實用微積分學

劉薰宇著

商務印書館

實用微積分學

劉薰宇著

商務印書館

實用微積分學

劉薰宇著

商務印書館出版
上海河南中路二一一號
（上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號）
新華書店總經售
商務印書館北京廠印刷
(53723)
1953年4月本館第1版 1954年8月本館第3版
印數 6,001—7,000 定價 ¥13,000

前　言

教了不少年、不少次的微積分，一直都是用英文課本，美國的、英國的．美國的也好，英國的也好，不用說都是爲他們的讀者編的．他們的讀者生活在他們的和中國不同的環境裏，有着不同的習慣以及不同的需要．用英文課本來教中國讀者，當然就免不了有時要'削足適履'；並且讀者增加了一些文字上的負擔，有時就不免顧此失彼．

七八年來，一直打算動手試編一本'大一'用的微積分課本，卻始終沒有一個自己感到滿意的腹稿，也沒有連續寫作的比較從容的時間，除了擬過幾次章目，沒有寫過一個字．1947 年暑期友人高士光兄主持高級工業學校，很以找不到適用的教本爲苦．偶然談起，使我轉了一個念頭，先試編一本爲高級技術學校用的、比較簡單而實用的教本吧．自然，所謂比較簡單實用，並不等於把大學用的課本來壓縮或删減．經過一年多地盤算，我得到了一個基本原則，要打破把微分和積分截然分成兩部分的老辦法．從這一個原則出發，我的計劃漸漸地具體，漸漸地成熟，然而已是 1949 的歲暮了．

今年，基本上全國都解放了，經濟建設和文化建設已成爲迫切的需要，一切本國文的讀物也就非大量生產不可．這使我很興奮．三四月間，開明書店給我一封信，說有意出本供技術學校用的實用微積分，問我有興趣編沒有．我沒考慮過我的時間許不許可，就無條件地答應；並且預約七八月間交稿．興趣，老實說在解放以前，一點也提不起；政治那樣地烏煙瘴氣，國家的前途誰知道哪一天纔會見到曙光！

答應編寫的信發出去，就病了一個多月，直到五月中纔能開始，

一開始就感到時間實在太不從容. 有時兩三天纔寫四五行,但有時也就盡一個星期日從上午六時到下午十二時,寫它一萬幾千字,很有把握在七月內完成初稿. 七月中旬,工作有了變動,我離開貴陽到北京,寫作中斷. 初稿的完成已是九月中旬,地點已在北京了. 照我的慣例,初稿寫完後,總要讓它躺相當的時間,十月中旬開始整理.整理完,又放了幾天,纔重看一次,現在算是完成了.

關於它的內容,在這裏簡單地提一下:

第一,我是把微分和積分,分段對照着編的.

第二,對於各種概念,我都放在用到的地方纔個別提出,而不採用集中的辦法.

第三,我將全書分成二卷,上卷專講基本的運算,下卷專講應用.

第四,主要的是照顧實用,理論有乾脆不提的,也有比較粗疏的.

第五,主要的對象雖是高級技術學校的讀者,但我還想到,供'大一'的讀者做參考,讓讀者比較能够把握住這一門學科的基本的輪廓.

一九五〇年十一月十日於北京

目　次

上　卷

一　導函數……………………………………………………………………1

常數和變數(1)　絕對常數和任意常數(2)　自變數、倚變數和函數(3)　函數的符號(4)　單變數函數和多變數函數(5)　函數的值(6)　極限(8)　兩個重要的極限值(11)　連續函數和不連續函數(14)　增值(15)　無窮小量和它的級(15)　過任意曲線上任意一點作切線(17)　一般運動的速度(19)　導函數(20)　導函數的符號(21)

二　微分法……………………………………………………………………22

微分法(22)　代數函數和它的導函數(23)　常數 C 關於自變數 x 的導函數(24)　函數和的導函數(24)　一個常數 C 和一個函數 u 的積 Cu，關於自變數 x 的導函數(24)　函數的積關於自變數 x 的導函數(25)　兩個函數 u 和 v 所成分數 $\frac{u}{v}$ 關於自變數 x 的導函數(26)　函數的函數和它的導函數(29)　反函數和它的導函數(30)　公式(VII)和(I)的推廣(31)　顯函數、隱函數和隱函數的微分法(34)

