高等學校教學用書

集與函數的汎論初階

上册

П. С. АЛЕКСАНДРОВ 著
楊 永 芳 譯

商務印書館

高等學校教學用書

集與函數的汎論初階

上　册

П. С. 亞歷山大羅夫 著
楊　永　芳　譯

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）印行的亞歷山大羅夫與柯爾莫哥羅夫（П.С.Александров и А. Н. Колмогоров）共編“集論與函數論初階”（Введение в теорию множеств и теорию функций）的第一卷，卽亞歷山大羅夫所著的“集與函數的汎論初階”（Введение в общую теорию множеств и функций）1948年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等學校教學參考書。

本書共七章及若干之補充，中譯本分上下兩册出版。

本書由西北大學楊永芳翻譯。

集與函數的汎論初階

上 册

楊永芳譯

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

（上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號）

新華書店總經售

商務印書館北京廠印刷

〔52714•1A〕

1954年4月初版　　版面字數147,000

1955年8月再版　　印數3,501—4,500

印張5 5/8　　定價（8）¥0.87

序　　言

集論對數學最近半世紀的發展上的巨大影響，今日已是舉世公認的事實；因而自然地，不論是在大學或在高等師範學校的數學教學中，集論的思想都佔有了極其重要的位置。今日的數學分析課程本身已受到集論的顯著影響，這種影響特在近年來爲尤甚*）。並且多數大學設有集論與函數論的專門課程；這種課程已被列入高等師範學校的教學大綱中。然按今日佔優勢的傳統習慣，集論與函數論的課程幾乎無例外地被置於舊有的實變函數論的一門內，恰如這種理論之在莫斯科大學函數論學派的那種情況。這種傳統曾在我們數學文化的發展中起過巨大的作用，我們的大學正在開設而且還要繼續開設特爲講授實變函數論或是其中部分材料的課程，不待說，乃是極其自然的。然今日在實變函數論裏未必能見到基本上是運用集論思想與方法的地方，從而未必能認識到這種思想的基本源泉。須知集論所影響的範圍越來越廣闊，而這個影響的重心，在最近數十年來已顯著地與所謂"古典的"實變函數論分了家，而另行發展了。即在數學分析中早已不能使用由實數及複數所構成的單獨一個集了；不同類型的汎函數（一般所謂"抽象的"）空間（不論是拓樸性的，或是計量性的）在數學分析以及類如動力學、概率論等課目的現代構成中早已佔有了鞏固的位置，不再重提舊來的汎函數分析了，雖其重要性在我們這時代的數學一般體系上不斷的在加強，例如僅就定義在實數直線上的函數敍述勒貝克積分理論的話，今日說來，已是落後於時代的了。

還有更落後的是在點集與函數理論的課程裏，例如僅就定義在數

*）我們特別期待像費乾高利茲教授的那樣分析教程的出現，本書的下一版設法使其徹底不用無理數論。

直線上或是其區間上的連續函數敍述其基礎性質；因此為證明這些性質，僅是先從一個實變數的函數說起，其次兩實變數的函數，再次一個複變數的函數，最後是定義在密緻函數族的汎函數等，代替了對於定義在密緻計量空間函數的一舉而下的證明。一般說來，計量（而特別突出是拓樸的）空間的概念，今日已經獲得數學家的公認，以致如果僅限於數值線或竟至 n 維歐氏空間的話，就不足以說明點集與函數理論的基本問題了。為證實此事，至少可舉不久以前出版的 B. B. 涅梅茲基與 B. B. 斯切巴諾夫的微分方程性質論的書，而實質是研究分析問題，著者不得不用整個一章來講計量空間內的集，這是讀者可從任何一本集與函數理論的教程內求得到的。

