高等学校教材

线性代数

邵建峰　杨兴东　刘　彬　主编

高等教育出版社
Higher Education Press

高等学校教材

线性代数

邵建峰　杨兴东　刘　彬　主编

高等教育出版社

内容提要

线性代数是大学数学教育中的重要基础课程之一。本书是为满足社会对应用型人才培养的各类需求，紧密配合“质量工程”的实施，以相应的教学内容与课程体系改革为载体，以切实提高应用型人才培养质量为目标，并参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求(征求意见稿)》编写而成的。

本书共分七章，主要内容包括行列式、矩阵的基本概念及其运算、矩阵的初等变换与初等矩阵、n 维向量空间、线性方程组解的结构与求解方法、矩阵的特征值与特征向量以及矩阵的对角化、二次型及其标准化、线性空间与线性变换等。在第二、三章末，介绍了 MATLAB 软件与编程方法。书后附课程实验与附录。在课程实验部分，设计了两个单元的 MATLAB 系列实验与练习。在附录中，提供了五个线性代数应用案例并讨论了其建模与编程求解方法。

本书可作为高等院校理工科与经济、管理等学科线性代数课程的教材，也可作为工程技术人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数／邵建峰，杨兴东，刘彬主编．—北京：高等教育出版社，2009.7

ISBN 978-7-04-027256-7

Ⅰ.线…　Ⅱ.①邵…②杨…③刘…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 090017 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2009 年 7 月第 1 版
印　　张	16.75	**印　　次**	2009 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	310 000	**定　　价**	18.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　27256-00

总　　序

为满足社会对应用型人才培养的各类需求，紧密配合“质量工程”的实施，深入探讨应用型人才培养以及相应的教学内容与课程体系改革工作，切实提高应用型人才培养质量，以全国高等学校教学研究中心批准立项的全国教育科学“十一五”国家课题——“我国高校应用型人才培养模式研究”为载体，由南京工业大学牵头，南京信息工程大学和江苏大学共同参与策划了本系列教材的结构和内容体系。

本系列教材包括高等数学、线性代数和概率论与数理统计三本，全部内容讲解约需260学时，其内容体现出教学改革的成果和教学内容的优化，特点如下：

1. 思路清晰、逻辑严谨、概念准确、便于自学；

2. 适当降低理论深度，消减了一些枝节内容，突出数学知识实用的分析和计算方法，着重基本技能的训练，不过分追求技巧；

3. 强调教学内容的思想性，着力揭示基本概念的本质和解决问题的思想方法；

4. 注意应用基本理论和基本方法分析解决实际问题的思想方法的讲解，培养学生应用数学方法解决实际问题的能力；

5. 各章节习题作了分类编排，每章均配有本章小结和复习练习题，以利于学生复习巩固所学知识；

6. 根据内容特点，引入数学软件 Mathematica 和 MATLAB 的介绍，并给出了有关案例应用，使学生能较早地接触数学软件的学习，为今后应用数学软件解决实际问题打下基础。

本系列教材的编写得到全国高等学校教学研究中心“十一五”国家课题“我国高校应用型人才培养模式研究”的重点课题资助和高等教育出版社高等理工中心教学分社的领导和编辑们的大力支持，在此表示衷心感谢。

应用型本科数学系列教材编委会
2009年3月

前　言

线性代数是大学数学教育中一门重要的基础课程，是理工科大学生学科知识结构中的一个重要环节，同时也是用数学知识解决实际问题的一个强有力的工具。本书是为满足社会对应用型人才培养的各类需求，紧密配合"质量工程"的实施，以相应的教学内容与课程体系改革为载体，以切实提高应用型人才培养质量为目标而编写的。

本书的编写是按照《工科类本科数学基础课程教学基本要求（征求意见稿）》进行的。首先考虑到作为大学理工科与经济管理等学科线性代数课程的教材，课内学时一般在40学时左右，所以我们无论是在章节安排还是在具体内容取舍上，都注意简洁明了。编写过程中充分考虑到工科大学生的知识基础。在教材内容上以基本概念与基本方法为核心，力求做到重点突出，简明扼要，清晰易懂，便于教学。在习题配备上，也注意到了概念性、方法性、综合性以及应用性等多个方面。