三　積分法……………………………………………………………………37

微函數(37)　微函數的求法(39)　變率和導函數的另一個意義(40)　積分法(42)　積分常數(43)　積分常數在幾何上的意義(44)　積分的基本公式(45)　無窮小量的和(48)　積分法的另一個意義，作爲求無限個無窮小量的和的方法(53)　定積分和不定積分(55)　定積分的兩個重要性質(55)

四　超越函數的微分法和積分法………………………………………………58

超越函數：對數函數、指數函數、三角函數和反三角函數(58)　對數函數的微分法(58)　特殊的指數函數的導函數(59)　一般指數函數的導函數(59)　對數的微分法(61)　和對數函數或指數函數有關的積分法(63)

三角函數的微分法(66)　關於三角函數的積分法(69)　關於含有三角函數的微函數的積分法(71)　反三角函數的微分法(75)　關於反三角函數的積分法(78)　另一個代數函數的積分法(79)

五　一般的積分法……………………………………82

一般的積分法(82)　分項積分法(82)　分部積分法(86)　替換法 92)

六　偏微分和重積分……………………………………102

偏微分和偏導函數(102)　全導函數 105)　偏微函數和全微函數(105)　連續微分和高次導函數(109)　連續積分(112)　偏微分的連續(114)　偏積分的重積分(117)　二重定積分和三重定積分(120)

下　卷

七　切線和法線……………………………………125

切線和法線的方程式(125)　影切線和影法線以及它們的長(126)　切線和法線的長(126)　曲線上任一點的斜率(極坐標的)(128)　極坐標的切線、法線、影切線和影法線的長(130)

八　曲線的探究……………………………………133

曲線的方向 133)　升函數和降函數(135)　函數升降的判定(136)　轉向點以及函數的極大值和極小值(137)　極大值和極小值的判定(I)(138)　極大值和極小值的判定(II)(142)　曲線的凹上、凹下和反點(145)　曲線的描繪(147)

九　曲線的長……………………………………152

曲線的長(152)　弧的微函數——直坐標的(153)　弧的微函數——極坐標的(154)　弧長的求法(157)

一〇　面積……………………………………160

面積的微函數(160)　參數方程式的曲線的面積(162)　極坐標方程式的曲線的面積(163)　旋轉面的面積(165)　用二重積分求面積——直坐標的(167)　用二種積分求面積——極坐標的(171)

一一　體積 ………………………………………… 173

旋轉體的體積(173)　中空旋轉體的體積(175)　截面爲一個變數的函數的體積(176)　用三重積分求體積(179)

一二　力學 ………………………………………… 182

位移、速和速度(182)　分速度及合速度(183)　加速度(186)　兩種特殊的加速度(187)　拋射運動(191)　重心(196)　轉動慣量和迴轉半徑(202)　液壓(206)　功(207)

一三　近似積分和機械積分 ………………………… 209

近似積分(209)　梯形法則(209)　拋物線法則(210)　級數法(212)　積分曲線(214)　積分器(216)　一條定長直線在平面內所掃過的面積(218)　極式面積計(219)

附錄 I　答案 ……………………………………… 221

附錄 II　常用曲線 ………………………………… 242

上卷

一 導函數

1.【常數和變數】 在平面幾何中,我們若用 r 表圓的半徑, C 表圓周的長, A 表圓的面積,則

$$\text{(i)}\quad C=2\pi r,\qquad\qquad \text{(ii)}\quad A=\pi r^2.$$

在這兩個公式中,由於圓的大小不同,它們的半徑 r 也就不同. 自然,跟着它們的周長 C 和面積 A 也就不同. 但是這兩個公式中, 2 和 π(3.1416)的值卻是不變的.

在物理學中,一個物體,從高處自由落下,若用 t 表落下所經過的時間, S 表經過這段時間所落下的距離,而我們不把空氣的阻力計算在內,則

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

在這個公式中,落下的時間有長有短,跟着落下的距離也有長有短. 但是係數 $\frac{1}{2}$ 和指數 2 的值固然是不變的,而 g 所表的重力加速度,在地球上的一定地點,也是不變的.