所述的內容，預想我們所取的前提具有十足廣汎的一般性，第一卷論述集與函數理論的一般問題，而在第二卷內論述量與積分的理論。

然而前提的一般性，唯有能使讀者逐步前進，也就是能瞭解其自然性的時候，才算是有教育意義的。為達此目的，我們在第一卷選取了使前提逐漸擴大的方針。這麼，讀者在第四五兩章將見到直線上(一部分是平面上)點集論元素的超限記述，以及實變數的實函數之基本命題。唯有待六七兩章才能了解計量空間的一般場合，而在這兩章的補充又能瞭解到柘樸空間。由於材料之適當安排，敍述的某種“集中”似乎還能顯示一種優越性：較比基本的幾章，即第一、第二、第四與第五數章自身就構成了一個連貫的整體，並且能供作高等師範學校集論與實變函數論的教程。而在其餘各章能有豐富的材料以供高等師範學校學生的各種選課之用，當採用此書的時候，還應注意包含於普通分析教程裏的第二章全部材料以及第四五兩章的一部分。

此書的第一卷由 П. С. 亞歷山大羅夫執筆。

由 А. Н. 柯爾莫哥羅夫所執筆的第二卷論述問題的更特殊範圍：附有直交函數系應用的，量與勒貝克積分理論與對稱核的積分方程理論。量與勒貝克積分理論主要是由於純粹邏輯程序的興趣而產生：為要闡

明古典分析學一般化了的基礎概念的自然境界。關於此事所建立起來的概念乃是廣大的一般性與廣大的單純性的相結合：實質上包含着不論是通常意義的，還是斯梯爾梯斯意義的，一變數與多變數函數的古典積分理論的，一般勒貝克積分理論顯見地比這些陳舊理論的總彙合要簡單，而且竟至比其中個別的每一種也要簡單。一般勒貝克積分（在任意性質元素的集上及採用任何種的抽象量）在數學各種不同的領域內，已成爲今後作研究的極端有力的工具。就是在這種一般的，而且照顧各面應用的形式之下，我們這部教程的第二卷敍述量論與勒貝克積分論。因此第二卷主要是以大學數學學生的利益爲主旨，爲的他們要以量與勒貝克積分爲學習汎函數分析的概率論與動力學等科學的必要工具。逐漸明瞭起來了，指向這同一方面的量與勒貝克積分課程完全成了理論物理專家與力學專家所更加需要的。這種趨勢已實現於列寧格勒大學的 B. H. 斯米爾諾夫力學系的數學分析課程以及莫斯科大學理論物理系特別加修課程。

當編纂此書時，我們得到我們同事 Л. Д. 庫得利牙切夫與 Ю. М. 斯米爾諾夫（對於第一卷）、A. A. 彼特羅夫（對於第二卷）很多的援助，我們應當感謝他們很多有益的意見與校正，特此表達衷心的謝忱。我們同時也對總編輯 Д. A. 拉依扣夫不勝感謝，因爲他曾提出關於第一卷的文章結構上的一系列的建議；這些建議都是關切與幫助，我們認爲大大改善了這本書。

П. 亞歷山大羅夫

A. 柯爾莫哥羅夫

上册目錄

第一章　無限集

§ 1. 集的概念

我們隨時隨地都要碰到用"總合"二字所表示的一種難以定義的概念。譬如說罷，在一定時刻，居於一定房舍的人的總合，在一池塘游泳着的鵝的總合，生存於撒哈拉大沙漠的駝鳥的總合等。

在這些例子裏面，全可用一個字"集"，來代替總合。

在數學裏，常要涉及各種不同的集：例如，任一多角形的頂點的集，由 13 個元素取 7 個所作組合的集等。

所舉的這些集的例子具有一個極重要的特性：所有這些集都是由一定有限個元素所組成；這句話的意義是，在上述的每種場合，對於"有多少"的問題（房舍之內的人，池塘裏的鵝，由 13 個取 7 個的組合），我們都能回答，有時直接用明確的整數（例如由 13 個取 7 個的組合數是 $\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}=1716$）來回答，而有時却必須指出：每種場合都有回答問題的一個整數，但因在一定時刻和一定情況之下，爲我們的知識所限，也許不能答出其究竟如何。由有限個元素所組成的集叫做**有限集**。

在數學裏要時常碰到另外一種，就是非有限的，也就是通常所說的**無限集**。比方，一切自然數的集，一切偶數的集，用 11 除而剩餘爲 7 的一切數的集，在一平面上經過一定點的一切直線的集，就是這樣的例子。

