位制, 大学中只有本科毕业和研究生毕业两个级别). 1957 年春, 作者奉教育部调令, 回到母校北京大学, 接手讲授电动力学课. 二十多年间, 虽也讲授过其他理论物理课程如热力学、统计物理、量子力学以及数学物理方法等, 但主要还是担任电动力学课程的教学. 到很后来才改成讲授量子非阿贝尔规范场论和辐射与光场的量子统计理论等研究生课程. 现出版的理论物理三卷集就是在这三门课程讲义的基础上加工写成的. 本书最初的文稿是当年作者在北京大学为物理系 (以及无线电电子学系) 本科生授课的讲义, 当时大学本科学制为五年 (并曾改为六年), 电动力学课程以及其他三门理论物理课程 (理论力学、热力学与统计物理、量子力学) 的授课时间均为一年. 在 1961 年初教育部召开的高校教材会议上, 该讲义被推荐为供全国高校物理系使用的交流教材 (一般称为“统用教材”), 并由人民教育出版社于 1961 年 7 月出版，书名为《电动力学》. 这次本书作为《理论物理》三卷集的第一卷由科学出版社重新出版, 内容有较大的更动, 基本上是以 1983 年作者在安徽大学举办的青年教师学习班上用的讲义为底稿, 作了某些修改而成, 该书仍保持原来的六章章名.

记得我刚上大学时, 曾听高年级的一位同学说, 麦克斯韦方程组是综合库仑定律、安培-毕奥-萨伐尔定律和法拉第定律并补充了位移电流的效应后的结果. 可是后来我学电动力学时, 很快就看见在从麦克斯韦方程组求出的等速运动带电粒子的电磁场中, 电场分布与库仑定律所给出的结果明显不一致 (更不必说加速运动的情况了). 这才认识到, 原来听到的那种说法并不确切. 库仑定律作为特殊情况 (静电状态) 的规律, 其中既包含了电磁现象普遍性的内容, 又有其特殊性的反映. 这也就是哲学中所说的“普遍性寓于特殊性之中, 但又与特殊性不全同”的体现. 根据这一精神, 作者在教学中强调了对库仑定律、安培-毕奥-萨伐尔定律和法拉第定律进行分解, 以便提取其中所含的普遍性因素. 在此基础上再根据电荷守恒定律, 补充上位移电流项, 这才给出一般情况下适用的麦克斯韦方程组.

上述讲法虽没有什么新颖的东西, 但可以避免一些误会 (如上述那位高年级同学那样), 也体现了上述哲学理论中阐述的重要思想, 教学的效果较好.

在作者 1961 年出版的《电动力学》一书中, 为了适应当时“大批判”的环境, 在联系实际方面有一些勉强的地方. 这本书则是在 1974 年作者重写的讲义基础上

修改而成的. 作者曾应故乡的安徽大学邀请, 在 1983 年该校举办的青年教师讲习班上, 将讲义作为教材印发给参加讲习班的学员. 为了表示与 1961 年所写书的区别, 本书书名改为《经典电动力学》①. 至于课程的习题, 由于教育部没有规定统一的标准, 各个学校采用的习题, 难度也相差较大, 所以本书在最初出版时就没有将习题收录在内. 中山大学所编写的书中列入的习题, 有不少就是我们在北大使用的. 由于现在已有一些专门的电动力学习题集, 故在本书中仍不录入习题.

作　者

2007 年 1 月

① 顺带说一下, 作者对量子力学亦有一个简单的概括, 载于〈辐射和光场的量子统计理论〉一书的 §1.1 节, 可供读者学习量子力学时参考.

前　　言

“每一种科学都是分析单个的运动形态或一系列互相关联和互相转变的运动形态.”—— 恩格斯《自然辩证法》

电动力学研究的领域是电磁现象, 或者说是电磁运动形态. 它具体研究的对象, 概括地说, 就是电磁场的性质以及它与带电物体间的作用.