在研究一類問題中,例如圓的周長和面積以及物體自由落下的距離,數值固定不變的數,稱為常數;如上例的 $\frac{1}{2}$, 2, π 和 g.

反過來,在研究一類問題中,數值是隨着所研究的具體的、特殊的情況而不同的,稱為變數;如上例的圓的周長 C,面積 A 和半徑 r,以及物體自由落下的距離 S 和時間 t.

2.【絕對常數和任意常數】 我們在平面解析幾何中,已經知道:

(i) $y=x+b$ 表示和 X 軸相交成 $45°$ 角的一系平行線(圖 1).

(ii) $y=mx+3$ 表示和 Y 軸相交於距原點 3 個單位長的一束直線(圖 2).

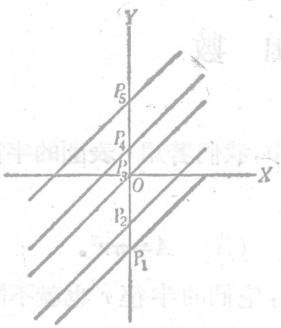

圖 1

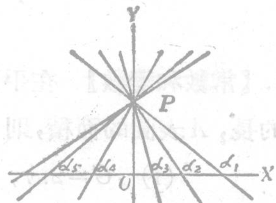

圖 2

(iii) $(x-2)^2+y^2=r^2$ 表示圓心是 $(2,0)$ 的一系同心圓(圖 3).

(iv) $x^2+(y-b)^2=4$ 表示圓心在 Y 軸上,半徑為 2 的一串相等的圓(圖 4).

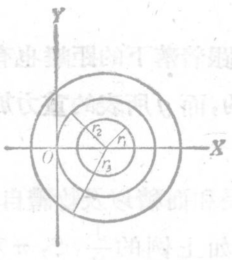

圖 3

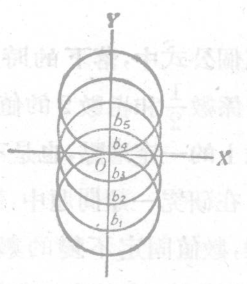

圖 4

這四個式子中, $1,3,2,4,b,m,r$ 都是常數; 但性質卻不相同. 1 是 $\tan 45°$ 的值, 3 是 P 點的縱坐標, 2 在(iii)是圓心 C 的橫坐標, 4 是圓半徑的平方; 它們的值都是確定不變的. 這種常數稱為絕對

常數.

至於,(i)的b表直線和Y軸的交點$P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots$的縱坐標,是隨某一條直線的位置而變的;(ii)的$m$表直線的斜率$\tan\alpha_1, \tan\alpha_2, \tan\alpha_3, \cdots\cdots$,也是隨某一條直線的位置而變的;(iii)的$r$表圓的半徑$r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots$,隨着某一圓的大小變動;(iv)的$b$表圓心的縱坐標$b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$,隨着某一圓的位置變動. 這種常數稱爲任意常數.

(注意) 絕對常數,$2, 3, 4, \pi, g$的符號是一定的. 任意常數,習慣用英文字母或希臘字母的頭幾個表示,如$a, b, c, \cdots\cdots, \alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$. 變數則用英文字母的末幾個表示,如$x, y, z$.

3.【自變數、倚變數和函數】 在第一節所舉的例中,圓的半徑r變動,則圓的周長C和面積A,也隨着它變動,如下面所表示的:

$r=1$公分,　$C=6.2832$公分,　$A=3.142$平方公分;

$r=2$公分,　$C=12.5664$公分,　$A=12.566$平方公分;

$r=\frac{1}{2}$公分,　$C=3.1416$公分,　$A=0.785$平方公分.

又物體落下的時間t變動,則落下的距離S也隨它而變動,如:

$t=1$秒,則　$S=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1^2$公尺$=4.9$公尺;

$t=2$秒,則　$S=\frac{1}{2}\times 9.8\times 2^2$公尺$=19.6$公尺;

$t=\frac{1}{2}$秒,則　$S=\frac{1}{2}\times 9.8\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$公尺$=1.225$公尺.