我們把空集,就是連一個元素也不包含的集,當作有限集看待;空集元素的數目是零。空集實有考慮的必要,因為依據某種方法定義一個集的時候,我們事先不能肯定它是否眞地含有一個元素。例如,在一定時間,從北極圈所能找到的駝鳥的集,想必是空的;但是我們也不能十分肯定這一事實,因為也許會有某船長把駝鳥運送到了北極圈。

空集用 Λ 表示。

§ 2. 子集·對於集的運算

現在導入下列基本的記號與概念。

為得表示,x 是集 A 的元素,寫做 $x \in A$ 或 $A \ni x$(同時表示集常用大寫字母,而其元素則用小寫的)。

定義 1. 如果集 A 的每個元素同時又全是集 B 的元素的話,集 A 叫做集 B 的部分或子集。

例如,一切偶數的集就是一切整數的集的部分,為要說明,集 A 是集 B 的部分,却常轉說,集 A 包含在集 B 裏,或說 A 含於 B,並且記作

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A.$$

如果 A 是 B 的子集,而且 $A \neq B$ 的時候,則寫

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A.$$

記號 $\subseteq, \subset$ 叫做包含記號(一個集對另外一個說)。

根據我們的定義,任何集 A 都是它自己的子集。此外,空集是任何集的部分。集 A 與空集叫做集 A 的非原有的子集;一切其餘的子集都叫做原有的。

假定現有一些集 M_α*) 的(有限或無限)總合。我們考慮那些至少屬於一個,而加入這個總合的,集的元素。一切這樣元素的集,叫做組成這個總合各集的和(或聯合)。

---

*) 標數 $\alpha, \beta, \cdots$(當能,譬如說,取數值 $1, 2, 3, \cdots$)是為的分別該總合的不同元素。例如,我們說該總合的集 M_α, M_β, M_γ 等。

集的和用記號 $\bigcup$ 表示；例如，$A\bigcup B$ 是集 A 與 B 的和；這集總合裏一切集 A_α 的和，用 $\bigcup_\alpha A$ 表示（特別有：$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=A_1\bigcup A_2\bigcup A_3\bigcup\cdots\cdots$）。

比方說，一切整數的集是一切偶數的集與一切奇數的集的和，同時也是下列各集的和：

不能被三除盡的，一切奇數的集 M_1；

一切偶數的集 M_2；

能被三除盡的，一切數的集 M_3

（這時集 M_2 與 M_3 具有共同元素——被 6 除盡的數）。

現在考慮集的減法運算。假設現有二集 A 與 B（其中的第二個也可能不含在第一個內）。那些屬於集 A 而不屬於集 B 的元素的集，叫做集 A 與 B 的差。集 A 與 B 的差用 $A\setminus B$ 表示。

我們轉到集的第三個，即最後的一個基本運算——就是取集的共同部分或是交的運算。假設我們重新又有集 A_α 的有限或無限的總合。那些包含在一切所給集之內的元素的集（一切集 A_α 的共同元素的集），叫做這些集的共同部分或**交**。

交用記號 $\bigcap$ 表示；這麽，例如，$A\bigcap B$ 是集 A 與 B 的交。這集總合內一切集 A_α 的交用 $\bigcap_\alpha A_\alpha$ 表示；特別有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=A_1\bigcap A_2\bigcap A_3\bigcap\cdots\cdots$。

例

1. 用 A_n 表示絕對值小於 $\frac{1}{n}$（n 是自然數）的，一切有理數的集。一切集 A_n 的交 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 是由一數 0 所構成。

2. 用 A_n 表示小於 $\frac{1}{n}$ 的，一切**正**有理數的集。在這種場合，一切集 A_n 沒有一個共同元素，就是一切集 A_n 的交是空集。

在加法，相交與減法運算明確的性質裏，特別提出：

交換律：

$$A\bigcup B=B\bigcup A;\quad A\bigcap B=B\bigcap A.$$

結合律:

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C,$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C.$$

分配律(關於加法的相交):

