



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 高等数学

(第二版) 上册

李 忠 周建莹 编著



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 高等数学

(第二版)

(上册)

李忠 周建莹 编著



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/李忠,周建莹编著.—2版.—北京:北京大学出版社, 2009.8

ISBN 978-7-301-15597-4

I. 高… II. ①李… ②周… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第128055号

书 名: 高等数学(第二版)(上册)

著作责任者: 李 忠 周建莹 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 978-7-301-15597-4/O·0784

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路205号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子邮箱: [zpup@pup.pku.edu.cn](mailto:zpup@pup.pku.edu.cn)

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

出版部 62754962

印 刷 者: 北京山润国际印务有限公司

经 销 者: 新华书店

650mm×980mm 16开本 23印张 388千字

2004年6月第1版 2009年8月第2版

2009年8月第1次印刷(总第7次印刷)

印 数: 30301—34300册

定 价: 29.00元

---

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子邮箱:[fd@pup.pku.edu.cn](mailto:fd@pup.pku.edu.cn)

本书前身《高等数学简明教程》(全三册)  
获 2002 年全国普通高等学校  
优秀教材一等奖

本书第一版被教育部列为  
普通高等教育“十五”国家级规划教材

## 内 容 简 介

本套教材是综合性大学、高等师范院校及其他理工科大学中的非数学类专业(尤其是物理类专业)学生的高等数学教材. 全书共分上、下两册. 上册共分六章, 内容包括: 绪论, 函数与极限, 微积分的基本概念, 积分的计算, 微分中值定理与泰勒公式, 向量代数与空间解析几何, 多元函数微分学等; 下册内容是多元函数积分学, 级数与常微分方程.

本套教材的前身《高等数学简明教程》(全三册, 北京大学出版社, 1998)曾荣获教育部 2002 年全国普通高等学校优秀教材一等奖, 本书第一版是在原书的基础上修订而成.

本书是作者在北京大学进行教学试点的成果. 它对传统的高等数学课的内容体系作了适当的整合, 力求突出数学概念与理论的实质, 避免过分形式化, 使读者对所讲内容感到朴实自然. 本书强调数学理论与其他学科的联系. 书中附有历史的注记, 简要叙述相关概念和理论的发展演变过程, 以及重要数学家的贡献. 本书语言流畅, 叙述简捷, 深入浅出, 有较多的例题, 便于读者自学. 每小节有适量习题, 每章配置综合练习题, 习题给出答案或提示供读者参考.

本书是第二次修订版, 其指导思想是在保持第一版的框架与内容结构不变的基础上, 对教材作少量必要的修改与补充, 以使本书更进一步贴近读者, 更好地体现教学基本要求. 具体做法是: 对重要的数学概念和定理增加了解释性文字与具体实例, 使学生便于理解与掌握; 去掉了少数几个习题; 删去了第一版中有闭区间上连续函数有界性定理、介值定理、最大最小值定理、隐函数存在性定理的证明; 重新审定了原书中的“历史的注记”与“人物注记”, 还适当增加了一些新的内容.

## 第二次修订版前言

本书的前身是 1998 年出版的《高等数学简明教程》(全三册). 2004 年做了第一次全面修订, 在内容上做了一定的调整, 由三册改为两册, 并更名为《高等数学》. 本次修订是第二次修订.

本书的主要读者是高等院校中物理类专业的学生. 高等数学课(或者简单地说, 微积分学)对于这些专业而言, 其重要性是不言而喻的. 然而, 这个课对一部分学生说来, 往往又是难学的, 甚至是让人“望而生畏的”. 本书编写的主要指导思想就是希望通过调整某些传统讲法, 使微积分学的讲授, 能够“返璞归真”, 平实自然, 有趣有用. 具体想法请参见原版序言.

本书出版后, 十余年来在北京大学以及其他许多院校得到了广泛地采用. 十余年来的教学实践经验为本次修订提供了基础. 这次修订的想法是希望在保持原有的框架与内容结构不变的基础上, 对教材作少量的必要的更改与补充, 以使本书更进一步贴近读者, 更好地体现教学的基本要求.

在这次修订中, 我们在书中若干地方, 增加了解释性文字与具体实例, 希望以此为读者铺设一条更为平坦的学习之路.

本书的第一次修订版中, 增添了历史的注记与人物注记, 以简短扼要的文字, 叙述有关重要数学概念的来源和发展, 以及数学家的故事, 以使读者有较宽广的视野和必要的数学历史知识. 在教材近五年的使用中, 这些注记普遍受到读者的欢迎. 在这次修订中, 除了对原有的这些注记做了重新审定之外, 还适当增加了一些新的内容.