现在已经明确地认识到, 电磁场是物质存在的一种形式, 并非是描述带电体之间相互作用的一种手段. 电荷也不是某种客体, 从根本上来说 (例如就电子和质子而言) 所谓“带电”, 是指它们具有与电磁场相互作用的性能. 其电荷值就是它们与电磁场间耦合常数. 只是对宏观物体来说, 带负电才是指它带有多余的 (超过抵消质子正电荷所需的) 电子. 带正电是指只有不足的电子 (或者说带有过多的质子).

电磁场与带电物质相互作用, 从而表现出各种各样的电磁现象. 然而对电磁现象的这一本质, 人们并不是一下子就认识到的. 像所有的认识过程一样, 人类对电磁现象的认识, 也是在实践中由特殊到一般、由现象到本质逐步深入的. 在早先的时候, 人们把带电体之间以及载流导线之间存在的作用力解释成为带电体之间或载流导线之间的超距作用, 而电磁场 (静止的) 只是作为描叙手段引入的, 并没有被当成为一种客观的物质存在. 人们对电磁现象的认识面, 也是从静电、静磁和似稳流动等特殊范围逐步扩大, 直到一般的情况. 因此, 电动力学的任务, 就是在各种特殊范围的实验定律的基础上, 阐明电磁现象的本质和它的一般规律, 并在得出一般规律以后, 再回到实际中去, 运用这些规律来研究各种物理过程. 在电磁场和带电物质这一对矛盾中, 电动力学又着重地研究电磁场这一方, 即研究电磁场的基本属性、它的运动规律以及它和带电物质的相互作用.

目　　录

第一章　电磁现象的基本规律

本章内容共有三个方面:

(1) 对静电、静磁和似稳电流等特殊范围的实验定律进行分析、综合和推广, 以上升到电磁现象的基本规律 —— 麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式.

(2) 根据基本规律对电磁场的主要属性进行分析研究, 以阐明: 在一定条件下(迅变情况), 电磁场可以脱离电荷电流而独立存在, 并具有能量和动量, 因此是一种客观的物质存在; 阐明电磁场与经典的质点相比, 又具有自己的特点, 即以波动的形式进行运动.

(3) 讨论介质的电磁性质和介质中电荷电流的各种形式. 在宏观电磁现象中, 带电物质主要是介质. 本章的这一部分就是阐明电磁场与介质作用的有关规律.

1.1　静电、静磁和似稳电流状态的实验规律

关于静电、静磁和似稳电流状态的实验定律在基础物理中都已经学过. 在这里我们只对它作一小结并进行一些补充的讨论.

1.1.1　库仑定律

库仑定律是静电情况的实验定律, 它给出静止电荷之间作用力对距离和电量的依赖关系. 此定律是直接从实验材料中总结出来的. 它的内容可表叙如下:

如果空中有两个静止的点电荷 q_1 和 q_2(我们并且用 q_1 和 q_2 来表示两者的电量即电荷的值), 由 q_2 到 q_1 的距离为 $\boldsymbol{R}_{12}$, 则 q_1 和 q_2 所受的力分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_1 &= k\frac{q_1q_2\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}^3},\\ \boldsymbol{F}_2 &= -\boldsymbol{F}_1 = \frac{kq_1q_2\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}^3},\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{21}(= -\boldsymbol{R}_{12})$ 为 q_2 到 q_1 的距离, k 为比例常数. 若距离和力选用 CGS 制单位, 并令 $k = 1$, 则由此定出的电荷单位叫做电荷的静电单位 (或写作 CGS 制单位). 本书采用的电磁单位制为高斯单位制. 在高斯单位制中, 对于电方面的物理量都采用静电单位.

需要注意的是, 电荷必须是静止的点电荷, 而且处在真空中. 点电荷是一个极限的概念, 当带电体之间的距离比起带电体本身的线度大得多时, 在静电问题中即

可近似作为点电荷来看待.

如果一个点电荷 q_0 同时受许多点电荷 $q_1, q_2, \cdots$ 的作用, 则实验进一步告诉我们, q_0 所受的总力就是各个点电荷单独与它作用时的量和①, 即

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_0 q_1 \boldsymbol{R}_{01}}{R_{01}^3} + \frac{q_0 q_2 \boldsymbol{R}_{02}}{R_{02}^3} + \cdots, \tag{1.1.2}$$

这就是静电作用的叠加性.