C或A隨着r變,S隨着t變,我們把r和t看成自己在變,因而稱它們爲自變數.

至於C, A和S是因別的變數變了,它們纔跟着變的,稱爲倚變數.

當然,在

$$C=2\pi r,\quad A=\pi r^2 \quad 和 \quad S=\frac{1}{2}gt^2$$

中,我們把r和t看成自己在變,這只是一種看法. 假若我們掉換一

個立場，把圓的周長 C，或圓的面積 A 看成自己在變，則圓的半徑 r 也就只好跟着它變. 同樣地，若把物體落下的距離 S 看成自己在變，那末物體落下的時間 t 也只好跟着它變了. 於是 C, A 和 S 便是自變數，而 r 和 t 成了倚變數.

所以，一個式子所聯繫的兩個(或兩個以上的)變數，哪一個(或幾個)是自變數，哪一個是倚變數；這是由我們的看法來決定的，是相對的.

再舉一個例，物理上，擺動的週期 T 和擺的長 l 有這樣的關係：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

把擺的長 l 看作自變數，則擺動的週期 T 便是倚變數. 用一個式子將倚變數和自變數的變化的關係聯結起來，我們一般地，就稱倚變數爲自變數的函數. 由 $C=2\pi r$ 和 $A=\pi r^2$，稱 C 和 A 是 r 的函數. 同樣地，由 $S=\frac{1}{2}gt^2$，S 是 t 的函數；由 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，T 就是 l 的函數.

因爲倚變數和自變數的關係是相對的，所以上面所舉的例也可以說，r 是 C 的函數，是 A 的函數，t 是 S 的函數，以及 l 是 T 的函數.

4.【函數的符號】 一般的場合，我們用 x 表自變數而用 y 表 x 的函數(倚變數). 於是前節的四個例，就可寫成：

$$\text{(i) } y=2\pi x,\quad \text{(ii) } y=\pi x^2,\quad \text{(iii) } y=\frac{1}{2}gx^2,\quad \text{(iv) } y=2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}.$$

我們又常用 $f(x)$ 代替 y，表明它是跟着自變數 x 變的，也就是說它是 x 的函數. 這個符號 $f(x)$ 的使用，我們可以將它分成兩部分 x 和 $f(\ )$ 來看. x 表的是自變數，$f(\ )$ 表的是函數和自變數的聯繫的形式，或者說表示函數跟着自變數而變化的一種情況或法則.

由於函數和自變數的聯繫的形式不同，也就是函數跟着自變數而變化的情況或法則不同，所用的符號就不得不加以區別，常用的是

$f(\ )$, $F(\ )$, $\phi(\ )$, ……, $f_1(\ )$, $f_2(\ )$, ……. 例如上面的四個式子,爲了分別清楚,我們便可寫成:

(i) $f(x)=2\pi x$,　　(ii) $F(x)=\pi x^2$,

(iii) $\phi(x)=\frac{1}{2}gx^2$,　　(iv) $\psi(x)=2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$.

其次,若自變數改用 y 或 z 或 t 表示,這四個式子便可寫成:

(i) $f(y)=2\pi y$,　　$f(z)=2\pi z$,　　$f(t)=2\pi t$;

(ii) $F(y)=\pi y^2$,　　$F(z)=\pi z^2$,　　$F(t)=\pi t^2$;

(iii) $\phi(y)=\frac{1}{2}gy^2$,　　$\phi(z)=\frac{1}{2}gz^2$,　　$\phi(t)=\frac{1}{2}gt^2$;

(iv) $\psi(y)=2\pi\sqrt{\frac{y}{g}}$,　　$\psi(z)=2\pi\sqrt{\frac{z}{g}}$,　　$\psi(t)=2\pi\sqrt{\frac{t}{g}}$.