在这次修订中, 原来的习题(包括每一章的综合练习题)一般没有变动, 但去掉了少数的几个题目. 作者一向不赞成在初学阶段引导学生作难题、偏题, 那样做是得不偿失的.

在这次修订中, 我们删去了若干定理的证明, 其中包括闭区间上连续函数有界性定理、介值定理、最大最小值定理、隐函数存在性定理等定理的证明. 这种删改并不表示教学基本要求的改变, 而是恰恰相反. 这些

定理的证明在原书中,或者以附录的形式出现,或者明确注明超出教学大纲的要求,不必在课堂讲授.尽管如此,把它们写在书中,毕竟有可能对教师或学生产生误导,模糊了教学的基本要求,并增加了教师与学生不必要的心理负担,不如干脆去掉为好.因此,这样做是为了使本书更明确地体现教学的基本要求.

多年来,北京大学出版社理科编辑室主任刘勇同志,为该书的出版以及各种修订做了大量工作.现在,该书即将出版第二次修订版之际,作者要特别向他表示衷心的感谢!同时,也向那些曾经给本书提过宝贵意见的读者与专家们表示致谢!

李 忠

2009年2月23日

于北京大学

## 原版前言

1996年秋至1998年春,我们在为北京大学物理系、无线电电子学系及技术物理系讲授高等数学课期间,在课程内容体系上做了一些改革的尝试.现在出版的这套《高等数学简明教程》就是在当时试用讲义的基础上修改补充而成的.

全书共分三册,供综合性大学及师范院校物理类专业作为三学期或两学期教材使用.第一册是关于一元函数微积分及空间解析几何;第二册是关于多元函数微积分与常微分方程;第三册是关于级数,参变量积分,傅氏级数与傅氏积分,概率论与数理统计.

现在我们就这套教材的内容处理做以下几点说明:

(一) 与传统的教材相比,这套教材在讲授内容的次序上作了一定的调整

目前国内多数高等数学教材是先讲微分学,后讲积分学.这样做的好处是数学理论体系清晰.其缺点则是积分概念出来过晚,使初学者对微分概念与积分概念有割裂之感.另外,由于积分概念出现过晚而使数学课在与其他课程,如力学与普通物理等课的配合上出现了严重脱节现象.

在本教材中,我们把微积分的基本概念及计算放在一起先讲,在讲完微积分基本定理及积分的计算之后,才开始讲微分中值定理与泰勒公式.这样调整的主要目的是为了让初学者尽可能早地了解与把握微积分的基本思想,掌握它的最核心、最有用、最生动的部分.在试验过程中,学生们在第一学期期中考试前已经学完了微商、微分、不定积分、定积分的概念及全部运算,对微积分的概念初步形成了一个比较完整的认识.同时,这样的调整也缓解了与其他课程在配合上的矛盾.因此,我们认为这种调整或许是解决物理类专业在大学一年级数学课与其他基础课脱节问题的途径之一.

微积分就其原始的核心思想与形式是朴素的、自然的,容易被理解与接受的.随着历史的发展,逻辑基础的加固和各种研究的深化,它已经变成了一个“庞然大物”,让初学者望而生畏.现在,如何选取其中要紧的东西以及用怎样的方式将它们在较短的时间内展示给学生,不能说不是一个问题,值得我们思考与探索.



## (二) 关于极限概念的处理

关于极限概念和有关实数理论的处理历来是微积分教学改革中争论的焦点之一。我们认为,极限的严格定义,即“ $\epsilon$ - $\delta$ ”与“ $\epsilon$ - $N$ ”的说法是应该讲的,并且要认真讲。因为它在处理一些复杂极限过程,特别是涉及函数项级数一致收敛性等问题时,是必不可少的。物理类专业的学生可能还要学许多更高深的数学,不掌握极限的严格定义也是不行的。

但是,我们也不赞成在一开头就花很大力气去反复训练“ $\epsilon$ - $\delta$ ”,而形成一种“大头极限论”。我们希望随着课程的深入,让学生在反复使用中逐渐熟悉它,掌握它。在现在的教材中没有出现大量的用“ $\epsilon$ - $\delta$ ”求证具体函数极限的练习,更没有做十分困难的极限习题,因为做过多的这类练习意义不大。极限的概念在这套教材中既是严谨的,又保留其朴素、直观、自然的品格。

