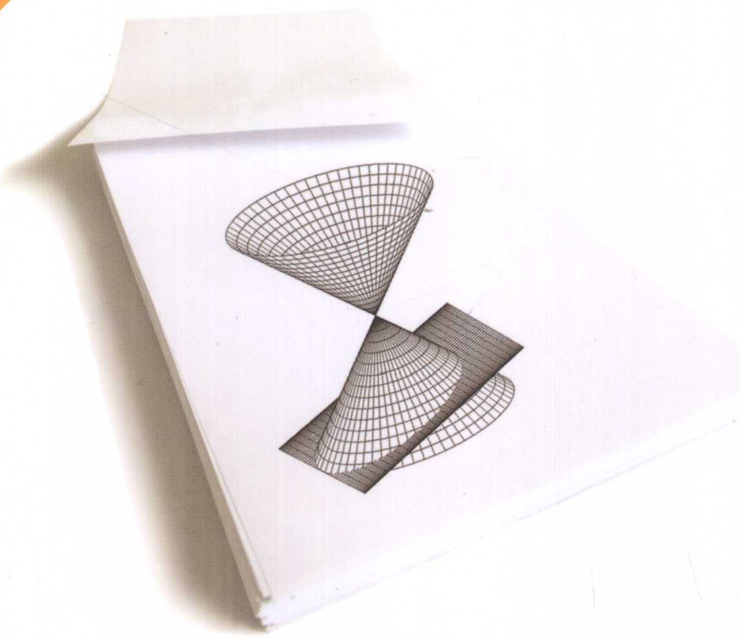
高等学校数学学习指导丛书

空间解析几何习题精解

（第三版）

配北京师范大学《空间解析几何》（第三版）

高红铸 王幼宁 张蓓 编著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

高等学校数学学习指导丛书

空间解析几何习题精解

（第三版）

配北京师范大学《空间解析几何》（第三版）

高红铸 王幼宁 张蓓 编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何习题精解／高红铸，王幼宁等编著．—第三版—北京：北京师范大学出版社，2009.9
（高等学校数学学习指导丛书）
ISBN 978-7-303-10419-2

Ⅰ．空… Ⅱ．①高… ②王… Ⅲ．空间几何：解析几何－高等学校－解题 Ⅳ．O182.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 125493 号

营销中心电话　010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　刷：北京新丰印刷厂
经　销：全国新华书店
开　本：170 mm × 230 mm
印　张：14.75
插　页：4
字　数：270 千字
版　次：2009 年 9 月第 3 版
印　次：2009 年 9 月第 1 次印刷
定　价：25.00 元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　李彦博
美术编辑：高　霞　　装帧设计：高　霞
责任校对：李　菡　　责任印制：李　丽

编者的话

本书是配合北京师范大学出版社出版的《空间解析几何》（第3版）（高红铸．王敬庚．傅若男编著）而编写的一本教学辅导资料，也可以单独使用．内容由两部分组成：一是讲课所涉及内容的概要、图形以及习题分类，二是所涉及习题的参考解答和重要图示．编取前者的主要目的，是给大家提供一种更加清晰的学习线索，以便于大家提纲挈领地掌握所学的内容．编取后者的主要目的，是考虑到方便读者在自主学习的方式下自我检查、自我控制学习状况．

基于数学学习的一般规律和几何课程自身的学习特点，在此提醒大家注意使用过程中应该避免出现的一些简单化倾向．首先，我们对于学习内容的汇总必然有其合理之处，但绝不能够完全替代每一位同学的独立思考过程 和具有个性化的处理，也不能够简单地替代个性化的学习笔记之类的资料，它仅仅是能够给大家提供一个具有共性的、辅助性的平台．其次，在独立尝试求解习题并根据遇到的问题和困难进行有针对性的复习和思考之前，简单地浏览习题解答对于数学学习而言是毫无益处的；只有在自己需要核对解答过程，或在需要找出自己的问题所在并且需要及时加以修正时，或在需要开阔思路时，或困难很大而需要进行模仿训练时，参阅和体会我们所提供的习题解答才成为必要．抽象成一句话就是：数学学习的过程是至关重要的，克服困难的过程就是培养能力的过程．

由于作者的水平以及其他因素所限，疏漏在所难免，欢迎大家提出意见和建议．与我们直接联系的邮箱地址是：hzgao@bnu.edu.cn 或 wangyouning@163.com.