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$

一般地

$$(\bigcup_{\alpha}A_{\alpha})\cap B=\bigcup_{\alpha}(A_{\alpha}\cap B),$$

其次

$$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus B=(A\cap C)\setminus(B\cap C),$$
$$A\setminus B=A\setminus(A\cap B),$$
$$A=(A\cap B)\cup(A\setminus B).$$

下列以(關於加法與相交的)雙對關係爲名,被人所知的,重要關係也幾乎一樣的明確。

對於給定的任一集X的子集 A_{α} 的任何(有限或無限)體系,有恆等式

$$X\setminus\bigcap_{\alpha}A_{\alpha}=\bigcup_{\alpha}(X\setminus A_{\alpha}), \tag{1}$$
$$X\setminus\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}=\bigcap_{\alpha}(X\setminus A_{\alpha}). \tag{2}$$

二公式(1)與(2)的證明完全類似,而且能機械地推演出來。我們姑且證明公式(1)。

假設$x\in X\setminus\bigcap_{\alpha}A_{\alpha}$。這就說,$x$至少不屬於一個 A_{α},就是,x至少屬於一個 $X\setminus A_{\alpha}$,那麼就$x\in\bigcup_{\alpha}(X\setminus A_{\alpha})$。所以公式(1)的左端包含於右端。

反之,假設$x\in\bigcup_{\alpha}(X\setminus A_{\alpha})$;這就說,$x$至少屬於一個 $X\setminus A_{\alpha}$,因之,x 不能屬於一切的 A_{α},也就是,x 不屬於$\bigcap_{\alpha}A_{\alpha}$,那麼,$x$ 屬於$X\setminus\bigcap_{\alpha}A_{\alpha}$。所以公式(1)的右端是左端的子集。公式(1)證畢。

在本節的最後,我們敍述減小的與增加的集敍列。

集敍列

$$M_1, M_2, M_3 \cdots, M_n, \cdots \tag{3}$$

叫做減小的，或者，叫做增加的，只要對於任意的 n, 各有 $M_n \supseteq M_{n-1}$, 或者，$M_n \subseteq M_{n+1}$。這時如果對於一切 n 各有較强的關係 $M_n \supset M_{n+1}$, 或者，$M_n \subset M_{n+1}$ 的話，集敍列(3)叫做純減小的（純增加的）。

容易看出，減小的（或者增加的）集敍列(3)的任何無限子敍列的交（或者和）是與整個集敍列(3)的交（或者和）相同。

§ 3. 集與集之間的一一對應關係·一集在他集上的映像·集的子集分解

如果二集由相同數目的有限個元素而成，那麼在這二集的元素之間就能建立起來一一對應關係，這種對應關係就是，對於一個集的每個元素，他集必有一個而且止於一個元素與之對應，同時反面也眞；但如果第一集元素的數目小於第二集的話，就能在第一集與第二集的一個部分之間，建立起來一一對應關係。

一一對應關係的概念，實際上，並不豫想，凡元素之間具有這種對應關係的集必須是有限的。

我們試舉無限集之間的一一對應關係的例子。

1. 集 A 由一切正整數而成，集 B 由一切負整數而成。

顯見，我們將得到集 A 與 B 間的一一對應關係，只要對於每個正數，使有相同絕對値的負數與之對應即可。

2. 集 A 由一切正整數而成，集 B 由一切正偶數而成。我們將得到 A 與 B 間的一一對應關係，只要對於每個數 $n \in A$, 使數 $2n \in B$ 與之對應即可。

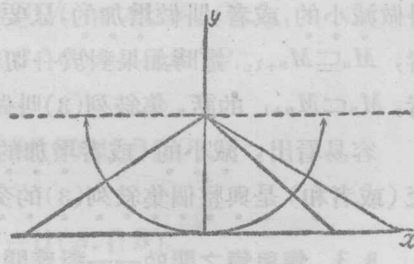
3. 集 A 由直線上的一切點而成（將取此直線爲某座標系的橫軸*)。集 B 由中心在點 (0,1) 的半圓周

$$x^2+(y-1)^2=1, y<1$$

*) 我們認爲讀者從分析敎程業已熟悉了數直線與實數的概念。下章再詳細討論實數。

上一切點而成。這半圓周的端點，卽點 $(1,1)$ 與 $(-1,1)$，不屬於它（由於條件 $y<1$）（圖 1）。

半圓周切觸我們的直線於座標原點。我們爲建立集 A 與 B 間的一一對應關係，對於直線上的每點 ξ，使圓周上的點 η 與之對應，這 η 就是聯結圓的中心與 ξ 的射線和圓周的交點。