在宏观电动力学中, 电荷常常是连续的体分布. 要计算一个体分布电荷对一个点电荷的作用力, 可以将该分布电荷分成为许多小电荷元, 再应用以上公式. 这样就得出

$$F = q\int_V \frac{\rho(x')\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau', \tag{1.1.3}$$

其中 $\rho(x')$ 为 $\rho(x_1', x_2', x_3')$ 的简写; $\boldsymbol{R}$ 代表 x' 到点电荷 q 的距离 (方向是自 x' 到 q).

1.1.2　静电场

根据库仑定律, 我们也可以说, 电荷附近的空间具有特殊的物理性质, 即出现在此空间中的其他电荷将受到力的作用. 我们把这种"电荷处于其中会受到力"的空间称为电场. 场在这里仅仅是作为描述静电作用的手段而引入的. 因为即使不借助于它, 就直接用库仑定律, 同样可以描述静电作用. 我们暂时仍采取这种原始的观点, 在以后的几节中再来揭示场是客观物质存在的一种形式.

当电荷处在电场中不同的地点时, 所受的力一般不相同, 因此需要引进一个空间函数来描写电荷在电场中各点的受力情况.

由式 (1.1.1)~(1.1.3), 可以看出, 在一定电荷分布所生成的电场中, 作用于静止的试探点电荷的力与该试探点电荷的电量 q 成正比, 即

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}, \tag{1.1.4}$$

其中的比例常量 $\boldsymbol{E}$ 等于单位电荷所受的力, 称为电场强度 (也简称电场). 由于试探点电荷在空间每一点所受的力一般不相同, 故 $\boldsymbol{E}$ 是一个空间坐标 x 的函数 [x 为 (x_1, x_2, x_3) 的简写].

上述关于电场强度的定义, 即单位点电荷所受的力, 不仅对静电场适用, 对变化的电场也同样适用. 但要注意, 试探点电荷本身必须是静止的. 另外, 试探点电荷的电量应取得很小, 以免它的引入改变了原来的电荷分布.

---

① 这一结果并不是当然的. 物理学并不一般地否定两者之间的作用力可能受旁边第三者的影响. 这种情况下的作用力将称为三体力. 当然, 还容许有多体力.

在电荷分布是已知的情况下, 可以从库仑定律计算出电场的分布, 对于一组点电荷 q_i

$$\boldsymbol{E}(x)=\sum_i \frac{q_i \boldsymbol{R}_i}{R_i^3}, \tag{1.1.5}$$

其中 $\boldsymbol{R}_i$ 为从 q_i 的位置到 x 的距离. 在电荷是体分布时

$$\boldsymbol{E}(x)=\int_V \frac{\rho(x')\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau', \tag{1.1.6}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为从 x' 到 x 的距离①. x 通常称为场变量, 因为它是电场 $\boldsymbol{E}$ 的宗量; x' 称为源变量, 因为它是电荷密度 ρ 的宗量, 而电荷是生成电场的源. 注意, $\boldsymbol{R}$ 既是场变量的函数又是源变量的函数, 在式 (1.1.6) 中积分只对源变量进行, 故积分后的结果是场变量的函数.

一个体分布电荷在电场中所受的力, 可以通过将该电荷分成许多小电荷元来计算. 对于电荷元 $\rho\mathrm{d}\tau$, 按式 (1.1.4) 所受的力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\rho\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau. \tag{1.1.7}$$

上式中的 $\boldsymbol{E}$ 为引入该体分布电荷以后的电场强度值 (因引入该电荷分布后, 原电场的值可能会改变).

1.1.3 电偶极矩和电偶极子

为了本章最后两节的需要, 这里简单地说明一下电偶极矩的概念. 在普通物理中已经学过, 对于两个“大小相等符号相反而且彼此间有一距离”的点电荷, 其电偶极矩的定义是

$$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{r}_+-q\boldsymbol{r}_-=q\boldsymbol{l}, \tag{1.1.8}$$

其中 $\boldsymbol{r}_+$ 和 $\boldsymbol{r}_-$ 分别代表从某参考点 (如坐标原点) 到 $+q$ 和 $-q$ 的距离, $\boldsymbol{l}$ 则是从 $-q$ 到 $+q$ 的距离. 如果正负电荷的数值虽然相等, 但不是点电荷, 则电偶极矩的定义是

$$\boldsymbol{p}=\int\rho(x')\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\tau', \tag{1.1.9}$$

其中 $\boldsymbol{r}'$ 为参考点到 x' 的距离. 利用总电荷的零的条件, 不难证明, $\boldsymbol{p}$ 实际上与参考点的取法无关.

