

比较数学史丛书

XI LA SHU LI
TIAN WEN XUE SU YUAN

希腊数理天文学溯源

托勒玫《至大论》比较研究

邓可舟 著

山东教育出版社

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS



• 比较数学史丛书 •

希腊数理天文学溯源
——托勒玫《至大论》比较研究

邓可卉\著

XI LA SHU LI
TIAN WEN XUE SU YUAN

山东教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

希腊数理天文学溯源/邓可卉著. —济南: 山东教育出版社, 2009

(比较数学史丛书)

ISBN 978 - 7 - 5328 - 5678 - 7

I. 希… II. 邓… III. 天文学史—研究—希腊 IV.
P1-095.45

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第031227号

■ 内 容 提 要

本书以托勒玫《至大论》的最新英译本作为主要原始文献,详细介绍托勒玫关于每一种天体理论的几何模型的建立、各种模型间等价性的分析和必要的证明,以及在观测基础上提出模型的过程和对模型参数的进一步检验和修正的工作;探讨《至大论》中各种天体理论表格的构造和计算过程,重点分析托勒玫蕴涵于《至大论》各种表格中的数学计算方法;对《至大论》中出现的一些名词术语和概念及其发展的历史背景给予解释和澄清.另外,本书还对《元史·历志》和《明史·历志》中有关《授时历》中弧矢割圆术的一些重要法则和方法与托勒玫的“弦表”及其球面坐标变换进行比较,并且得出了比较有趣的结论.本书涉及了《至大论》产生的历史背景,特别是托勒玫的前辈依巴谷的主要工作;介绍了《至大论》出版后近1800年中在世界范围的流传和影响.通过本书对《崇祯历书》中介绍的《至大论》的有关内容的释读和分析,读者可以了解其在中国的传播和影响.另外,本书还涉及了西方学术界对《至大论》的研究和评价史.本书是国内以《至大论》为专题并进行全面研究的第一部专著.

总序

比较研究(comparative studies)在国际学术界是一个热门词,大凡运用比较分析的方法来探讨研究某一领域的问题,都属于比较研究的范畴.用比较分析的方法研究数学史,就形成所谓比较数学史.比较数学史,确切地说并不是数学史的一个分支,而是一个由方法论界定的范畴.

数学是人类文化的重要组成部分,数学的发展在历史上呈现出多元文化的特征.也就是说,数学发展至今日,包涵融汇了世界古今不同民族、不同国家和地区的文化贡献.对历史上不同文化的数学贡献、成就、特点与风格进行比较研究和分析论述,不仅对于全面了解数学发展的历史实属必要,而且将能展示数学科学丰富多彩的文化内涵和数学发展的深刻复杂的动力因素.

那么比较数学史是不是仅限于不同民族、国家和地区数学发展的比较研究呢?不是的,那只是狭义的理解.比较数学史具有更为广阔的内涵.除了不同民族、国家和地区的比较,比较数学史至少还应包括以下方向:

不同时代数学的比较.数学是历史最悠久的人类知识领域之一.数学的发展经历了不同的历史时期,通过不同时期数学内容、特征的比较,可以弄清数学进化的脉络,特别是古今比较,用现代数学的方法去解读一些古代数学成就,往往会引导重要的数学史发现.

同时代数学的比较.对同一时代及前后相近时代数学知识进行比较分析,概括出一些共同的特征,是正确复原该时代数学发展本来面貌的有效途径,甚至能提供解开某些历史谜团的钥匙.

不同数学家的比较.数学家创造数学的历史,对不同数学家研究工作的内容、方法、风格、特征等进行比较分析,尤其是关于同一主题(如解析几何、微积分等)不同数学家贡献的比较,对了解数学家们的创新思维、廓清数学学科起源与发展的客观过程具有毋庸置疑的意义.

在上述广义的理解下,比较研究可以说是数学史研究必不可少的基本手段.数学史研究上一些突破性进展,包括新观点的提出、新结论的获得、新史料的解释等等,都离不开比较方法的运用.让我们来考察几个经典的例子.

