经济管理中的数学规划最优化方法

许仁忠 编著

四川科学技术出版社

前　言

在经济管理中，广泛存在着各类优化问题，需要采用各类数学优化方法去研究和处理。其中，数学规划是极其重要的一类方法。这本《经济管理中的数学规划最优化方法》，就是向从事经济管理研究和实践的同志介绍这类重要的最优化方法的。

其所以把本书取名为《经济管理中的数学规划最优化方法》，是因为它全面介绍了各种数学规划的基本方法，而对这些数学规划的基本数学理论，虽有涉及但没有作系统的介绍。简言之，它不象通常的介绍数学规划的专著那样十分重视理论的完整、严密，而是偏重于方法的系统、全面。因此，本书在介绍经济管理和财经科学研究中常用的各类数学规划时，着重介绍了如何从实际经济管理问题出发去建立各种数学规划模型，以及在数学模型建立起来后如何求解的方法。

以介绍方法为重点，是从目前从事经济管理理论研究与应用实践的同志，以及目前正在学习经济管理知识的财经专业的学生的现状与需要出发的。我们认为，对这些同志来讲，尤为重要的是让他们掌握尽可能多的经济数学方法，以便用更多的数学手段去处理各类经济活动中的问题。当然，绝不能误解为经济专业的同志仅需要掌握和懂得数学方法而不需要了解和懂得这些方法的数学理论基础。恰恰相反，只有

深透地理解和掌握基础数学理论，才能把这些数学方法掌握和处理得更好，才能把经济科学和经济管理的定量化研究与应用提到一个较高的水准。因此，本书在编写过程中，对凡应而又可能介绍的基础数学理论，都作了必要的介绍，并力求直观、通俗、深入浅出、易于理解。尽管如此，我们仍要指出，对从事经济管理的同志以及学习经济管理知识的学生来讲，数学理论毕竟是处于第二位的东西。基于此，我们宁愿"忍痛割爱"，削去一部分基本理论而较大地增加基本数学方法的介绍。

本书可供从事经济管理理论研究及应用实践的同志阅读。全书共十章，第一章为阅读本书必要而基础的准备知识，第二章简要介绍数学规划的总体概念，其余八章分别介绍了经济管理中常用的线性规划、整数规划、多目标规划、非线性规划、动态规划、随机规划、模糊规划及目标规划。

本书编写过程中自始至终得到西南财经大学数学教授吴怀先生与成都科学技术大学数学教授王荫清先生的指导，并承蒙他们审阅全书，仅在此表示衷心的感谢。

许　仁　忠

1988年教师节于西南财经大学

目　录

第一章　准备知识

本章对阅读本书所需要的数学基础知识进行扼要的复习，对欠缺这方面基础知识的读者也是一个弥补。

§1—1　集合与函数

一、集合

“集合”是数学中的一个重要概念。所谓集合，是具有某种属性的事物的全体，或按照某一法则进行研究的对象的全体。构成集合的每一个事物或对象，称为集合的元素。

通常，用大写字母A、B、C等表示集合，用小写字母a、b、c等表示集合的元素。如果a是集合A的元素，记作$a\in A$；如果a不是集合A的元素，则记作$a\overline{\in} A$。例如，全体自然数的集合可以表示为

$$N=\{1, 2, 3\cdots\}$$

可有$3\in N$，而$-3\overline{\in} N$。

集合$A=\{-1, 1\}$也可表示为

$$A=\{x \mid x^2-1=0\}$$

集合$B=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots$
$$+a_{1n}x_n\leqslant b_1, x_1, \cdots, x_n\geqslant 0\}$$

表示把满足不等式$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1$的$n$个非负数$x_1$，$x_2$，…，$x_n$作为分量的全体$n$维向量的集合。

不包含任何元素的集合称为空集，记为ϕ。

由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为U。

如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，则称A是B的子集，记作$A\subseteq B$。

两个集合A与B如有$A\subseteq B$，$B\supseteq A$，则称A与B相等，记作$A=B$。

显然，对任意的集合A有$\phi\subseteq A\subseteq U$。

由集合A与B的所有元素构成的集合，称作A与B的并集，记作$A\cup B$。即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}$$

由集合A和B的所有公共元素构成的集合，称作A与B的交集，记作$A\cap B$。即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\ \text{且}x\in B\}$$