5.【單變數函數和多變數函數】 解析幾何中,橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面積 A 等於 πab. 這就是說橢圓的面積 A 跟着 a 變也跟着 b 變. 換句話說,便是它跟着 a 和 b 共變. 但 a 並不隨 b 變, b 也並不隨 a 變. 所以 a 和 b 同時都可以看成自變數,只有 A 是倚變數. 自然也就可以說 A 是 a 和 b 的函數. 一般地,若用 Z 代替 A, x 代替 a, y 代替 b,便可把它們的相依爲變的情況寫成:

$$Z=f(x,y)=\pi xy.$$

在電磁學中,若磁場的磁力線密度是 B 高斯,電流強度是 I 安,電線的長是 l 公分,則電磁力 f 的值,爲

$$f=\frac{1}{10}BIl \text{ 達因}.$$

若用 x, y, z 相應地代 B, I, l; 又用 u 代 f, 就可寫成:

$$u=F(x,y,z)=\frac{1}{10}xyz.$$

只含一個自變數的函數,稱爲單變數函數;含二個以上自變數的函數,稱爲多變數函數.

最末的兩個例中,原式也可以寫成:

$$f(a,b)=\pi ab \text{ 和 } F(B,I,l)=\frac{1}{10}BIl.$$

若用 x_1, x_2, x_3 相應地代 x, y, z，則可以寫成：

$$f(x_1,x_2)=\pi x_1x_2 \text{ 和 } F(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{10}x_1x_2x_3.$$

6.【函數的值】 將函數所含的自變數，用一定的數值代入表示函數的式子，計算出的結果，便是這函數對於所含自變數的那些數值的相應值。例如：

若 $x=1$，則 $f(x)=2\pi x$，即 $f(1)=2\pi\cdot 1=2\pi$；

$$\phi(x)=\frac{1}{2}gx^2, \text{ 即 } \phi(1)=\frac{1}{2}g\cdot 1^2=\frac{1}{2}g.$$

而 $x=-1$，則 $f(-1)=2\pi(-1)=-2\pi$；

$$\phi(-1)=\frac{1}{2}g(-1)^2=\frac{1}{2}g.$$

若 $x=3a$，則 $F(x)=\pi x^2$，即 $F(3a)=\pi(3a)^2=9\pi a^2$；

$$\psi(x)=2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}, \text{ 即 } \psi(3a)=2\pi\sqrt{\frac{3a}{g}}=2\sqrt{3}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

若 $x=4, y=7$，則 $f(x,y)=\pi xy$，即 $f(4,7)=\pi\cdot 4\cdot 7=28\pi$.

若 $x=10^5, y=25, z=30$，則 $F(x,y,z)=\frac{1}{10}xyz$，

即 $$F(10^5,25,30)=\frac{1}{10}\cdot 10^5\cdot 25\cdot 30=75\cdot 10^5.$$

(例 1) 若 $f(x)=3\sqrt{x}+\frac{2}{x}+7x^2+2$，求 $f(2)$，$f(0.1)$，$f(y)$、$f(m)$、和 $f(\sin x)$。

解 因 $f(x)=3\sqrt{x}+\frac{2}{x}+7x^2+2$，

故 $f(2)=3\sqrt{2}+\frac{2}{2}+7\cdot 2^2+2=3\times 1.414+1+28+2=35.242$；

$$f(0.1)=3\sqrt{0.1}+\frac{2}{0.1}+7(0.1)^2+2=3\times 0.316+20+0.07+2$$
$$=23.018;$$

$$f(y)=3\sqrt{y}+\frac{2}{y}+7y^2+2;$$

$$f(m)=3\sqrt{m}+\frac{2}{m}+7m^2+2;$$

$$f(\sin x)=3\sqrt{\sin x}+\frac{2}{\sin x}+7\sin^2 x+2.$$

(例2) 若 $y=\phi(x)=\dfrac{2x-1}{3x-2}$，證 $x=\phi(y)$；若 $\phi^2(x)$ 表示 $\phi[\phi(x)]$，則 $x=\phi^2(x)$.

解 因
$$y=\phi(x)=\frac{2x-1}{3x-2},$$

故
$$\phi(y)=\frac{2y-1}{3y-2}=\frac{2\times\dfrac{2x-1}{3x-2}-1}{3\times\dfrac{2x-1}{3x-2}-2}=x,$$

即
$$x=\phi(y).$$

又
$$\phi^2(x)=\phi[\phi(x)]=\frac{2\phi(x)-1}{3\phi(x)-2}$$
$$=\frac{2\times\dfrac{2x-1}{3x-2}-1}{3\times\dfrac{2x-1}{3x-2}-2}=x,$$

即
$$x=\phi^2(x).$$

習 題 一

1. 若 $f(x)=x^3-x+1$，求 $f(0), f(1), f(-1)$，並且證
$$f(x+h)=f(x)+(3x^2-1)h+3xh^2+h^3.$$

2. 若 $f(x)=x^2-5x+1$，求 $f(x^2)$，$f(x^3)$，$f(\sin x)$ 和 $f(\sin\dfrac{\pi}{4})$.