李约瑟博士的巨著《中国科学技术史》第三卷数学部分,堪称跨文化比较数学史的典范。作者以其特有的贯通中西的学术文化背景,展开了中国古代数学与古代巴比伦、希腊、印度、阿拉伯地区乃至意大利等欧洲国家数学的空前广泛深入的比较分析,令人信服地论证了中国古代数学的独立地位,纠正了西方学界的一些传统偏见。

17世纪以后来华的西方传教士们曾经用当时的欧洲数学知识解读中国古代数学著作,发掘并向西方知识界介绍了包括著名的“中国剩余定理”在内的一些中国古代数学成果。20世纪初,李俨、钱宝琮等开始了系统的现代意义上的中国数学史研究,运用现代数学方法揭示了一系列中国古代数学成果的世界意义。钱宝琮主编的《中国数学史》可以看作是这方面的代表作。像祖暅原理及球体积计算的诠释,已经成为脍炙人口的佳篇。

另一个方向的例子是吴文俊的古证复原原则。吴文俊先生指出:不加限制地搬用现代西方数学符号与语言来理解中国或其他文明的古代数学将会导致误解。他提出了研究古代数学史的方法论原则,主张所有结论应该利用古人当时的知识、辅助工具和惯用的推理方法得出。这实际上就是强调要把古代数学成果放到当时或前后相近时代的背景中去比较分析。吴文俊先生运用此原则复原了刘徽海岛公式、赵爽日高公式、秦九韶三角形面积公式等。其后国内外许多学者竞相效法,在中国古代数学史研究领域获得了大量成果,取得了大刀阔斧的进展。

至于不同数学家之间的比较,最有名的例子就是牛顿与莱布尼茨创立微积分工作的比较。这方面的研究不仅澄清了牛顿与莱布尼茨各自独立创立微积分的历史真相,而且向人们展示了这两位伟大的学者鲜活创新思维。

借用一句俗语:“不怕不识货,只怕货比货。”在占有一定史料的基础上,比较分析乃是数学史研究获得真知灼见、取得实质性进展的重要法宝。这里强调以史料为基础,因为缺乏史料的高谈阔论,终究是基础不稳的空中楼阁。但另一方面,不加理论研究的史料,很可能变成沉默的古董,即使知其为宝,也不识宝在何处。君不见《九章算术》(包括其注文)中一些精华的段落,历数千余年沧桑,直到20世纪经现代解读才大放异彩!

因此,比较研究是数学史研究中既历久又摩登的范畴。凡是有意义的数学史进展与成果,都在不同程度或不同方面涉及比较方法的运用。当然,认识其重要是一回事,能成功地运用又是一回事。至于收获的大小,就要看研究者各人的

眼力、智慧和功底了。正因为如此,对于数学史工作者来说,比较研究既给人以机会,也提出了挑战。笔者高兴地看到,国内对比较数学史的关注在近十年来有较大的增长,一批中青年学者做了大量深入的工作并有可喜成果,其中有些已引起国际同行的瞩目。将这些成果整理出来,以丛书的形式发表,将能反映我国近年来在这方面的部分成果,激励青年学者的研究积极性,产生良好的学术效果。同时,由于国内目前基本上找不到系统介绍有关民族和地区(如阿拉伯、印度、日本以及古希腊等)数学的专著(连译著都很少见),这一丛书的出版,将能从比较史的角度,部分满足国内学术界在这方面的学术兴趣与需求。

首批出版的《比较数学史丛书》著作涉及古代和中世纪阿拉伯、朝鲜半岛、日本、古希腊等民族和地区数学的成就、文化背景,并与中国传统数学进行比较,探讨它们之间的相互交流与影响。丛书中还包括了清代学者画法几何著作的比较研究、行列式理论历史的比较研究等。今后我们还将继续扩大研究范围,在条件成熟时推出更多新的比较数学史研究成果。