全集U中所有不属于集合A的元素构成的集合，称为A的余集，记作A^{C}。即

$$A^{C}=\{x\mid x\in U;\ \text{且}x\overline{\in}A\}$$

所有属于集合A而不属于集合B的元素构成的集合，称为A与B的差集，记作$A-B$。即

$$A-B=\{x\mid x\in A,\ \text{且}x\overline{\in}B\}$$

集合运算满足下面的De－Morgan律

$$(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$$

$$(A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$$

集合A的研究有时也可用特征函数$C_{A}(x)$的研究来代替，即

$$C_{A}(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x\in A\\ 0 & \text{当}x\overline{\in}A\end{cases}$$

也就是在某个被讨论的范围U中，可用$C_A(x)$来代表由U中某些元素组成的集合A，称$C_A(x)$为集合A的特征函数。集合A的特征函数$C_A(x)$的取值范围只有1与0：当U中的元素x属于A时，其特征函数取值为1；当U中的元素x不属于A时，其特征函数取值为0。这样，集合A便可以完全被它的特征函数$C_A(x)$所确定，从而可以进行较方便的处理。

二、函数

如果对于实数集合R的任意元素x，按照某种法则，总有一个实数集R的元素$y=f(x)$与之对应，则称$y=f(x)$是x的函数。称x是自变量，A是定义域。这种函数称为一元函数。

类似地，对于集合

$$E_n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i\in R,\ i=1, 2, \cdots, n\}$$

的任意元素$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，如果总有$R$上的一个元素$y=f(X)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与之对应，则称$y=f(X)$是$X$的$n$元函数。

例如$y=6x+1$是一个一元线性函数，而$y=3x_1-2x_2$是一个二元线性函数。

如果对任给的充分小的实数$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，总有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

则称一元函数$y=f(x)$在x_0处连续。

类似地，如果对任给的充分小的实数$\varepsilon>0$，总存在实数$\delta>0$，使得当$\|X-X_0\|>\delta$时*，总有

$$|f(X)-f(X)|<\varepsilon$$

* $\|X-X_0\|=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}$.

则称n元函数$y=f(X)$在$X_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$处连续。

对于一元函数$y=f(x)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则$y=f(x)$在x_0处可导。并称这个极限为函数在x_0处的导数，记为$y'\Big|_{x=x_0}$或$f'(x_0)$，及$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$或$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$。

类似地，如果在$X_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$处，极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i^0+\Delta x_i, x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)-f(X_0)}{\Delta x_i}$$

存在，则称n元函数$y=f(X)$在X_0处对x_i存在偏导数，记作$\frac{\partial y}{\partial x_i}\Big|_{x=x_0}$或$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x=x_0}$，$i=1, 2, \cdots, n$。

如果n元函数$f(X)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在$X_0$处的所有偏导数$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x=x_0}$都存在并连续($i=1, 2, \cdots, n$)，则称

$$\Delta f(X_0)\doteq\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{x=x_0}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{x=x_0}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{x=x_0}\right)$$

为函数$f(X)$在X_0处的梯度。

以上定义的导数称为一阶导数或一阶偏导数。如果一个函数在某个集合上全部点都可导，则称函数在这个集合上可导。这样又在这个集合上定义了一个新函数，称为导函数，简称导数。记为$\frac{dx}{dy}$，y'，$\frac{df}{dx}$或$f'(x)$；如是一阶偏导函

数，记为$\frac{\partial y}{\partial x_1}$或$\frac{\partial f}{\partial x_1}$，并简称为一阶偏导数。对一阶导数或一阶偏导数再求导，可以得到一阶导数与二阶偏导数，直至n阶导数与n阶偏导数。

§1—2　向量与矩阵

一、矩阵

排列成m行n列的矩形数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为m行n列矩阵，记作$A_{m\times n}$，或简记为$A=(a_{ij})_{m\times n}$。

当$m=n$时，矩阵A称为n阶方阵。

元素全为零的矩阵称为零矩阵。记为O。

主对角线上元素全是1，而其余元素全是零的方阵称为单位矩阵。记为E_n，或简记为E。例如

$$E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

两个矩阵$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$，当它们的行数与列数分别相等且对所有的i与j均有$a_{ij}=b_{ij}$时，称A与B相等。记为$A=B$。

m行n列的矩阵$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$相加的和为矩阵$(a_{ij}+b_{ij})$。即

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

A与B相减的差为矩阵$(a_{ij}-b_{ij})$。即

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

实数k与矩阵$A=(a_{ij})$的乘积为矩阵(ka_{ij})。即

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

把矩阵A的行换成同序数的列，得到的一个新矩阵称为A的转置矩阵。记作A^T。例如矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A^T=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

