弹性力学（上册）

盖秉政

哈爾濱工業大學出版社

弹 性 力 学

（上 册）

盖秉政

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

本书系统地讲述经典弹性力学问题，包括平面问题的基本理论与求解方法；空间问题的基本理论与求解方法；能量原理与能量方法；杆、板、壳理论；热弹性与动弹性问题；弹性力学中的数值方法以及弹性稳定性等内容。本书注重对弹性力学基本内容的阐述；注重对基本概念、基本理论、基本方法的讲解，并遵循着由浅入深、循序渐进、内容重复加深、便于自学的原则。

本书适于工程力学、土木、机械、航空航天及相近专业本科生（或研究生）选用，也可供相关教师及工程技术人员使用（或参考）。

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学/盖秉政.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.10

ISBN 978-7-5603-2948-2

Ⅰ.弹…　Ⅱ.盖…　Ⅲ.弹性力学　Ⅳ.0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 166282 号

策划编辑　尹继荣
责任编辑　张　瑞　范业婷　刘　瑶
封面设计　刘长友
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 49　字数 1 128 千字
版　　次　2009 年 10 月第 1 版　2009 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2948-2
定　　价　88.00 元(含上下册)

前　　言

弹性力学是工程力学及相近专业本科生(或研究生)重要的技术基础课。弹性力学中许多概念、理论与处理问题的思想方法是学习与掌握诸如塑性力学、断裂力学、复合材料力学等后续课及航空航天、土木、机械、造船、地震地质、水(港)工程等工程专业课程的基础。因此,编写各种类型的弹性力学教材,供有关人员学习与使用,是提高弹性力学及相关课程教学质量所必须的。

弹性力学自它萌生至今已有350多年的历史,有关弹性力学的研究成果及各种各样的出版物(包括教材、学习辅导材料、习题集等)十分丰富,它们都是编写本书取之不尽的宝贵资源。另一方面,多年来笔者一直为本科生(或研究生)讲授弹性力学,本书就是在笔者历年讲课稿基础上编写而成的。

编写本书时,笔者注重考虑的几个问题是:

1.尽量选择经典弹性力学中最基础、最容易为读者接受的内容,同时又适当地照顾到经典弹性力学在内容上的完整性。在内容的编排上尽量作到由浅入深、循序渐进、突出基本概念、基本理论及基本方法的阐述。对比较基础的内容作到说明与推演详细,对扩展性的内容说明与推演适当从简,以利于读者自学。

2.推导基础性公式时,过程尽量写全写细,以便读者理解,但对带有专题性的内容,为节省篇幅和促进读者自学,过程则作了大幅简化。

3.本书对公式一般不采用缩写记法,如张量记法及矩阵记法。但为了使读者了解这些记法和阅读有关书刊,书中在适当的位置,也对这些记法作了适当介绍。

全书共分10章。第1章绪论,讲述弹性力学内容,方法与意义,弹性力学中的基本概念,基本假设及弹性力学的发展概况;第2、3章讲述弹性力学平面问题,包括平面应力与平面应变问题的基本概念,平面间问题的基本方程,平面问题的求解方法等;第4、5章讲述弹性力学空间问题的基本理论与求解方法;第6章讲述弹性力学中的能量原理与能量方法;第7章讲述直杆、薄板及薄壳问题;第8章讲述热弹性和动弹性问题;第9章讲述弹性力学中的数值方法;第10章讲述弹性稳定性。

本书是在哈尔滨工业大学学校、院、系精心组织与安排下开始编写的,在编写过程中参考了国内外公开出版的一些图书、会议资料及兄弟院校的有关讲义,并得到了同行们的积极协助和我校主管部门及出版社的大力支持,在此特向有关人员表示感谢。编写本书时,由于时间仓促及个人水平所限,书中难免出现问题及疏漏,敬请读者批评指正。