编者

2009年5月1日于北京

目 录

第一部分 主要内容提示

第一章 向量代数

要点

- 空间结构解析化的思想.
- 向量的概念及其与数量的区别.
- 向量的各种基本运算及其几何意义.
- 向量代数运算应用于几何证明.

§1 向量及其线性运算

• 向量代数是初等几何解析化的自然工具之一.

- 由于所运用的向量是所谓的自由向量,欧氏几何中的平行性质被自然地隐含在向量的表示及其运算之中. 向量之间的垂直关系也可以方便地用代数式子表示.

• 三维欧氏空间中的向量

- 向量及其表示.
- 向量的线性运算: 加法和数乘.
- 几何应用例示.
    • 线性相关与共线、共面.
    • 定比分点问题.

• 在学习过程中,应该注意体会几何对象与其代数表示之间的对应以及相互转换.

1. 向量及其表示

• 注意数量与向量（矢量）的区别.

• 向量 有两个基本要素: 大小和方向. 因此两个向量相等当且仅当其大小和方向都相同.

2. 向量的加法和减法

- 向量加法的定义 (如图 1.1).

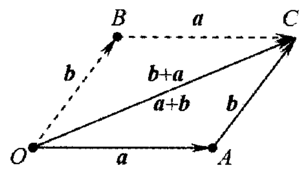


图 1.1 向量加法的定义和交换律图示

- 向量加法的运算律

  - 交换律(如图 1.1)

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};$$

  - 结合律(如图 1.2)

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c});$$

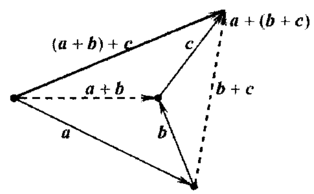


图 1.2 向量加法的结合律图示

零向量 $\mathbf{0}$ 的性质

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a};$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}.$$

- 三角不等式 (三角形不等式) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$, 并且等号成立的充要条件为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向.

3. 向量的数乘

- 向量数乘的定义

- 数量 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 定义为:

长度 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\text{sign}(\lambda)\boldsymbol{a}$ 同向, 如图 1.3.

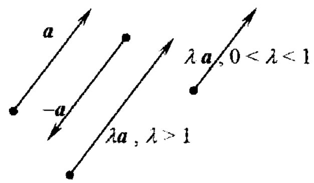


图 1.3 向量数乘的定义图示

- 非零向量的单位化

单位向量: 任何给定的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以单位化为 $\boldsymbol{a}^0$, 即

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{a}^0.$$

- 向量数乘的运算律

  - 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$, 其中 $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$;
  - 分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$, 其中 $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$.

- 向量的加法和数乘运算共同构成 线性运算. 利用线性代数的语言, 可以描述为向量全体在 线性运算 下构成三维实向量空间.

4. 共线及共面向量的判定

- 线性相关与共线、共面.
- **定理 1.1** 对于非零向量 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ 和任意向量 $\boldsymbol{b}$, 有

$$\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{a} \Longleftrightarrow \exists\lambda \in \mathbf{R}, \text{使} \boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}.$$

- **定理 1.2** 对于不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 及任意向量 $\boldsymbol{c}$, 有

$$\boldsymbol{c} \text{ 与 } \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \text{ 共面} \Longleftrightarrow \exists\lambda,\mu \in \mathbf{R}, \text{使 } \boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}.$$

- 这两个定理用线性代数的语言可以描述为: 两个向量共线（平行）当且仅当它们线性相关; 三个向量共面当且仅当它们线性相关.

5. 线段的定比分点

- 定比分点公式

在线段 P_1P_2 (或其延长线) 之上求一点 P, 使得 有向长度 之比给定为 $P_1P : PP_2 = \lambda$, 此时 $\lambda \neq -1$, 那么

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}.$$

其中 O 可以是任意一点. 当 $\lambda = 1$ 时, 这就是中点公式.

- 三角形重心公式

任意 $\triangle ABC$ 的三条中线相交于重心 G, 那么

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

其中 O 可以是任意一点.

思考题 $\triangle ABC$ 三条中线一定相交于一点?

- 向量证法要点: 验证三条中线的 $2:1$ 分点重合于一个公共点 —— 即为重心 G.

习题一分类参考

- 按照以下分类参考, 酌情训练 (注意一定要有 独立思考的过程):

  - 复述、简单模仿:3,4,12,13, 14;
  - 基本概念和基本运算:1,2,10,17;
  - 几何应用初步:5,6,11,15,16;
  - 几何应用:7,8,9.