与极限概念密切联系在一起的是关于实数域完备性的几个定理。我们采用了分散处理的办法。在全书的一开头就把单调有界序列有极限作为实数完备性的一种数学描述加以介绍。有了它,这在有关极限的许多讨论中已足够了。闭区间上连续函数的性质在第一章中只叙述而不加证明,其证明只作为附录,供有兴趣的读者自行阅读。在讨论级数之前再次涉及实数域的完备性,这时才介绍柯西收敛原理,以满足级数讨论的需要。这种分散处理的办法,不仅分散了难点,而且使初学者更容易看清这些基础性定理在所涉及问题中的意义。

(三) 本书坚持了传统教材中的基本内容与基本训练不变,但拓宽了内容范围

在内容的取舍上,我们采取了相当慎重的态度。近来对高等数学课的内容现代化改革呼声很高。但是,作为一门数学基础课似乎不宜简单地以现代化作为其改革的主要目标。数学学科中概念的连贯性使得它不可能像电子器件一样去“更新换代”和“以新弃旧”。而且现在看来掌握好微积分的基本概念、基本理论与基本训练,对于一个理工科大学生而言依然是必不可少的。当然,计算机的广泛使用以及数学软件功能的日益提高,正促使我们思考在高等数学课中简化或减少某些计算的内容。然而就目前的情况,我们尚难于下定决心取消某些内容。为了慎重从事,这次改革试验中,我们保留了传统教材中的基本内容与基本训练。

我们认为目前对高等数学课而言重要的不是去更新内容,而是避免教学中烦琐主义的倾向,不要在一些枝节问题上大做文章。那样做既歪曲了数学,又使学生苦不堪言。

在本书的表述上,我们尽可能注意了文字的简洁、例子的典型性以及基本概念背景及意义的解释,以便于读者自学.除每节的练习题之外,每一章之后又附加了总练习题,以使读者有机会做一些综合练习.

国际著名数学家柯朗曾经尖锐地批评过数学教育.他指出:“二千年来,掌握一定的数学知识已被视为每个受教育者必须具备的智力.数学在教育中的这种特殊地位,今天正在出现严重危机.不幸的是,数学教育工作者对此应负其责.数学的教学逐渐流于无意义的单纯演算习题的训练.固然这可以发展形式演算能力,但却无助于对数学的真正理解,无助于提高独立思考能力.……”<sup>①</sup>

柯朗的话是对的.数学教育需要改革,我们任重道远.

最后,我们应该提到,这次改革试点工作先后在北京大学及北京市教委正式立项并得到了他们的支持,借此机会我们向北京市教委及北京大学教务处与教材科的有关同志表示衷心感谢.北京大学数学科学学院院长姜伯驹教授一直十分关心这项工作,并给予多方面的鼓励与帮助.此外,彭立中教授、黄少云教授与刘西垣教授也很关心这项工作,并对试用讲义提出了许多宝贵意见.北京大学出版社邱淑清编审及刘勇同志大力支持教材的出版.刘勇同志作为本书的责任编辑为本书的出版做了大量工作,付出了辛勤的劳动.我们在这里一并对这些同志表示感谢!

毫无疑问,这套教材会有许多不成熟之处,甚至有不少错误.我们诚恳地希望数学界同仁加以批评指正,以便改正.

李 忠 周建莹

1998年2月15日于  
北京大学中关园

(2004年元月略作删改)

---

<sup>①</sup> 见《数学是什么》第一版序,柯朗与罗宾斯著,汪浩、朱煜民译,湖南教育出版社,1985.

# 目 录

绪论 .....	( 1 )
<b>第一章 函数与极限</b> .....	(10)
§ 1 实数 .....	(10)
1. 有理数与无理数 .....	(10)
2. 实数集合 $\mathbf{R}$ 的基本性质 .....	(11)
3. 数轴与区间 .....	(13)
4. 绝对值不等式 .....	(14)
习题 1.1 .....	(16)
§ 2 变量与函数 .....	(17)
1. 函数的定义 .....	(17)
2. 初等函数 .....	(19)
3. 有界函数 .....	(22)
习题 1.2 .....	(25)
§ 3 序列极限 .....	(27)
1. 序列极限的定义 .....	(27)
2. 夹逼定理 .....	(30)
3. 极限不等式 .....	(32)
4. 极限的四则运算 .....	(33)
5. 一个重要极限 .....	(37)
习题 1.3 .....	(39)
§ 4 函数的极限 .....	(41)
1. 单侧极限 .....	(41)
2. 双侧极限 .....	(43)
3. 关于函数极限的定理 .....	(45)
4. 自变量趋于无穷时函数的极限 .....	(48)
5. 无穷大量 .....	(51)
习题 1.4 .....	(52)