数学史是一个广阔的研究领域,“海阔凭鱼跃,天高任鸟飞”。然而惟其广阔,把握方向就尤显重要。希望本丛书的出版,能在推动国内数学史研究、引导有意义的成果方面起到一定的作用。

本丛书中部分作品是吴文俊丝绸之路数学与天文基金资助项目成果,笔者谨向吴文俊院士表示衷心的感谢。长期以来,山东教育出版社对于数学史学术著作的出版给以了难能可贵的支持,笔者愿借此机会向孙永大社长和本丛书编辑霍亮同志表示诚挚的谢意。

李文林

2009年1月30日于北京中关村

绪 论	(1)
§ 1 《至大论》的历史背景和结构介绍	(1)
§ 2 托勒玫的简要生平及评价	(7)
§ 3 《至大论》在中世纪的流传及其研究价值	(11)
§ 4 《至大论》研究的现状、方法和意义	(15)
第一章 《至大论》天体理论基础	(21)
§ 1 托勒玫的宇宙论	(21)
§ 2 《至大论》中的数学知识	(26)
§ 3 《至大论》中的年表和天文术语	(35)
§ 4 《至大论》中的球面天文学	(38)
第二章 太阳理论	(55)
§ 1 回归年的分析和测算	(55)
§ 2 黄赤交角的测量和计算	(61)
§ 3 太阳的平运动	(64)
§ 4 对几何模型的一般考虑	(65)
§ 5 参量的确定	(68)
§ 6 太阳在任意时间的真位置的计算步骤	(76)
§ 7 关于太阳日的不等长问题——时差	(77)
第三章 月球理论	(79)
§ 1 月球运动的周期、角速度和平运动表格	(79)
§ 2 第一月球几何模型	(84)

§ 3	月球第一模型的有关参量的确定	(88)
§ 4	关于托勒玫浑仪的结构	(99)
§ 5	关于月球的双非匀速运动的假设	(100)
§ 6	第二月球模型——出差理论	(104)
§ 7	提出第三月球几何模型	(110)
§ 8	月球真位置的一般计算程序	(113)
§ 9	关于月球真位置的完整的计算	(115)
§ 10	月球的纬度理论	(121)
第四章	月球的视差理论和恒星理论	(124)
§ 1	月球的视差和视差仪器	(124)
§ 2	月球和太阳距离的证明和计算	(127)
§ 3	关于太阳和月球视差的计算	(134)
§ 4	视差表及其分析和计算	(139)
§ 5	黄道经度和纬度视差	(140)
§ 6	固定恒星理论	(141)
§ 7	恒星星表及西方学术界的研究和评价	(149)
第五章	日食和月食理论	(157)
§ 1	平朔望表	(158)
§ 2	真朔望的决定	(159)
§ 3	食限和食的频率	(163)
§ 4	食分	(166)
§ 5	日食和月食表格及其计算	(167)
第六章	行星理论	(175)
§ 1	行星的运动周期和平角速度	(176)
§ 2	关于外行星模型的基本概念	(178)
§ 3	火星理论	(184)
§ 4	土星理论	(193)
§ 5	木星的观测数据和各项参数值	(198)

§ 6 地内行星理论介绍	(199)
§ 7 金星和水星的平运动及其几何模型的选择	(200)
§ 8 金星理论	(202)
§ 9 水星理论	(209)
第七章 行星的逆行、大距现象和纬度理论	(225)
§ 1 阿波罗尼奥斯法则和托勒玫的证明	(226)
§ 2 托勒玫对阿波罗尼奥斯法则的一般化	(229)
§ 3 逆行运动的一般理论	(230)
§ 4 “留表”的构造和计算	(234)
§ 5 金星和水星的大距	(235)
§ 6 行星的纬度理论	(237)
§ 7 行星的地平升起和落下现象	(253)
第八章 《至大论》与《授时历》中若干问题的比较及其在中国的流传 与影响	(259)
§ 1 托勒玫的“弦表”与《授时历》中的弧矢割圆术	(259)
§ 2 《至大论》与弧矢割圆术中的黄赤道坐标变换精度的比较	(265)
§ 3 对于会圆术的进一步分析	(269)
§ 4 《至大论》在中国的流传和影响	(271)
结 语	(297)
主要参考文献	(301)
索 引	(309)
附 录	(315)
后 记	(318)