在编写的过程中，也努力作了一些改革的尝试。我们希望把线性代数课程教学与学生能力的培养更紧密地结合起来。为了增强学生应用数学知识与数学软件的能力，在本书有关章节，我们给出了线性代数基本知识的应用问题举例，希望这些实际应用性例子能够拓展学生的思路，增强学生学习线性代数课程的兴趣。同时在适当章节中，以循序渐进的方式、简要地介绍了工程数学软件MATLAB在线性代数运算方面的基本功能与编程实现方法，力求解决大学生中常见的学习、运用软件入门难的问题。在课程实验部分，不仅是对课程知识的巩固与提高，同时也是进一步加强学生运用MATLAB方法解决实际问题的能力。在最后的附录部分，给出了线性代数的几个应用案例以及这些问题的编程实现过程。

把数学实验的思想引入到数学基础课程教学之中，把课程教学与实验教学和应用性教学有机地结合在一起，逐步培养学生应用数学知识、运用计算机方法和使用已有的软件来解决实际问题的能力，应该说是值得重视的教学环节。

本书共分七章，外加课程实验与附录。前七章主要介绍了行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、线性空间、线性变换的基本概念以及行列式计算，矩阵运算，线性方程组求解，特征值与特征向量计算和二次型标准化方法等线性代数传统内容。在第一、四、六章的末尾，我们介绍了相应章节线性代数知识的实际应用。在第二、三章之后，简要介绍了工程数学软件

MATLAB 的基本功能与编程方法。在课程实验部分给出了两个单元的上机练习指导。在附录中,我们介绍了五个应用案例与 MATLAB 编程求解。对每章的习题,书后给出了习题答案。

本书第一、三章,第二章的第七节(MTATLAB 软件简介),第四章的第三节(矩阵与方程组应用举例)以及课程实验与附录部分均由邵建峰编写。第二章与第四章的其余部分由杨兴东编写。第五、六、七章由刘彬编写。由于时间仓促和编者水平所限,错漏之处不可避免,还望使用本书的老师与学生批评指正。

本书的出版得到了高等教育出版社与编者所在学校的大力支持。在此谨对在本书编写与出版过程中给予支持和帮助的以上有关部门表示感谢。

编者
2009 年 3 月

目　录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数中的一个基本工具. 在初等数学里已经介绍过二阶、三阶行列式,现在为了研究 n 元线性方程组,需要进一步讨论 n 阶行列式. 本章将在二阶、三阶行列式的基础上,给出 n 阶行列式的定义并讨论其性质与计算. 作为行列式的初步应用,还将解决一类 n 元线性方程组的求解问题. 最后,讨论行列式知识的有关应用.

第一节　n 阶行列式

在讨论一般 n 阶行列式之前,先简单回顾一下二阶、三阶行列式.

一、二阶、三阶行列式

在初等数学中,二阶、三阶行列式的概念是在线性方程组的求解中提出的. 例如,对于一个二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,求得解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

从二元线性方程组解的形式可以发现,如果引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc \tag{1.3}$$

则(1.2)式可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

我们把按(1.3)式规定其值的,由 a,b,c,d 四个数构成的两行两列的式子

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

叫做二阶行列式.用二阶行列式来表示二元线性方程组的解,其形式确实简洁明了.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ 3x_1+4x_2=1 \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{2}$$

类似地,如果在求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的过程中引入下列三阶行列式的记号,并规定其值:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.4}$$

则当三元线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

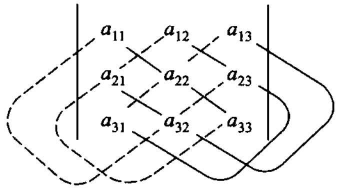
时,用消元法求解这个方程组可得

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.5}$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 是用常数项 b_1,b_2,b_3 替换 D 中的第 j 列所得的三阶行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

在(1.4)式中三阶行列式的展开式可以用所谓**主、副对角线法则**得到：



其中每一条实线上的三个元素的乘积带正号，而每一条虚线上的三个元素的乘积带负号. 所得六项的代数和就是三阶行列式的值.