---

§ 5 连续函数	(53)
1. 连续性的定义	(53)
2. 复合函数的连续性	(55)
3. 反函数的连续性	(56)
4. 间断点的分类	(58)
习题 1.5	(59)
§ 6 闭区间上连续函数的性质	(60)
习题 1.6	(62)
第一章总练习题	(63)
<b>第二章 微积分的基本概念</b>	<b>(66)</b>
§ 1 微商的概念	(66)
1. 微商的定义	(66)
2. 微商的四则运算	(74)
习题 2.1	(74)
§ 2 复合函数的微商与反函数的微商	(76)
习题 2.2	(83)
§ 3 无穷小量与微分	(85)
1. 无穷小量的概念	(85)
2. 微分的概念	(86)
§ 4 一阶微分的形式不变性及其应用	(90)
§ 5 微分与近似计算	(94)
习题 2.3	(94)
§ 6 高阶导数与高阶微分	(95)
习题 2.4	(98)
§ 7 不定积分	(99)
习题 2.5	(103)
§ 8 定积分	(104)
1. 定积分的概念	(104)
2. 定积分的性质	(107)
习题 2.6	(110)
§ 9 变上限定积分	(111)
习题 2.7	(115)
§ 10 微积分基本定理	(116)

习题 2.8 .....	(120)
第二章总练习题 .....	(121)
<b>第三章 积分的计算及应用</b> .....	(123)
§ 1 不定积分的换元法 .....	(123)
1. 不定积分第一换元法 .....	(123)
2. 不定积分的第二换元法 .....	(126)
习题 3.1 .....	(129)
§ 2 分部积分法 .....	(130)
习题 3.2 .....	(134)
§ 3 有理式的不定积分与有理化方法 .....	(134)
1. 有理式的不定积分 .....	(134)
2. 三角函数有理式的不定积分 .....	(140)
3. 某些根式的不定积分 .....	(142)
习题 3.3 .....	(143)
§ 4 定积分的分部积分法则与换元积分法则 .....	(144)
1. 定积分的分部积分公式 .....	(145)
2. 定积分的换元积分法则 .....	(146)
3. 偶函数、奇函数及周期函数的定积分 .....	(150)
习题 3.4 .....	(153)
§ 5 定积分的若干应用 .....	(154)
1. 曲线弧长的计算 .....	(154)
2. 旋转体的体积 .....	(157)
3. 旋转体的侧面积 .....	(159)
4. 曲线弧的质心与转动惯量 .....	(161)
5. 平面极坐标下图形的面积 .....	(163)
习题 3.5 .....	(164)
* § 6 定积分的近似计算 .....	(166)
1. 矩形法 .....	(166)
2. 梯形法 .....	(167)
3. 辛普森法 .....	(169)
习题 3.6 .....	(171)
第三章总练习题 .....	(172)

<b>第四章 微分中值定理与泰勒公式</b> .....	(176)
§ 1 微分中值定理 .....	(176)
习题 4.1 .....	(180)
§ 2 柯西中值定理与洛必达法则 .....	(181)
习题 4.2 .....	(187)
§ 3 泰勒公式 .....	(188)
§ 4 关于泰勒公式的余项 .....	(196)
习题 4.3 .....	(199)
§ 5 极值问题 .....	(200)
习题 4.4 .....	(206)
§ 6 函数的凸凹性与函数作图 .....	(207)
1. 函数的凸凹性 .....	(208)
2. 函数作图 .....	(209)
习题 4.5 .....	(212)
* § 7 曲线的曲率 .....	(213)
习题 4.6 .....	(216)
第四章总练习题 .....	(216)
<b>第五章 向量代数与空间解析几何</b> .....	(219)
§ 1 向量代数 .....	(219)
习题 5.1 .....	(222)
§ 2 向量的空间坐标 .....	(223)
习题 5.2 .....	(229)
§ 3 *空间中平面与直线的方程 .....	(230)
1. 平面的方程 .....	(230)
2. 直线方程 .....	(235)
习题 5.3 .....	(238)
§ 4 二次曲面 .....	(239)
习题 5.4 .....	(244)
§ 5 空间曲线的切线与弧长 .....	(245)
习题 5.5 .....	(249)
第五章总练习题 .....	(249)