盖秉政

2009年6月

目　　录

第1章 绪 论

1.1 弹性力学的内容、方法与意义

弹性力学又称弹性理论,它是有关弹性固体在外力或温度等因素作用下产生变形及应力的理论,属固体力学的一个分支。

众所周知,自然界中所有物体(包括我们生活的地球及邻近我们的月球、火星等星球)都要受到力、温度等的作用,特别是工程界设计的一些"物体"。例如,挡水的坝体,运转状态下的水轮机、汽轮机,行驶的汽车、轮船、机车,工作的机床,正在吊装重物的起重机,正在作业的挖掘机、打桩机,各种建筑结构、桥梁,飞机等航空器,火箭、飞船等航天器,以及卫星等都是在明显的力及温度的作用下工作或运行的。

牛顿定律告诉我们,力是引起物体运动状态变化的根本原因,因此也是使物体产生变形的根本原因。物体运动状态的变化与变形可以引发一系列的自然现象和大量的工程问题,例如地球内部介质的错动引发的地震波与地面运动,各种机械或工程结构等因变形和应力引发的强度、刚度及稳定失效等。当然,物体内部出现变形及应力也不一定都是坏事,例如,我们可以利用弹簧、金属泡沫等材料的大变形进行减振或做成仪表,也可以利用销钉、薄膜等在过应力下发生破坏,从而实现对机械等设备进行保护。总之,物体中的变形与应力是人们身边的事,更是与人们生存、生产及生活息息相关的大问题。研究这类问题是人们认识某些自然现象及解决大量工程问题必不可少的。

为了认识固体中的变形与应力,最自然,也是最原始的作法是通过经验来判断。例如,啮合的齿轮齿根处的弯曲应力最大;支承在河两岸的单跨桥,在行进荷载作用下桥中的变形最大等。但是要清楚地说明固体中的变形与应力,单靠经验是办不到的,通常要建立一个描述固体变形与应力的数学模型。材料力学就是建立这种数学模型的典型例子,在那里固体变形与应力模型的建立,通过三个方面来完成。第一个方面即所谓平衡方面,它是从物体中切出一微元体,建立作用在微元体上所有力的平衡关系;第二个方面是纯几何的方面,建立位移与固体变形之间的关系;第三个方面是将固体中变形与应力联系起来的物理方面,最后将这三个方面综合起来,就可以得到一个用位移描述固体变形与应力的微分方程。应该肯定地说,材料力学建立描述固体变形与应力模型的上述三个方面是具有普遍意义的。但是更应该指出的是,材料力学并没有把上述三个方面真正用在任意形状的固体上,而仅仅用在一根细长的杆件上。杆受到拉(压)、扭转或弯曲力的作用,采用"平面变平面"的变形假设,即所谓的平面假设,把本来是三维问题简化到一维,对杆弯曲问题,即梁的问题,我们得到了一个用梁的挠度表示的4阶常微分方程,在具体的边界条件下就可以用这个数学模型分析各种荷载下梁的变形与应力。显然,材料力学建立的描述固体变形与应力的数学模型并不具有普遍性。它在两个层面上展现了它的不足,一个

是变形假设太苛刻,因为平面假设对绝大多数的固体是不可实现的即便是直杆受到扭矩作用,当它的横截面不是圆时,也不能实现“平面变平面”;同样,即便是梁,当它的跨高比不够大时,横截面也不能“平面变平面”,如此等等。另一个是细长杆毕竟是固体的一种特殊形状,因此对任意形状固体变形与应力的描述,材料力学还是无能为力的。弹性力学正是在继承与发展材料力学处理固体变形与应力的思想方法,并克服其不足的基础上发展起来的。

弹性力学同材料力学一样,也是通过平衡、几何、物理三个方面建立一个描述固体变形与应力的数学模型,然后再用这个数学模型对各种具体问题进行分析求解的。但是弹性力学在建模的具体思路上与材料力学截然不同。首先弹性力学建模时采用的基本假设,对所有的固体在初阶近似下几乎都是可以接受的,其次弹性力学在建模时不像材料力学那样总是取一段含有杆边界的微元体来进行变形及应力分析,因而使它局限于细长杆这种特殊形状的固体,而弹性力学则是从固体中的任意一点出发,分析一点及其该点无限小邻域的变形应力及它们的变化规律,所以建立的数学模型不再对固体的几何形状提出任何要求,因而适合于任意形状的固体。对固体的变形与应力问题建立一个普遍适用的数学模型(一般是边值或初边值的数学方程),再用这套方程对各种具体问题分析求解,这就是弹性力学处理与解决问题的基本方法。