例 2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解　$D=1\times2\times1+1\times(-1)\times1+0\times3\times3-1\times2\times3-1\times3\times1-0\times(-1)\times1$

$=-8$

但是需要指出的是：主、副对角线法则不易于向 n 阶行列式($n\geqslant3$)推广. 例如，在下列 4 阶行列式中

$$D=\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boxed{a_{34}} \\ a_{41} & a_{42} & \boxed{a_{43}} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$这一项是来自于不同行与不同列的 4 个元素的乘积，但是其中元素 $a_{11}a_{22}$在主对角线方向上，而 $a_{34}a_{43}$则在副对角线方向上. 该项带有什么符号，用主、副对角线法则就不好确定了.

事实上，二阶、三阶行列式还有这样一个规律，它们都可以按第一行展开得到行列式的值. 例如对三阶行列式有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \tag{1.6}$$

其中 A_{11}, A_{12}, A_{13}分别是第一行元素 a_{11}, a_{12}, a_{13}的代数余子式：

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=-(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) \tag{1.7}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$$

这一展开的规律启示我们：对一般的 n 阶行列式，可以像(1.6)式、(1.7)式那样，用低阶行列式去定义高阶行列式. 这样的定义方式具有内在的一致性. 对于用这种方法定义的各阶行列式必然会有许多共同的性质和统一的计算方法.

二、n 阶行列式

现给出 n 阶行列式的归纳式定义.

定义 1 由 $n\times n$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的具有 n 行 n 列的式子

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=|a_{ij}|_{n\times n}$$

叫做 n 阶**行列式**(determinant)，并且规定其值为

(1) 当 $n=1$ 时，$D=|a_{11}|=a_{11}$；

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时，$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$ (1.8)

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，而

$$M_{1j}=\begin{vmatrix}a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

并称 M_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的**余子式**(cofactor)，A_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的**代数余子式**(algebraic cofactor).

由行列式的定义，它的值为 n^2 个元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的乘积构成的和式，称为**行列式的展开式**. 显然其有下面的性质：

性质 n 阶行列式 D 的展开式中有 $n!$ 个项，每项都是来自于行列式的不同行，不同列的 n 个元素的乘积.

证 对该性质不难用数学归纳法给予证明.

(1) 当 $n=1$ 时,结论显然成立;

(2) 假设对 $n-1$ 阶行列式结论也成立. 则对 n 阶行列式 D,由(1.8)式

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

和归纳假定可知,行列式 D 的第一行每个元素 a_{1j} 的代数余子式 A_{1j} 均为 $n-1$ 阶行列式,因而它的展开式中有 $(n-1)!$ 项,而且每一项都是来自于除第一行和第 j 列以外的 $n-1$ 个不同行、不同列的元素的乘积. 将 D 的第一行 n 个元素的所有代数余子式 A_{1j} 代入展开式(1.8)中,易知这样产生的所有项都互不相同,并且可得到:n 阶行列式 D 的展开式中确实有 $n\times(n-1)! = n!$ 项,且每项都是来自于不同行不同列的 n 个元素的乘积.

综合上述,性质得证.

此外,我们实际上还可证明:在行列式的展开式中带正号的项和带负号的项各占一半. 证明留给大家.

例 3 计算 n 阶**上三角形行列式**(upper triangular determinant)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由行列式定义,按第一行展开时,元素 $a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}$ 的余子式皆等于零. 所以

$$D_n = a_{11}\times(-1)^{1+1}\times M_{11} = a_{11}\times M_{11}$$

并且元素 a_{11} 的余子式 M_{11} 仍然是上三角形的,以此类推,得

$$D_n = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地,对下列**(主)对角行列式**(diagonal determinant),有

$$\overline{D}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 阶行列式的定义,可以得到

$$D_n=a_{1n}\times(-1)^{1+n}\times M_{1n}$$

注意到上式右端中余子式 M_{1n} 是 $n-1$ 阶行列式,而且有与 n 阶行列式 D_n 同样的形式,反复利用行列式定义去展开,有

$$\begin{aligned}D_n&=(-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}\cdot a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}\\&=(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{(n-1)-1}\cdots(-1)^{2-1}\cdot a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}\end{aligned}$$