第一圖

4. 假設 A 與 B 仍有前例所述的意義。假設 B' 是數直線上的區間 $(-1;1)$，就是在橫軸上適合不等式 $-1<x<1$ 的一切點 x 的集。半圓周 B 垂直地投射於區間 B'，並且記得，A 與 B 間已給出了一一對應關係，因此就得到數直線與其區間 $(-1;1)$ 之間的一一對應關係。由此顯見，數直線與它的任何區間之間都能建立起來一一對應關係，因而在任何二區間之間也是這樣。

在一一對應關係概念的基礎上，導入下列的：

定義 2. 兩個集叫做數量對等的，只要在它倆之間，能够建立起來一一對應關係。這樣一來，前述各個例子裏的集 A 與 B 全是數量對等的。

數量對等的集平常簡稱爲對等的集。

註 1. 關於兩個對等的集，有時說，它倆有同一的勢。

註 2. 顯見，兩個有限集成對等是當着、而且僅當着它們彼此全是由同一有限數目的元素而成。

註 3. 由上述對等的定義可知，兩個集 A 與 B 全都對等於同一第三個 C 的時候，它倆彼此之間就成對等。

註 4. 對於這樣的勢是甚麼（參看註 1）的問題，只能答以所謂“抽象的定義”：勢就是在一切對等集之間所公有的東西。我們如果再提出問題：“在一切對等的有限集之間所公有的是甚麼?”，從註 2 所述

便能推出，在有限集裏，構成一切對等集的元素的同一數目或數量就是它們所公有的。按這種意義，應用於無限集的話，勢的概念就是數量(總量數字)概念的類推*)。

定義 3. 對等於一切自然數集的集叫做可數集。

在註 3 所述事由的基礎上，我們斷定：1)任何對等於可數集的集仍是可數的，2)任何兩個可數集是對等的。

可數集的定義也可表述如次：可數集就是這樣的集 A，它的一切元素都可記上番號而排成無限敍列：

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

而且使得每個元素僅僅獲得了一個番號 n，而每個自然數 n 只能充當我們集的一個而且止於一個元素的番號。

不成可數的無限集叫做非可數集。

兩集之間的一一對應關係，或者說，一個集向另一個上的一一映像，乃是如次的一般映像概念的特殊場合：如果不論根據怎樣的辦法，對於某集 X 的每個元素 x，在某集 Y 有一確定元素與之對應，這時我們說，有一個集 X 在集 Y 內的映像，或說，有一個函數 f，其變數遍歷集 X，而其值則屬於集 Y。為得指明，這個元素 y 與元素 x 建立了對應關係，寫做：$y=f(x)$，並說，由於這個映像 f，y 是元素 x 的像。

此時能有個別不同的場合，現在論列於下。

可能發生，對於集 X 的每個元素 x，集 Y 有一元素 $y=f(x)$ 與之對應，並且集 Y 的每個元素至少對應着集 X 的一個元素。在這種場合我們說，有一個集 X 在集 Y 上的映像。

最重要的映像是一個集在另一集上的映像。一個集在另一集內映像的一般場合容易化歸前者。事實是這樣，假設給出集 X 在集 Y 內的任一映像 f；集 Y 內的，因映像 f 之力，至少與集 X 的一個元素對應的，那些元素的集叫做由於映像 f 的集 X 的像，並記做 $f(x)$。