§2 向量的内积

- 空间向量夹角的概念.
- 向量内积的概念.

  - 定义.
  - 向量夹角的内积表示.

- 垂直关系的内积表示.
  - 向量模长的内积表示.
  - Cauchy-Schwarz 不等式.

- 向量内积的运算律.
  - 交换律.
  - 与数乘的结合律.
  - 分配律.

1. 向量的夹角

- 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是指它们平行移动到同一个起点时从 $\boldsymbol{a}$ 的正向到 $\boldsymbol{b}$ 的正向所形成的取值于闭区间 $[0,\pi]$ 的角. 我们约定: 零向量与任何向量的夹角在区间 $[0,\pi]$ 中任取, $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$.

2. 向量的射影

- 点 P 在有向直线 $\boldsymbol{g}$（轴）上的垂直射影（垂直投影）是指 P 到 $\boldsymbol{g}$ 作垂线的垂足 P'（如果 P 在 $\boldsymbol{g}$ 上则 $P'=P$）.
- 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在 $\boldsymbol{g}$ 轴上的垂直射影（垂直投影）$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{g}}\overrightarrow{P_1P_2}$ 是指由 $\boldsymbol{P}_1$ 的垂直射影$\boldsymbol{P}_1'$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 的垂直射影 $\boldsymbol{P}_2'$ 所得到的 $\boldsymbol{g}$ 上的有向线段 $\overrightarrow{P_1'P_2'}$ 的长度.
- **引理** $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{g}}\overrightarrow{P_1P_2}=|\overrightarrow{P_1P_2}|\cos\angle(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{g})$.
- **推论 1** 相等的向量在相同的轴上有相同的垂直射影.
- **推论 2** $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{g}}(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{a}$.
- **推论 3** $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{b}$.
- **引理** 对于非零向量 $\boldsymbol{b}$ 有

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

- **推论** $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a},\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}$.

3. 向量的内积

- 向量内积的定义

  向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个数值, 定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

  内积又称为数量积或点积.

• 向量夹角的内积表示

当 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \neq 0$ 时,

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|).$$

特别有

定理 2.1 当 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \neq 0$ 时,

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0.$$

这个定理给出了向量内积不满足消去律的一个几何解释.

• 向量模长的内积表示

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2,$$
$$|\boldsymbol{a}| = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})^{1/2}.$$

• 垂直射影与内积的相互表示

对于 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$, 即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0.$$

• Cauchy-Schwarz 不等式

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$

等号成立的必要充分条件是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行.

• 向量内积的运算律

交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

与数乘的结合律 $(\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \lambda(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$, 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$;

关于加法的 分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

上式蕴含 $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

• 关于有限和的内积分配律:

$$\boldsymbol{a}\cdot\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_i).$$

4. 向量的分解和正交分解

- 平面向量沿给定基向量组的分解及其系数表示

  - 回顾:**定理 1.2** 对于不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 以及任意向量 $\boldsymbol{c}$, 有

$$\boldsymbol{c} \text{ 与 } \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \text{ 共面} \Longleftrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbf{R}, \text{使 } \boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\,.$$

  - 如何一般确定线性表示的系数?
  - 对于一般的基向量组 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$, 有

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}.$$

解这个关于 λ 和 μ 的线性方程组就可以得到线性表示的系数. 回忆一下 Cauchy-Schwarz 不等式, 知道当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线时这个线性方程组的系数行列式是正的, 根据线性代数中的 Cramer 法则知, 方程组一定有解.

- 向量沿给定基向量组 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 的分解及其系数的表示

  - 如何一般确定线性表示的系数?
  - 解线性方程组, 便可确定系数组

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}\end{pmatrix}.$$

  - 当基向量组 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 单位正交时, 易得

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}\end{pmatrix}.$$

- 基向量组的规范正交化

  给定 $\mathbf{E}^3$ 的任意基向量组 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$, 可以得到一组单位正交向量

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|,\quad \boldsymbol{e}_2=[\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1]^0,\quad \boldsymbol{e}^3=[\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2]^0,$$

  则新的基向量组 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 单位正交. 这个做法称为 规范正交化, 就是线性代数中的 Gram-Schmidt 正交化过程.

习题二分类参考

- 按照以下分类参考, 酌情训练 (注意一定要有 独立思考的过程):

  - 基本概念和基本运算:1,2,3,4,5,6,7;
  - 几何应用初步:8,9,10,11,12,13;
  - 几何应用 *:14,15.