绪 论

§ 1 《至大论》的历史背景和结构介绍

1.1 历史背景

《至大论》在对早期天文观测资料和数据の利用方面,与古代巴比伦天文学有着深刻的联系.它们的直接接触是从公元前 331 年,巴比伦城被亚历山大大帝的军队征服以后开始的,从此,思辨的希腊几何天文学,与巴比伦注重国家事务的、以观测为基础的算术天文学发生接触^①.早期的巴比伦观天者通常被认为是星占学家,尽管他们天文学活动的目的是增进他们预言的准确率,但是由于他们长期地记录了各种天象,所以他们努力的结果在天文学史上的贡献却是难以估量的.通过对这些频繁出现的现象的观测记录的整理,可以发现太阳、月球和各行星运行的周期和规律,于是得到了宇宙秩序中的规则.

能够为天文学史家所利用的古代巴比伦和希腊的文字资料,保存下来的非常有限.迄今为止,恐怕只有通过各种不同途径被大量发现的巴比伦泥版.在总共大约 50 万块^②中,和天文学有关的泥版的数目还不确切,但是它们的完成年代大约是在公元前的七个世纪中,其中大部分写于从公元前 323 年亚历山大大帝去世以后开始的“希腊化时代”,到公元前 120 年左右,这是古希腊最伟大的天文学家依巴谷(Hipparchus,约公元前 180—前 127 年)死后的若干年.这些巴

① (英)米歇尔·霍斯金主编.剑桥插图天文学史.江晓原,关增建,钮卫星译.济南:山东画报出版社,2003.18—40

② 李文林.数学珍宝.北京:科学出版社,1998.书中认为其中大约有 300 多块是数学文献,而且它们的时间跨度分属两个相隔遥远的时期,这揭示了一个远较埃及人先进的美索不达米亚早期数学文化

比伦泥版中有几乎是唯一保存下来的所有古代巴比伦和希腊的科学史料^①,它们包含有历史的表格和数据,这是早期天文学定量地理解和解决宇宙问题的尝试,由此在巴比伦形成了一个成熟的、具有预言天象能力的天文学。而这样的科学在希腊化时代得到进一步发展,从此,希腊和巴比伦这两条路径交会到了一起。

巴比伦的历法是太阳和太阴混合历,为了在整数个年中安排整数个月份,大约在公元前8世纪,由巴比伦的抄写员们在系统观测和记录天象的活动中发展形成了19年7闰的周期——后来称为“默冬章”(Meton Cycle)。巴比伦天文学定量解决宇宙问题的主要方法是数值方法,一种叫做“Zig-Zag 曲线”(就是折线曲线)的方法,可以很好地解释太阳周年视运动的不均匀性。对月球和五大行星运动的描述,主要是通过编制比较复杂的数表而完成的。这些都反映在泥版书中。除此以外,我们没有更多的关于他们心目中的宇宙结构模型的根据,另外,关于这些数据背后潜藏的知识,需要希腊天文学家和历史学家们通过研究泥版上的数表中反映出来的时间与角距之间的算术关系来揭示。