如果一个电偶极矩所分布范围的线度很小, 则在极限的情况下, 可称为“点电偶极矩”, 通常叫做电偶极子.

① 在本书中, 除了声明的以外, $\boldsymbol{R}$ 都表示从 (x_1',x_2',x_3') 到 (x_1,x_2,x_3) 的距离, 另外, 我们以后都用 x 表示 (x_1,x_2,x_3), 用 $f(x)$ 来表示 $f(x_1,x_2,x_3)$, 用 $\boldsymbol{g}(x)$ 表示 $\boldsymbol{g}(x_1,x_2,x_3)$, 就不再一一声明.

电偶极子中的正负电荷在电场中所受的力方向相反, 因而形成力矩. 从式 (1.1.8) 或 (1.1.9), 并注意到电偶极子的线度趋于零, 即可算出其力矩为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}. \tag{1.1.10}$$

由此可见, 一个在电场中能自由转动的电偶极子, 平衡时 $\boldsymbol{p}$ 的指向就是该点电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向. 而单位电偶极子在一点所受力矩的最大值 (也就是当 $\boldsymbol{p}$ 的方向与 $\boldsymbol{E}$ 垂直时的力矩值) 就等于该点 $\boldsymbol{E}$ 的数值. 我们亦可以用这种方式来定义电场 $\boldsymbol{E}$ 的大小和方向.

1.1.4 电流, 电荷守恒定律

电荷的流动即形成电流. 在一般情况下, 要描写导体中电流的状态, 仅用总电流 I 是不够的. 而需要引入电流密度 $\boldsymbol{j}$, 它是 (x,t) 的函数, 表示导体内每一点、每个时刻的电荷流动情况. $\boldsymbol{j}$ 的方向表示该点该时刻电荷流动的方向, 它的数值表示单位时间内通过单位横截面积的电荷. 具体地说, 取一块小面积 $\Delta\sigma$ 通过 x 点并与电流方向相垂直 (即为横截面). 设在 t 到 $t+\Delta t$ 时间内通过 $\Delta\sigma$ 的电荷为 ΔQ, 则 $\boldsymbol{j}$ 的数值即为

$$j(x,t) = \lim_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{\Delta Q}{\Delta\sigma\Delta t}. \tag{1.1.11}$$

不难看出, t 时刻通过任意曲面的电流应为

$$I(t) = \int \boldsymbol{j}(x,t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.1.12}$$

如果某点的电荷密度为 ρ, 而且该点的电荷以共同的速度 $\boldsymbol{v}$ 运动, 则该点的电流密度就等于 ρ 乘上 $\boldsymbol{v}$, 即

$$\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}. \tag{1.1.13}$$

注意, 这个关系式只在上述条件下成立, 并不能普遍应用, 如在均匀导体内部, 通常出现 ρ 为零而 $\boldsymbol{j}$ 不为零的情况. 这是因为导体内正负电荷的速度不同, 不存在一个共同速度 $\boldsymbol{v}$ 的缘故. 以金属导体为例, 正电荷是不动的, 故虽然其中的总电荷密度

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0,$$

但

$$\boldsymbol{j} = \rho_+\boldsymbol{v}_+ + \rho_-\boldsymbol{v}_- = \rho_-\boldsymbol{v}_-$$

可以不为零.

实验告诉我们, 电荷是守恒的, 任意区域内电荷的增加, 都是通过区域表面流进去的, 因而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\mathrm{d}\tau = -\oint_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \tag{1.1.14}$$

其中 S 为 V 的表面; $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的方向取得自内向外 (对封面闭曲面, $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的方向都是这样取, 这是一个通例. 以后不再一一说明). 式 (1.1.14) 即为电荷守恒定律的积分表达式. 通过矢量分析中的高斯定理,

$$\oint_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau,$$

从式 (1.1.14) 即得出

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau=-\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau.$$

由于上式对任意体积都成立, 故必须被积函数处处相等, 即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0. \tag{1.1.15}$$

这就是电荷守恒定律的微分表达式.