    - 14. 提示: $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}$ 与 $\overrightarrow{OA_2}$ 有什么关系?
    - 15. 提示: 四边形的各边向量有什么关系? 垂直关系如何用内积表示? 相应内积如何表示为只与边长有关?

§3 向量的外积

- 右手系和左手系.
- 向量外积的概念.

  - 定义.
  - 向量夹角的外积表示.

    - 平行关系的外积表示.

  - 公垂向量的外积表示.
  - 平行四边形的面积和三角形的面积.
  - 点到直线的距离.

- 向量外积的运算律.

  - 反交换律.
  - 与数乘的结合律.
  - 分配律.

- 向量外积运算的几何应用例示.

1. 外积的定义

- 任意给定空间 $\mathbf{E}^3$ 中的三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$, 若它们顺序符合 *右手关系*, 则称向量组 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 构成空间 $\mathbf{E}^3$ 中的一个 *右手系*; 否则, 称向量组 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 构成空间 $\mathbf{E}^3$ 中的一个 *左手系*.
- 向量 *外积* 的定义

向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的 外积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量, 其长度定义为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, 其方向定义为与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直并且 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ 成右手系. 如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行, 按照长度的规定我们理解为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是零向量.
外积又称为 向量积 或 叉积, 如图 1.4.

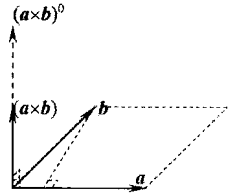


图 1.4 向量的外积图示

• 向量夹角的外积表示

当 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\neq 0$ 时,$\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|/(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)$. 特别有

定理 3.1 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. 这里我们认为零向量与任何向量平行. 这个定理给出了向量外积不满足消去律的一个几何解释.

• 公垂向量的外积表示

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a},\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}.$$

• $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 的 几何意义

若平行四边形（或三角形）的两条边可由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 构成, 则其面积为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$(或 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|/2$).

• 点到直线的距离

在直线上任取不同的两点 P_1 和 P_2 , 则任一点 P 到直线的距离可利用外积确定, 为

$$\frac{\left|\overrightarrow{P_1P}\times\overrightarrow{P_1P_2}\right|}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|}.$$

• 恒等式 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 \equiv |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2.$

2. 外积的性质

- 向量外积的运算律

  反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;
  与数乘的结合律 $(\lambda\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\lambda\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, 其中 $\lambda\in\mathbf{R}$;
  关于加法的分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.
  上式蕴含 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}, (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

- 问: 是否成立 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$?
- 外积关于有限和的分配律

$$\boldsymbol{a}\times\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{b}_i=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_i).$$

3. 外积的应用举例

- 利用外积很容易证明三角形的正弦公式, 海伦公式等.
- 在几何应用中一般遵循以下规律:
  1. 几何条件解析化 (代数表示);
  2. (代数) 运算;
  3. 解释运算结果的几何意义.

习题三分类参考

- 按照以下分类参考, 酌情训练 (注意一定要有独立思考的过程):

  - 基本概念和基本运算:1,2,3,4,5,6,8;
  - 几何应用:7.

§4 混合积和双重外积

- 向量的混合积.

  - 定义.
  - 几何意义.
  - 混合积的常用性质.

- 向量混合积运算的几何应用例示.

- 共面判定.
- 向量沿给定基向量组的分解系数的确定.

• 向量的双重外积公式.

- 利用待定系数法确定分解式的表达式.

1. 向量的混合积

• **定义 4.1**　三个向量依照顺序 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的*混合积* $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 是一个数量, 定义为 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

• 等价表示:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\angle(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}.$$

• *几何意义*: 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 所张成的平行六面体的*有向体积*; 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三者*共面*时 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$; 当 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为*右手系*时取正值; 当 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为*左手系*时取负值, 如图 1.5.

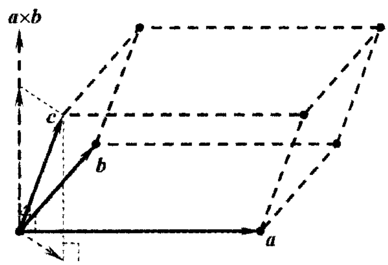


图 1.5　向量的混合积图示

• 混合积的常用性质

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$;

(2) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$;$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=0$;

(3) $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

$(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

(4) $\forall\lambda\in\mathbf{R},(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

• **定理 4.1** 三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

• 设三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为不共面的向量, 任意向量 $\boldsymbol{d}$ 关于基 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 有分解式