希腊传统的科学反映了希腊天文学形成的特点。第一个宇宙学家来自繁荣的希腊殖民地爱奥尼亚,他就是米利都的泰勒斯(Thales of Miletus,约公元前625—前547年),他主张自然界有一个基质。米利都的阿那克西曼德(Anaximander,约公元前610—前545年)有一个关于世界如何不断地从无穷向存在变化的解释。他的理论之后有一个重要的变化:先前的神话被代之以一个自然,在这个自然中有一个非个人的法则在起作用。在南意大利的希腊殖民地中,一个宗教教派的成员们也主张自然结构的背后有统一性,毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前560—前480年)为教派的创立者,他提出了“万物皆数”和“和谐宇宙”(cosmos)的重要观点,后者成为文艺复兴时期天文学发展的强大驱动力。毕达哥拉斯学派的哲学家认识到地球是球形的。毕达哥拉斯认为不能狭义地去拟合观测,也就是认为符合理性比符合经验更重要,由此,思辨方法产生了,这种对理性的追求被称为“希腊人的奇迹”,它影响并导致了西方天文学乃至整个科学的发展。雅典三大哲学家之一的柏拉图(Plato,公元前427—前348/347年)是用这种方法来建立天文学的一个重要代表,他除了赞成“和谐宇宙”的观点外,还将注意力集中在基于数学推理的确定性上,因此一个可以接受

^① (英)米歇尔·霍斯金主编,剑桥插图天文学史,江晓原,关增建,钮卫星译,济南:山东画报出版社,2003

的清晰答案是:所有天体都在作匀速圆周运动.此后,人们相信理论的价值标准是普遍性,普遍的理论比个别的现象更加可信,如果有少数现象违背了这一点,应该“拯救现象”.

希腊人不仅同意大地是球形的,地球没有运动,而且提出球形的大地在宇宙中心,宇宙被限制在一个巨大的球壳之内.欧多克索斯(Eudoxus of Cnidus, 约公元前400—前347年)提出了同心球模型(concentric spheres),他只简单地用了一对同心圆,就可以解释行星的逆行.但是他为太阳运动所构造的三层球叠套系统,却不能令人满意.这是对行星运动问题的数学解的尝试,它们和描述这些天体如何运动是等价的.他的同时代人卡利普斯(Callippus)给出了一个靠增加天球数目而获得更大适应性的系统,使得描述精确度进一步提高^①.但是很快,同心球体系产生了严重缺陷,就是不能解释更多观测到的现象,增加球层对反映行星与地球中心之间的距离变化不能有所帮助,也不能解释行星的亮度变化.

希腊人仍然相信和谐宇宙的秘密就是匀速圆周运动,所以他们需要引入更好的模型,并且参考了巴比伦的观测或者由此计算得到的参数去发展他们的宇宙理论.阿波罗尼奥斯(Apollonius of Perga, 公元前262—前190)在他的两个关于宇宙的几何设计中提出本轮均轮模型,本轮均轮的叠加运动正好可以解释行星的轨道不是简单的圆的现象.依巴谷在处理观测数据中显示了令人敬佩的技巧,他提出了偏心圆模型,很好地解释了太阳运动的不均匀性;关于月球运动模型的一些参数,由依巴谷根据在巴比伦天文表中发现的交食记录计算出来.可惜关于以上两个古代天文学家的工作没有其他任何资料留存,依巴谷的著作几乎全部佚失^②,他的工作被托勒玫在《至大论》中大量引用才得以流传于世.在模型方面,托勒玫新提出了“偏心匀速点”(equant)^③概念,假定地球在离一个给定圆周的圆心有一定距离的点上,那么“偏心匀速点”位于地球的镜面对称位

① B L Van Der Waerden. The Motion of Venus, Mercury and the Sun in Early Greek Astronomy. Journal for the History of Astronomy, 1981(12):99—113

② Noel M Swerdlow. Hipparchus's Determination of the Length of the Tropical Year and the Rate of Precession. Journal for the History of Astronomy, 1979(10):291—309. 这篇文章中说,依巴谷的天文著作只有《关于 Aratus 的评注》保存下来,它被证明在区分托勒玫与依巴谷的星表方面具有重要价值,而且提供了比在《至大论》中少得多的关于建立天体坐标系结构的例子

③ 关于“equant”的译名,请参考吴国盛. Equant 译名刍议. 自然辩证法通讯. 2007, 29(1):92—95

置. 他考虑的是, 圆周上的点不是以匀速运动, 而是以变速运动, 速度变化的规律是, 让一个在“偏心匀速点”上的观测者看起来是匀速的. 他在行星理论中引入的“偏心匀速圆”的含义也类似.