如果虽有电荷在流动, 但各点的 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 都能保持不随时间变化的, 那么就称为稳定流动. 从

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,$$

得出稳定的条件是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}(x)=0. \tag{1.1.16}$$

式 (1.1.16) 也叫做电流的连续性方程, 它的积分形式为

$$\oint\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=0, \tag{1.1.17}$$

即流进任何封闭面的总电流为零. 式 (1.1.17) 也可从式 (1.1.14) 直接得出.

以上讨论的是电流在一个体积内流动的情况. 如果电流可看作集中在一根线上流动时, 那么只需要用总电流 $I(s,t)$ 来描述就够了, 其中 s 表示沿导线的长度变量. 如果电流是在一个面上流动, 则可定义面电流密度 $\boldsymbol{\Pi}$, 其大小等于单位时间内流过单位横截线上的电荷 (注意, 这时已不存在横截面, 代替它的是横截线). 以后我们将看到, 面电流常在磁介质以及理想导体的表面上出现.

1.1.5 安培-毕奥-萨伐尔定律 静磁场

人们发现, 当电流处在其他电流附近时, 它会受到作用力. 我们称这种 "电流处在其中会受到力的" 空间为磁场. 同电场一样, 在这里磁场也还只是作为处理问题的手段而引入的, 更本质的意义, 亦留待以后讨论.

如果磁场不随时间变化, 就称为静磁场.

考察一个稳定的电流分布. 实验表明, 此分布中任何电流元 $\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau$ 所受的作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau \times \int \frac{\boldsymbol{j}(x') \times \boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau', \tag{1.1.18}$$

其中 k 为比例常数; $\boldsymbol{R}$ 为自 x' 到电流元 $\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau$ 的距离; 积分区域为全部有电流存在的空间. 这个定律我们称为安培–毕奥–萨伐尔定律. 注意到 $\boldsymbol{j}$ 的量纲是 [电荷密度]×[速度], 在电荷密度的量纲已按静电单位制确定了的情况下, $\boldsymbol{j}$ 的量纲就已经确定. 将式 (1.1.18) 与库仑定律相比较, 立即看出, k 应具有 [速度]$^{-2}$ 的量纲, 它的数值可以通过实验来测定. 由实验定出的结果是, k 正好等于 $\frac{1}{c^2}$, c 为光在真空中的速度. 作为电流受力公式中的比例常数 k, 竟然与光速 c 相联系, 是一个值得十分注意的情况. 实际上, 它已是光与电磁现象有本质联系的初步显示.

将 k 的数值代入式 (1.1.18), 得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau \times \int \frac{\boldsymbol{j}(x') \times \boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau'. \tag{1.1.19}$$

此式又可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau \times \boldsymbol{B}, \tag{1.1.20}$$

其中

$$\boldsymbol{B}(x) = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(x') \times \boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau' \tag{1.1.21}$$

称为 x 点的磁感强度, 它与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的地相位当, 只是由于历史上的原因而没有称作磁场强度①. 我们在式 (1.1.20) 右方放置了一个因子 $\frac{1}{c}$, 以使得 $\boldsymbol{B}$ 的量纲与 $\boldsymbol{E}$ 的相同.

从式 (1.1.20) 我们看出, $\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau$ 在给定的磁场中某点所受的力, 不仅与 $\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau$ 的大小有关, 而且与它的方向有关. 当 $\boldsymbol{j}$ 与该点的 $\boldsymbol{B}$ 正好同向或正好反向时, 所受的力即等于零.

1.1.6　磁偶极矩和磁偶极子

一个稳定电流分布的磁偶极矩的定义是

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}(x')\mathrm{d}\tau', \tag{1.1.22}$$

其中 $\boldsymbol{r}'$ 代表从某参考点 (如原点) 到 x' 的距离②. 如果与力学中的力矩相比较, 可以看出, $\boldsymbol{m}$ 实际上就是电流矩, 只是多引入了一个常数因子 $\frac{1}{2c}$ 而已. 引入 $\frac{1}{c}$ 的原因, 是为了使磁偶极矩与电偶极矩具有相同的量纲.