值得注意的是:这个 n 行列式 D_n 的值并不总等于 $(-1)a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

例 5 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&0&2\\-1&0&1&0\\1&0&3&1\\0&1&0&0\end{vmatrix}$$

解 $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$

$$=1\times\begin{vmatrix}0&1&0\\0&3&1\\1&0&0\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\0&0&0\end{vmatrix}+0-2\times\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&0&3\\0&1&0\end{vmatrix}$$

$$=1\times1-0+0-2\times4=-7$$

我们看到,该行列式的第四行中零元素比第一行中零元素还要多.如果能够按照第四行去展开,那计算不是更加简单吗?事实上,行列式不但可以按第一行元素展开,而且也可以按第一行以外的任一行或者任一列去展开,其结果都是相同的,即有

定理 1 n 阶行列式 D 等于它的任一行(列)元素与它们所对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.9}$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.10}$$

定理的证明略去.

在前述例 5 中,按第四行元素去展开行列式,就得到

$$D=1\times(-1)^{4+2}\times\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&1&0\\1&3&1\end{vmatrix}=-7$$

这与按 n 阶行列式定义计算的结果是一致的.

第二节　n 阶行列式的性质

由行列式的定义可知，当行列式阶数 n 较大时，直接用定义计算行列式是较为繁琐的. 下面介绍行列式的一些性质，以此简化行列式的计算.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 中的行与列互换，所得到的行列式记为 D'（或 D^{T}），即

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式 D'为行列式 D 的**转置行列式**（transposed determinant）.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　对行列式的阶数 n 用数学归纳法.

（1）当 $n=2$ 时，命题显然成立；

（2）现假设对 $n-1$ 阶行列式命题成立，下证对 n 阶行列式命题也成立. 事实上，若将 D 和 D'分别按第一行和第一列元素展开，有

$$D=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot(-1)^{1+k}M_{1k} \tag{1.11}$$

$$D'=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}B_{k1}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot(-1)^{k+1}N_{k1} \tag{1.12}$$

其中 A_{1k}，M_{1k}是 D 的第一行元素的代数余子式和余子式；B_{k1}，N_{k1}是 D'的第一列元素的代数余子式和余子式.

M_{1k}，N_{k1}都是 n−1 阶行列式，而且显然可看出 N_{k1}是 M_{1k}的转置行列式. 由归纳假设知 $N_{k1}=M_{1k}$（$k=1,2,\cdots,n$）成立，从而由(1.11)式、(1.12)式得 $D=D'$，即命题对 n 阶行列式也成立.

综合上述，命题得证.

性质 1 说明，行列式中行和列的地位是对称的. 行列式关于行成立的性质对于列也同样成立. 反之亦然.

性质 2　互换行列式中两行（或互换两列），行列式变号.

证 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

互换第 i 行与 j 行($1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j$),得

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

下面用数学归纳法证明$\overline{D}=-D$.

(1) 当 $n=2$ 时,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}$$

显然$\overline{D}=-D$.

(2) 假设对阶数小于 n 的行列式,结论皆成立,下证对 $n(\geqslant 3)$阶行列式命题结论也成立.

注意到行列式 D 与$\overline{D}$中除去第 i 行与第 j 行的位置互换外,其余各行均相同.取定一个 $k(k\neq i,j)$,并将行列式 D 与$\overline{D}$都按第 k 行展开,由第一节定理 1 的结论,得到

$$D=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A_{kl}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\cdot(-1)^{k+l}M_{kl} \tag{1.13}$$

$$\overline{D}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}B_{kl}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\cdot(-1)^{k+l}N_{kl} \tag{1.14}$$

其中 A_{kl},M_{kl}是 D 的第 k 行元素的代数余子式和余子式;B_{kl},N_{kl}是$\overline{D}$的第 k 行元