弹性力学在分析问题时,一般采用比较严格的数学推演,不采用与具体问题有关的固体变形与应力分布的任何假设,得到的结果比较精确,所以可以用它来评价材料力学或其他从经验得到的一些关系(如它们的精度和实用范围等),正因为如此,正统的弹性力学也称为数学弹性力学(或经典弹性力学)。但是也应该看到,用纯数学的方法,对具体问题求解弹性力学的边值(或初边值)问题并非是一件容易的事情,特别是在弹性力学模型初创及相继发展的一个很长时期里,由于计算工具及计算方法上的匮乏,绝大多数弹性力学问题用经典的弹性力学模型很难求解出来。鉴于工程上的实际需要,人们又捡起了材料力学的作法,即在经典弹性力学模型基础上,引用关于固体变形及应力分布的某些假设,最典型的例子就是板壳问题。对这类特殊形状的固体(即一个方向的尺寸远小于其他两个方向尺寸的固体——板壳),人们采用了变形前垂直于中面的法线,变形后仍垂直于中面,且法线长度保持不变的变形假设,即通常所说的“直法线假设”,从而使板壳问题的分析得到简化。在经典弹性力学模型基础上,针对某一类问题,引用变形或应力分布假设得到的弹性力学模型称为实用弹性力学模型,相应的弹性力学称为实用弹性力学。从这个角度来看,材料力学、结构力学、板壳理论等都属于实用弹性力学范畴。

经典弹性力学的数学模型是精确的、严格的,但在物质世界中也并不是完备的。因为经典弹性力学中采用的基本假设(也可以称为公理)都是最初步、最原始的。对这些假设的任何突破都是有关固体变形与应力分析的新的力学,例如不再遵守介质均匀性假设的弹性力学,可以产生出非均匀体弹性力学、多相弹性体力学、复合材料力学等;介质不符合弹性关系假设时可分离出塑性力学、黏弹性力学、蠕变力学;考虑介质的各向异性时,则产生各向异性弹性体力学,如果将磁、电等效应引入弹性体中可形成电、磁弹性力学;如果注意到介质的局部转动效应及长程效应可以发展出偶弹性力学及非局部弹性力学,如此等等。但是,我们应该注意,在经典弹性力学的数学模型基础上发展起来的如此多样的“新”

力学,都是架构在经典弹性力学基础之上的,没有经典弹性力学,这些多样的“新”力学也就无从谈起。因此,只有掌握了经典弹性力学,才有可能很好地认识整个固体力学乃至整个变形体力学。

随着计算机及计算技术(特别是有限元分析技术)的发展,现今弹性力学的绝大部分问题都可以实现数值求解。各种通用与专用计算软件的开发,也使弹性力学理论在科研与生产活动中发挥越来越大的作用。

1.2 弹性力学的基本概念

弹性力学经常用到的一些基本概念如下:

$$\text{基本概念}\begin{cases}\text{外力}\begin{cases}\text{体力}\\\text{面力}\end{cases}\\\text{内力}\begin{cases}\text{正应力}\\\text{剪应力}\end{cases}\\\text{位移}\\\text{应变}\begin{cases}\text{正应变}\\\text{剪应变}\end{cases}\end{cases}$$

1. 外力

外力是来自外界对所论物体的作用力,又分为体力和面力。

体力(也称体积力)是分布在物体体积内的力,如重力、惯性力、离心力等。物体内各点的体力一般来说是不同的,为了度量物体各点所受体力的大小与方向,我们可以在物体的一点取出一包围该点的一个小体积 ΔV,若在体积 ΔV 上作用的力为 $\Delta \boldsymbol{F}$,则在体积 ΔV 上作用力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{F}/\Delta V$,如果介质(材料)是连续的(见1.3节),则体积 ΔV 便可以以任意的方式缩小到所论点。与此同时,比值 $\Delta \boldsymbol{F}/\Delta V$ 将趋于一个极限值 $\boldsymbol{F}$,即

$$\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta V}$$

$\boldsymbol{F}$ 称为物体一点的体力集度(简称体力),显然它是一个矢量(也可称为体力矢量),并且是所论点位置坐标的函数。它在直角坐标 x,y,z 方向上的分量分别记为 X,Y,Z。在任意坐标系下沿坐标轴方向的分量记为 F_α(α 记坐标轴),体力的量纲是[力][长度]$^{-3}$。