我们知道, 天体运行轨道并不是正圆形, 所以任何建立在天体作匀速圆周运动这样一个普遍理论基础上的几何模型, 都不能真正弥合模型与实际现象之间的差异. 尽管可以通过增加本轮的数目, 逐渐地逼近天体运行的实际现象, 并且从精度的要求来看, 如果不断增加本轮的数目, 精度就会不断地提高, 但是, 模型与计算都将因此而繁不胜烦.

17 世纪, 第谷(Tycho Brahe, 1546—1601)以天文观测著名, 其观测达到了前所未有的精度, 而使得模型与实际现象之间的差异较小. 所有前人的努力, 促成了德国天文学家开普勒(Johannes Kepler, 1571—1630)放弃了圆周轨道, 而采用椭圆轨道, 才彻底解决了这个问题. 尽管模型与实际现象之间的差异对于托勒玫来说也是不可避免的, 但是托勒玫天文学是在整个过程中最完整地继承和陈述了古代天文学的观测和理论, 并且进一步提出新的理论模型, 对由古希腊建立的科学方法进行系统阐述、论证和发展的最重要的天文学. 正如它的古希腊名称是《数学汇编》(*Syntaxis Mathematica*), 《至大论》完整地陈述了古希腊人所理解的数理天文学, 是古希腊集大成的一部重要的数理天文学典籍.

《至大论》是逻辑严密的高水平的天文学经典著作, 它代表了其后十几个世纪天文学的发展, 对后世许多不同民族的天文学的发展产生了重要影响; 托勒玫天文学的由观测——模型——观测——修正模型参数的特点, 被近代天文学和其他科学继承; 《至大论》以逻辑安排极为严密的形式为后世天文学文献提出了一个很高的标准.

1.2 成书年代

在《至大论》中记录的托勒玫的第一个观测是哈德里安(Hadrian)统治时(公元 116—137 年)在亚历山大的一次月食观测, 时间是公元 125 年 4 月 5 日, 最后一个观测是安东尼厄斯(Antoninus)统治时期(公元 137—160 年)对水星大距的观测, 时间是公元 141 年 2 月 2 日, 两次观测的地点都是亚历山大^①. 那么很清楚, 托勒玫的工作主要是在此期间的一些成熟的观测的基础上进行的.

^① O Pedersen. A Survey of the Almagest. Odense: Odense University Press, 1974. 12

另外,托勒玫在《至大论》中的恒星表(卷Ⅶ,4)的历元是安东尼厄斯统治开始的那年^①。还有一个事实是由他在安东尼厄斯统治时期(约公元147年)奉献给当时 Nile 西部的一个小镇 Canopus 的 Savior God 的碑文的要旨——*Canobic Inscription*,上面提供了改进了的行星模型的参数^②。图默由以上三点推断,托勒玫的《至大论》在公元150年之前就完成了^③。

1.3 结构

《至大论》总共13卷,在第Ⅰ、Ⅱ卷中,托勒玫系统地陈述了他的地心宇宙观,结合他以及前人建立的球面天文学和三角学知识,系统地描述了地面观测者所见天文现象。第Ⅲ卷阐述了关于太阳年长度和太阳的理论,第Ⅳ卷是关于月球理论的论证,对于他发现的“出差”现象也在此系统论证。第Ⅴ卷围绕月球视差现象介绍了他发明的仪器和有关日月距离的理论。第Ⅵ卷是关于日月食的理论。第Ⅶ和Ⅷ卷是关于恒星理论和托勒玫恒星表的内容,涉及岁差理论。第Ⅸ到Ⅻ卷是关于行星的理论,除了给出描述内外行星的一般几何模型的分析 and 确定任意时刻的位置的数理计算程序以外,对行星的逆行、留和大距等复杂的不规则现象和在纬度方向的理论分别辟两卷专门进行了系统的定量化描述。