① 参见 3.2 节 3.2.2 小节.

② 不难证明 $\boldsymbol{m}$ 实际上与参考点的位置无关, 参见下文.

在电流是沿导线圈流动的情况中, 磁偶极矩化为

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2c}\oint \boldsymbol{r}'\times I\mathrm{d}\boldsymbol{l}', \tag{1.1.23}$$

上式可看作是将式 (1.1.22) 对导线横截面积分后的结果: $\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau'$ 在对横截面积分后就给出 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$. 由于稳定时 I 是常数, 而 $\frac{1}{2}\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 等于面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$, 故式 (1.1.23) 可化为

$$\boldsymbol{m}=\frac{I}{c}\boldsymbol{S}, \tag{1.1.24}$$

其中

$$\boldsymbol{S}=\int \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'. \tag{1.1.25}$$

上式右方的面积分是在以该线圈为边缘的任一曲面上进行的. 由于式 (1.1.25) 右方为面积元的矢量和, 故其结果并不依赖所取曲面的具体形状, 而只由其边缘决定.

一个稳定的电流分布, 总可按照流线分成为许多细电流圈, 因此式 (1.1.22) 所定义的 $\boldsymbol{m}$, 实际上也与参考点的选取无关.

像电偶极子一样, 我们称一个 "点磁偶极矩" 为磁偶极子. 磁偶极极子在磁场中亦会受到一个力矩, 其值为

$$\boldsymbol{L}=\int \boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\frac{1}{c}\int \boldsymbol{r}'\times[\boldsymbol{j}(x')\times\boldsymbol{B}(x')]\mathrm{d}\tau'.$$

通过矢量运算, 并注意到对于 "点磁偶极矩" 积分域的线度是趋于零的, 可将上式化为 (具体推导可参见 3.2 节)

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}. \tag{1.1.26}$$

此结果与电偶极子在电场中所受的力矩相似. 于是一个在磁场中能够自由转动的磁偶极子, 平衡时 $\boldsymbol{m}$ 所指的方向同样[①]就是该点 $\boldsymbol{B}$ 的方向, 而单位磁偶极子在该点所受力矩的最大值同样也就是 $\boldsymbol{B}$ 的数值. 我们也可以用这种方式来定义 $\boldsymbol{B}$. 对于随时间变化的磁场, 这种定义也适用, 只是试探磁偶极子本身要是稳定的.

1.1.7 法拉第定律

随着实验进一步发展, 人们又观察到, 当磁场随时间变化时, 必然伴随着有电场出现. 当时认为, 这种电场是由变化的磁场感应出来的, 所以称它为感应电场. 这种说法现在看来虽然并不确切 (从根本上说, 电场和磁场都是由运动的电荷产生的只是两者的变化有一定的联系), 但因在似稳时, 这种说法能表示出现象的某些特点, 并具有一定的方法上的意义, 所以在似稳范围内仍一直在沿用.

关于上述 "电磁感应" 现象, 法拉第从实验中总结出下列定律:

① "同样" 是说与电偶极子在电场中的情况相同.

沿任何封闭曲线的电场环量 (即电场沿该曲线的积分), 与通过“该封闭曲线所张”曲面的磁感通量的减少率成正比.

所谓一个封闭曲线所张的曲面, 就是指任一个以该封闭曲线为边缘的曲面, 曲面的正向是取得与封闭曲线的回向合乎右手螺旋关系. 法拉第定律用数学表示出来即为

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \tag{1.1.27}$$

其中 S 为封闭曲线 L 所张的曲面. 上式中的比例常量为 $\frac{1}{c}$ 是由实验测定的①.

法拉第定律是在似稳范围内总结出来的实验定律. 所谓似稳, 粗略地说, 就是电流随时间的变化较慢, 因而许多情况的特点与稳定电流有相似的地方.

在本节中, 我们看到, 不仅电荷流动时会产生磁场, 而且磁场变化时又会“感应”出电场. 这表明电场和磁场是非常紧密相关的. 在 1.2 节中, 我们还将看到, 变化的电场也会“感应”出磁场, 进一步显示出电磁现象间的本质联系.