面力是分布在物体表面上的力,如接触力、流体压力等。为了描述面力在物体表面一点的面力情况,我们在一点取出一包含该点在内的一小块面积 ΔS,若在 ΔS 点作用的力为 $\Delta \boldsymbol{P}$,则当小面积 ΔS 以任意方式收缩到所论点时,比值 $\Delta \boldsymbol{P}/\Delta S$ 将趋于一个极限值 $\boldsymbol{p}$,即

$$\boldsymbol{p} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S}$$

$\boldsymbol{p}$ 称为物体一点的面力集度(简称面力),显然它是一个矢量(称为面力矢量),并且是所论点位置坐标的函数。它在直角坐标 x,y,z 方向上的分量分别记为 p_x,p_y,p_z。面力的量纲是[力][长度]$^{-2}$。

在坐标系选定之后,外力(体力及面力)的分量均以沿坐标轴正向者为正,沿坐标轴负向者为负。

2. 内力

内力是物体各部分之间的相互作用力。按牛顿第三定律，物体中的内力是作用与反作用力，在物体内部它们是自相平衡的，在物体的边界上它们与面力平衡。为了认识物体内任一点处的内力，我们必须用一个通过该点的平面（或称截面）将物体假想地"切开"，使内力暴露出来，如图 1.2.1 所示。如果作用在包含所论点的微小面积 ΔS 上的内力为 $\Delta \boldsymbol{P}$，则比值 $\Delta \boldsymbol{P}/\Delta S$ 表示所论点处内力的平均集度。将面积 ΔS 收缩到所论点，则比值 $\Delta \boldsymbol{P}/\Delta S$ 将趋于一个极限值 $\boldsymbol{p}$，即

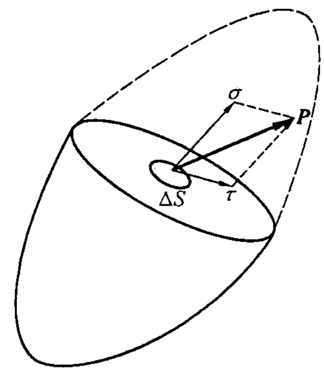


图 1.2.1

$$\boldsymbol{p} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S}$$

$\boldsymbol{p}$ 称为一点的应力矢量，它在截面外法线方向上的投影称为正应力，记为 σ_N，在截面内的投影称为剪应力（或切应力），记为 τ_N，下标 N 表示截面的外法线方向。如果截面的外法线方向与所论点处一个坐标的方向相同或相反，则在截面内的剪应力还可以沿截面内的两个坐标方向分解成两个剪应力，也就是说在这种情况下应力矢量沿一点的坐标轴的方向或相反的方向分解成三个应力分量，一个正应力，两个剪应力，如图 1.2.2 所示。为了更清楚地标明应力分量的指向，通常应力字母加两个下标，前一个下标表示应力分量作用面的方向，后一个下标表示应力分量所指的方向，对于正应力由于应力分量作用面的外法线方向与应力分量的指向是同一个坐标轴的方向，所以对正应力只用一个下标即可。例如在直角坐标系中剪应力 τ_{xy} 的两个下标中，x 表示剪应力作用截面的外法线方向沿 x 轴，y 表示