<b>第六章 多元函数微分学</b> .....	(252)
§ 1 多元函数 .....	(252)
1. 多元函数的概念 .....	(252)
2. $\mathbf{R}^n$ 中的集合到 $\mathbf{R}^m$ 的映射 .....	(255)
3. $\mathbf{R}^n$ 中的距离、邻域及开集 .....	(256)
习题 6.1 .....	(259)
§ 2 多元函数的极限 .....	(260)
1. 二元函数的极限概念 .....	(260)
2. 二元函数的极限运算法则与基本性质 .....	(263)
3. 累次极限与全面极限 .....	(266)
习题 6.2 .....	(267)
§ 3 多元函数的连续性 .....	(268)
1. 多元函数连续性的定义 .....	(268)
2. 关于二元函数连续性的几个定理 .....	(269)
3. 映射的连续性 .....	(270)
4. 有界闭区域上连续函数的性质 .....	(271)
习题 6.3 .....	(272)
§ 4 偏导数与全微分 .....	(273)
1. 一阶偏导数的定义 .....	(273)
2. 高阶偏导数 .....	(276)
3. 全微分 .....	(278)
习题 6.4 .....	(282)
§ 5 复合函数与隐函数的微分法 .....	(284)
1. 复合函数微分法 .....	(284)
2. 一阶全微分形式的不变性 .....	(289)
3. 高阶微分 .....	(290)
习题 6.5 .....	(291)
§ 6 方向导数与梯度 .....	(292)
1. 方向导数 .....	(292)
2. 梯度 .....	(295)
习题 6.6 .....	(297)
§ 7 多元函数的微分中值定理与泰勒公式 .....	(298)
1. 二元函数的微分中值定理 .....	(298)

---

2. 二元函数的泰勒公式 .....	(299)
习题 6.7 .....	(302)
§ 8 隐函数存在定理 .....	(303)
1. 一个方程的情况 .....	(304)
2. 方程组的情况 .....	(307)
3. 逆映射的存在性定理 .....	(310)
习题 6.8 .....	(313)
§ 9 极值问题 .....	(314)
1. 多元函数极值问题 .....	(314)
2. 多元函数的最值问题 .....	(319)
3. 条件极值 .....	(320)
习题 6.9 .....	(325)
* § 10 曲面论初步 .....	(325)
1. 曲面的基本概念 .....	(325)
2. 曲面的切平面与法向量 .....	(328)
习题 6.10 .....	(331)
第六章总练习题 .....	(331)
<b>习题答案与提示</b> .....	<b>(336)</b>



## 绪 论

在课程内容开始之前,我们先来谈谈什么是数学以及数学跟科学技术的关系.希望读者从中增进对数学的了解,看到学习数学的意义.同时,我们还就怎样学好高等数学将向初学者提供若干建议.

### 1. 数学的基本特征

一百多年之前,恩格斯就说过,数学是研究现实世界中数量关系及空间形式的科学.尽管在这一百多年中数学的发展使它的研究内容早已超出了“数”与“形”的范畴,但是就其基本精神而言,恩格斯对数学的概括依然是正确的.

数学的基本特征是它的研究对象的高度抽象性.

数本身就是抽象的,数字“1”是人们从1个苹果、1只羊、1个人等现象中舍去了苹果、羊、人……的具体特征,单从数量上抽象出来的.除了人们容易理解的自然数外,数学中还有负数、无理数、超越数、复数等等.它们的抽象程度则较自然数要更高.要想对一个没有中学数学知识的人解释清楚何为无理数未必容易,更不用说复数或 $i=\sqrt{-1}$ 了.

初等几何中的点、直线、三角形及圆等也是抽象的.它们是根据人们生活经验抽象而来,因此是容易被理解的.我们生活的现实空间是3维空间,这一事实是抽象的结果;但毕竟容易接受.至于4维空间就变得难于理解.在物理中人们通常把时间与空间合在一起视做4维空间.然而,数学中还要研究一般 $n$ 维空间乃至无穷维空间,甚至更为抽象的流形或拓扑空间.这些特别抽象的概念不一定是从人的直接生活经验与生产活动中得来,而是从人类的科学研究(包括数学研究)、科学试验以及复杂的技术过程中抽象而来,它们似乎超出了普通人的直接经验,也超出了自然现象的范畴.数学研究对象的这种高度抽象性使得数学科学区别于自然科学——后者的研究对象是自然现象.

数学研究对象的抽象性决定了数学的另一特征:它在论证方法上的演绎性.

人们说:“数学是一门演绎科学.”这是从它的论证方法而言的.具有中