3. 若 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$，寫出 $f(y,x)$，$f(x,x)$ 和 $f(y,y)$.

4. 若 $y=f(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$，證 $f(y)=\dfrac{7x+10}{15x+22}$.

5. 若 $f(x)=x^2+2$ 和 $F(x)=4+\sqrt{x}$，求 $f[F(x)]$ 和 $F[f(x)]$.

6. 若 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $f^2(x)$ 表示 $f[f(x)]$, $f^3(x)$ 表示 $f\{f[f(x)]\}$,……, 證 $x=f^2(x)=f^3(x)=f^4(x)\cdots\cdots$.

7. 若 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, 證 $\frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)}=\frac{x-y}{1+xy}$.

8. 若 $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$, 證 $x=f(y)$.

9. 若 $f(x)=\log x$, 證

$$f(xy)=f(x)+f(y) \text{ 和 } f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y).$$

10. 若 $f(x,y)=x^2-y^2$, 證

$$f(\cos\theta, \sin\theta)=\cos 2\theta \text{ 和 } f(\sec\theta, \tan\theta)=1.$$

11. 若 m 和 n 爲正整數, $\phi(m,n=\frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}$, 證

$$\phi(m,n+1)+\phi(m+1,n)=\phi(m+1,n+1).$$

12. 若 $f(x,y,z)=\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$, 證

$$f(y+z,z+x,x+y)=2f(x,y,z).$$

7.【極限】 爲了要說明極限的意義, 我們先來探究下面的三個例:

(i) 設 S_n 等於幾何級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 的 n 項的和, 卽

$S_1=1$,

$S_2=1+\frac{1}{2}=1.5$,

$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1.75$,

$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1.875$,

……………………

$$S_n=1\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{1-2^n}{2^n}}{-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

由這一串式子看來，這個級數的和，n 越大它也跟着越大，這是第一點．但它無論怎樣跟着 n 變大，比 2 總要小 $\frac{1}{2^{n-1}}$，所以 S_n 總不會和 2 相等，這是第二點．最後，我們由 n 的逐漸變大，而使這級數的和 S_n 和 2 的差可以變得比我們任意指定的任何小的正數都小，這是第三點．

(ii) 算術中，用 3 去除 1，無論除到多少位小數，總是除不盡的；我們說 $\frac{1}{3}=0.\dot{3}=0.3333\cdots\cdots$，是一個循環小數．而

$$\frac{1}{3}-0.3\quad=\frac{1}{30},$$
$$\frac{1}{3}-0.33\ =\frac{1}{300},$$
$$\frac{1}{3}-0.333=\frac{1}{3000},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{3}-0.3333\cdots\cdots\text{（到 } n \text{ 位小數）}=\frac{1}{3\times10^n}.$$

可見，循環小數 $0.\dot{3}$ 的值，位數越多，它也跟着越大，這是第一點．但它無論怎樣跟着 n 變大，比 $\frac{1}{3}$ 總要小 $\frac{1}{3\times10^n}$，所以 $0.\dot{3}$ 總不會和 $\frac{1}{3}$ 相等，這是第二點．最後，我們由 n（小數位數）的逐漸變大，而使循環小數 $0.\dot{3}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的差，可以變得比我們任意指定的任何小的正數都小，這是第三點．

(iii) 平面幾何中，若取定圓的半徑作長的單位 1，這圓的內接正 n 邊形的一邊的長爲 a，內接正 $2n$ 邊形的一邊的長爲 a'，以及外切正 $2n$ 邊形的一邊的長爲 b'，則

$$a'=\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}\quad\text{和}\quad b'=\frac{2(2-\sqrt{4-a^2})}{a}.$$