一个$m\times s$矩阵$A=(a_{ij})$与一个$s\times n$矩阵 $B=(b_{ij})$ 相 乘的乘积是一个$m\times n$矩阵$C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}\,,$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

记作AB。例如矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\text{或}B=\begin{pmatrix}5 & 7 & 9\\ 6 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

相乘的积

$$C=AB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 7 & 9\\ 6 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times5+3\times6 & 1\times7+3\times8 & 1\times9+3\times0\\ 2\times5+4\times6 & 2\times7+4\times8 & 2\times9+4\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}23 & 31 & 9\\ 34 & 46 & 18\end{pmatrix}$$

应当注意，一般而言，$AB\neq BA$。为了加以区分，我们常把乘积AB中的A称为左矩阵，B称为右矩阵。只有当左矩阵的列数与右矩阵的行数相同时，两个矩阵才能相乘。

还应注意，尽管$A\neq O$，$B\neq O$，但仍有可能使$AB=O$，于是可知，如果$AB=O$，绝不能由$A\neq O$而确定$B=O$，或由$B\neq O$而确定$A=O$。

同样，如果$AC=BC$，$C\neq O$，绝不能由此而确定$A=B$。

如果两个n阶方阵A、B满足

$$AB=BA=E$$

则称A是B的逆矩阵，同样也称B是A的逆矩阵。A的逆矩阵记作A^{-1}。于是

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

如果A的逆矩阵A^{-1}存在，则称A为可逆矩阵，也称A为非奇异矩阵或满秩矩阵。

用$|A|$表示方阵A的行列式。这是一个实数。

n阶方阵A非奇异的充要条件是它的行列式$|A|\neq 0$。

若A可逆，则A^{-1}也可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$；

若A可逆，当$\lambda\neq 0$时，λA也可逆，且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$；

若A、B为同阶可逆方阵，则AB也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

若A可逆，则A^{T}也可逆，且$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$。

矩阵的运算还有如下的性质：

$$A\pm(B\pm C)=(A\pm B)\pm C$$

$$A+B=B+A \qquad (k\lambda)A=k(\lambda A)$$

$$(A^{T})^{T}=A \qquad (kA)^{T}=kA^{T}$$

$$(AB)^{T}=B^{T}A^{T} \qquad (A\pm B)^{T}=A^{T}\pm B^{T}$$

$$(k+\lambda)A=kA+\lambda A \qquad k(A+B)=kA+kB$$

$$EA=AE=A \qquad (AB)C=A(BC)$$

$$(A+B)C=AC+BC \qquad C(A+B)=CA+CB$$

$$k(AB)=(kA)B=A(kB)$$

其中k、λ是实数。

矩阵可以分块。例如

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&2&5&6\\1&0&-3&1&4\\\hline 3&4&0&0&0\end{array}\right)$$

两个矩阵A和B，分别进行分块后可以进行分块乘法。在实施分块乘法时，是把分块后A与B中的各子块当作矩阵元素进行与矩阵乘法一样的运算。例如，对于分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix}$$

有 $AB=$

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32} \end{pmatrix}$$

应当注意，要使分块矩阵的乘法能够进行，在对A、B进行分块时，A的列的分法必须与B的行的分法一致，即A的列块数应等于B的行块数，且分块后A的第i个列块的列数应等于B的第i个行块的行数。例如

$$AB=\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ (3 \quad 4)\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}+(0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{cases}\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 6 & 1 & 5\end{pmatrix}+3\times\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ -3 & 1 & 4\end{pmatrix}\\ (33 \quad 10 \quad 17)+(0 \quad 0 \quad 0)\end{cases}$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 17 & 17\\ -3 & 4 & 17\\ 33 & 10 & 17\end{pmatrix}$$

二、向量

n个有顺序的实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$所组成的数组$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$称为一个$n$维向量。其中数$a_i(i=1, 2, \cdots, n)$称为该向量的第$i$个分量；

例如$\alpha=(1 \quad 0 \quad -3)$是一个三维行向量，$\beta=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$是一个二维列向量。

全体n维向量组成的集合称为n维向量空间。记为E_n。

向量作为特殊的矩阵具有和矩阵相同的运算和性质。

一个$m\times n$矩阵A，可以看成是由m个n维行向量组成，也可以看成是由n个m维列向量组成。即

$$A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$