1.2　麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式

在 1.1 节里, 我们概括地叙述了电磁现象的一些实验定律, 这些定律适用的范围各不相同. 在本节里, 我们的任务是寻求电磁现象的普遍规律, 它应适用于任意变化的情况, 而静电、静磁和似稳状态作为它的特例当然也包含于其内.

在电磁场随时间迅速变化的情况下, 要精确测定每一点每个时刻场的值, 在技术上是很困难的. 因此, 普遍的规律不像在静电和静磁情况那样容易直接从实验得出. 法拉第定律之所以在实验测定上不太困难, 一方面是因为似稳情况变化较慢, 另一方面该定律并不确定每点的电场, 而只确定沿封闭曲线的电场环量即所谓的“感应电动势”, 这就在技术上要容易得多. 至于其中的磁场, 则是利用变化较慢的条件, 根据每个时刻的电流分布按安培–毕奥–萨伐尔定律来确定的.

根据上面所述的情况, 为了得到普遍的规律, 就必须发挥思维的能动作用, 尽量利用已知的特殊情况下的实验结果, “由此及彼”地从其中得到普遍性的规律.

怎样才能从个别的、特殊的规律得到一般的、普遍的规律呢? 这就需要对它们进行一分为二的分析. 因为一般性的东西是包含在各个特殊性的东西之中. 特殊的规律虽有它的特殊性, 但必然含有一定的普遍性因素. 通过分析和比较, 就可能分辨出, 哪些内容是反映特殊情况的特点, 哪些内容则可能具有普遍的意义.

---

① 由于 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 量纲相同 (见式 (1.1.21) 下). 故式 (1.1.27) 右方的比例常量量纲为 [速度]$^{-1}$, 其值测出为 $\frac{1}{c}$(c 为真空中光速, 见式 (1.1.18) 下), 同样也是光与电磁现象有本质联系的某种显示.

1.2.1 对库仑定律的分析

库仑定律给出的电场公式是

$$\boldsymbol{E}(x)=\int \frac{\rho(x')\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\boldsymbol{x}'. \tag{1.2.1}$$

这个公式的内容可以分解成下述三个因素 (说明见下文):

(1) 在空间每点, $\boldsymbol{E}$ 的旋度都等于零, 即

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0, \tag{1.2.2}$$

(2) 在空间每点, $\boldsymbol{E}$ 的散度等于该点 ρ 的 4π 倍, 即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho, \tag{1.2.3}$$

(3) 当电荷分布于有限空间范围内时, 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的数值在 ∞ 处以 $\dfrac{1}{r^2}$ 或更快的速度趋于零, 即

$$E\sim O\left(\frac{1}{r^2}\right),\ \text{当}\ r\to\infty\ \text{时}. \tag{1.2.4}$$

从式 (1.2.1) 可以导出这三点, 反过来, 从这三点也可推出: 分布于有限空间范围内的电荷的电场表达式就是式 (1.2.1). 这就说明, 这三点已全部概括了式 (1.2.1) 的全部内容. 下面再分别予以说明.

第一点, 即式 (1.2.2). 它等效于说, 静电场是一个保守场, 亦即对任何回路

$$\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0. \tag{1.2.5}$$

关于式 (1.2.2) 同 (1.2.5) 的等效性, 可以从矢量分析中的斯托克斯定理来证明, 因此, 我们只要从式 (1.2.1) 推出式 (1.2.5) 就行了. 对于一个点电荷所产生的电场, 不难通过直接的计算来证明式 (1.2.5). 这在普通物理中已经学过, 就不再重复. 至于一个体分布的电荷, 则可以分成为许多小电荷元, 对每个小电荷元应用点电荷的结果, 就可得出式 (1.2.5).

另外, 直接对式 (1.2.1) 取旋度, 利用对 x 的微分与对 x' 的积分的次序的可交换性, 以及公式

$$\nabla\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=0, \tag{1.2.6}$$

亦可得出式 (1.2.2). 式 (1.2.6) 可用直接的计算来证明. 这两种方法实质上是一样的.