*) 可參看本章 §5 註 2。

顯見，映像 f 是集 X 在集 $f(x)\sqsubseteq Y$ 上的映像。

定義 4. 假設給定了集 X 在集 Y 上的映像 f。假設 y 是集 Y 的任一元素。由於映像 f，集 X 內對應給定元素 $y\in Y$ 的一切元素的集叫做元素 y 的完整原像。這個集記做 $f^{-1}(y)$。

顯見，集 X 在集 Y 上的映像，當着而且僅當着集 Y 的每個元素 y 的完整原像 $f^{-1}(y)$ 僅由集 X 的一個元素而成的時候，纔是一一的。

假設給定一個集 X，其形是互不相交的一些（有限或無限個數的）子集的和。這些子集（就是構成我們和的集）就是 X 集的那種分解的元素。簡單例子：假設 X 是莫斯科的所有中等學校學生的集。集 X 可以分成互不相交的子集，例如，引用如次的兩種方法：1)我們把在同一學校的學生集而爲一*)（就是把一切學生的集按學校而分），2)我們把同一年級的學生集而爲一（儘管在不同的學校）。第二例：假設 X 是平面上一切點的集；在這平面上任取一個直線 d，並把全平面分解爲平行於直線 d 的直線。每個這樣直線上的點的集形成我們所要分解的集 X 的子集。

註 5. 如果給定的集 X 分解爲互不相交的子集，而總合起來正是集 X，那麼爲簡便起見，單說集 X 的分組。

下列的命題從我們的定義直接得來。假設給定了集 X 在集 Y 上的映像 f。集 Y 的各元素 y 的完整原像 $f^{-1}(y)$ 形成集 X 的分組。這些組的集正與集 Y 有一一對應關係。

相反地：假設給定集 X 的分組。這個分解產生集 X 在某集 Y 上的映像，就是在以這個分解之組爲元素的集上。如果對於集 X 的每個元素，使那個包含它的組與之對應，就得到了這個映像。

例：這樣，莫斯科學生按學校的區分，就規定了**)所有學生的集 X 在所有學校的集 Y 上的映像：對於每個學生有他所屬的學校與之對應。

---

*) 假定每個學生只在一個學校學習。

**) 參看前脚註。

雖說所談的事實完全是自明的，可是在數學裏並未得到明確的公式表示；雖在這樣的表示之下，它們在數學各科的邏輯建設上，已經起了極其重要的作用。

假設給定了集X的分組。我們導入如次的定義：集的兩個元素叫做關於所給分解，彼此對等的，只要它倆屬於同一組的話。

這樣一來，我們如果把莫斯科的學生按照學校而分的話，那麼兩個學生將是"對等"，只要他倆是在同一學校學習（儘管在不同的年級）。我們如果按照年級而分學生的話，那麼兩個學生將是"對等"，只要他倆在同一年級（儘管在不同的學校）。

我們剛纔所定義的對等關係顯有下列的性質：

對稱性質（或交互性質）。如果x與x'對等，那麼x'與x也對等。

推移性質（或轉渡性質）。如果元素x與x'對等，同時x'與x''也對等，那末x與x''就對等（"兩個元素x與x''皆對等於第三元素x'的話，就彼此對等"）。

最後，我們認識到每個元素都與其自己對等；這種對等關係的性質叫做反射性質。

因而，一定集的任何分組，都在這集的元素之間定義某種對等關係，具有對稱的、推移的與反射的性質。

現在假定，相反地，我們確立了某種特徵，使人能以判定集X的一對元素是否對等。這時我們對於這對等性僅要求它具有對稱的、推移的與反射的性質。我們將要證明，這個對等關係定義集X的一種分組。

實際上，集X裏一切與元素x對等的元素的集，名爲X的給定元素x的組$\xi(x)$。由於反射性，每個元素屬於它自己的組。我們將要證明，如果兩個組即使僅有一個共同元素的話，它倆也要合而爲一。

事實上，假設二組$\xi(x)$與$\xi(x')$有共同元素x''。對等性如用記號$\sim$標誌，按組的定義，則有$x\sim x''$，$x'\sim x''$，因之，從對稱性得$x''\sim x'$，又從推移性得$x\sim x'$。假設x^*是組$\xi(x')$的任一元素。因有$x\sim x'\sim x^*$，