在《至大论》的每一种理论中,按照每一卷内容安排的顺序,基本包括以下几大部分:

第一,主要的观测记录和对这些记录数据的分析,包括托勒玫本人的观测和他精心挑选的前人的观测,这些内容一般放在每一卷的开始。它们有两个主要用途:经过分析和筛选被用于几何模型的提出;对于已经提出的几何模型,通过另一些观测事实进一步计算和验证。

第二,对古代天体运动周期(主要是巴比伦的)的系统分析和论证。通过这些周期(包括会合周期)可以计算得到天体的平运动角速度,进一步给出不同单位的各种平运动表格,这些表格在后面计算天体的视运动表格时常常用到。

① G J Toomer. Ptolemy's Almagest. London: Gerald Duckworth & Co. Ltd, 1984

② N T Hamilton, N M Swerdlow and G J Toomer. The Canobic Inscription: Ptolemy's Earliest Work. By J L Berggren and B R Goldstein (ed.). Acta Historiae Scientiarum Naturalium et Medicinalium. Copenhagen, 1987, 39: 5—73

③ G J Toomer. PTOLEMY. Charles Coulston Gillispie (Editor in Chief). Dictionary of Scientific Biography. Vol. 11. New York: Charles Scribner's Sons, 1981. 186—206

第三,给出天体运动的基本概念假设.这里托勒玫首先对天体各种复杂运动进行分离,通过分析,有时需要不止一种非匀速运动假设,例如月球和行星的理论都是这样的.然后根据不同的非匀速运动,提出天体模型和建立这个模型所必需的一些引理.对于月球模型来说,就是如何把同心本轮和偏心本轮结合起来,分析月球的出差现象,以及关于偏心圆和本轮模型等价性的证明;对于行星来说,就是解释为什么和怎样把本轮和偏心圆模型联系起来解释行星的双非匀速运动.证明了这样两个引理:利用外行星在冲时相对太阳的位置证明,在平合和平冲时,本轮中心到本轮上行星的连线,和偏心圆上的平太阳到中心的连线正好在同一直线上;而在所有其他距角时,上面叙述的这两个量将互相平行,尽管它们指的方向总是变化的.

第四,针对天体不同的非匀速运动,详细给出证明(demonstration)过程.在这个过程中,一般要解决以下几个问题:根据各个天体的观测数据,确定几何模型的参量.这里有一个可资借鉴的技巧就是,对于月球来说,精心选择三次不同的月食观测;对于行星来说,精心选择三次不同冲的观测.利用这些观测和平面三角学知识,在给定的一些基本名词术语的基础上,通过几何图形可以解决以下几个问题:求出各自模型的偏心率 and 远地点的位置以及本轮的半径;各个天体非匀速运动改正的计算,一般是指中心差的计算,对于月球和行星理论,还增加了辐角差的计算;模型合理性的检验.

第五,对最初建立平运动表基础上计算出的平运动角速度进行修正.

第六,给出天体在经度和非匀速运动两种不同周期平运动的初始值.这是在托勒玫规定的纳波纳萨尔(Nabonassar,统治时间从公元前746—前732年)元年作为历元时的值.

第七,由天体的周期运动,得到计算它的真位置的一般方法和程序.对于月球理论,分别在卷V的6(How the position of the moon can be calculated geometrically from the periodic motions)和7(Construction of a Table for the complete lunar anomaly)中,这里涉及到他的数学思想;对于行星,托勒玫用包含了数学方法的文字详细描述了这个程序,这反映在《至大论》卷XI,9(How the true position can be found geometrically from the periodic motions)中.一般地,我们按照托勒玫的意思在文章中把它们分解为若干步骤.

第八,给出天体的非匀速运动改正表和关于表格中各个量的含义的解释和计算(On the complete calculation of the moon's position).另外托勒玫还给出