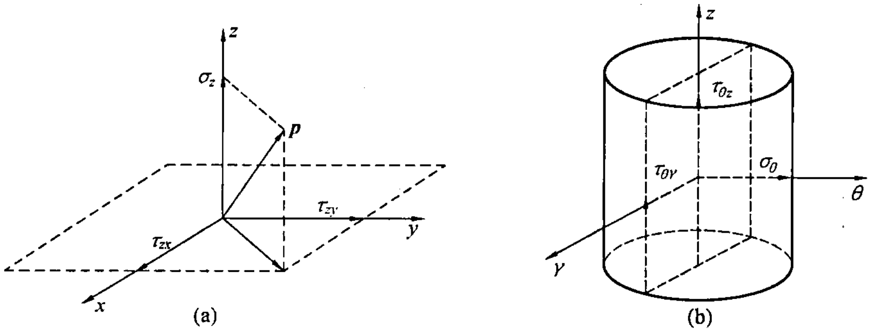


图 1.2.2

剪应力沿着 y 方向。通常规定外法线方向沿坐标轴正方向的截面为正面；反之，沿当地坐标轴反方向的截面为负面。正面上正的正应力与正的剪应力分量应沿当地坐标轴的正向，负面上的正的正应力与正的剪应力分量应沿当地坐标轴的负向；反之，应力分量规定为负。按着这样的规定，在一点处切出一微小正六面体，它的各面与直角坐标系的各坐标面平行时，六面体各面上正的正应力、剪应力及它们的标记符号不计应力随位置的微小变化时（如图 1.2.3 所示），应该注意这里应力分量正负号的规定与材料力学中的规定不完全相同。正应力分量两者均以拉为正，压为负，这是相同的；但剪应力则不同，例如图 1.2.3

中剪应力 τ_{yz} 与 τ_{zy}，按材料力学正负号的规定，一个是正，另一个则是负；而按弹性力学的规定它们全是正。又如剪应力互等关系，按着弹性力学剪应力正、负号的规定，在直角坐标系中将是

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

而按材料力学规定的正负号写出时，则是

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = -\tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = -\tau_{xz}$$

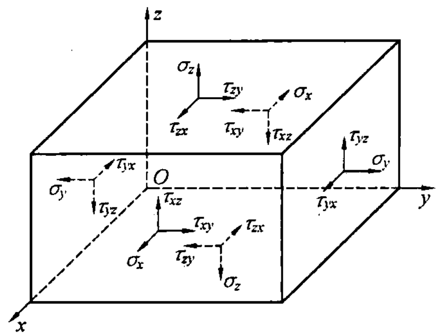


图 1.2.3

3. 应变

应变是物体形状与体积的变化，也称形变。应变产生的原因是物体各点在外力作用下发生了移动，这个移动称为位移，由于各点位移量与位移方向的“不协调”，因而使各点间的相对位置发生变化。我们把物体内相互靠近的两点间的微小线段称为线元，由线元围成的微小平面或曲面称为面元，而由面元围成的微小体积称为体元。物体的形变集中体现在线元、面元与体元的变化上。从物体中任一点发出的线元总可以沿坐标轴方向分解成三个子线元。当物体各点发生“不协调”位移时，各子线元长度出现了伸长(或缩短)，子线元的相对伸缩量，即子线元的伸缩量 Δdl 与子线元长度 dl 之比，当 dl 趋于零时，极限值

$$\varepsilon = \lim_{dl\to 0}\frac{\Delta dl}{dl}$$

称为相应子线元方向上线元的正应变，而各子线元间夹角的变化称为剪应变。正应变与剪应变统称应变，一般用希腊字母 ε 表示。为了明确应变所对应的子线元方向，通常在字母 ε 下加两个下标 α,β，分别表示两个子线元的方向，即写成 $\varepsilon_{\alpha\beta}$，当 $\alpha = \beta$ 时表示正应变，$\varepsilon_{\alpha\alpha}$ 可简写为 ε_α，当 $\alpha \neq \beta$ 时表示剪应变，它等于两子线元间角度改变量的一半(以弧度计之)，并且以角度减小为正，增大为负。在工程上常取剪应变为子线元间角度的改变，并把剪应变记为 $\gamma_{\alpha\beta}$，所以对于剪应变来说 $\gamma_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}$。例如用直角坐标系描述应变，则 α,β 代表 x,y,z，于是正应变为 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$，剪应变为 $\gamma_{xy} = \gamma_{yx},\gamma_{yz} = \gamma_{zy},\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$；用柱坐标描述应变，则 α,β 代表 r(径向坐标)、θ(周向坐标)、z(轴向坐标)，于是正应变为 $\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_z$；剪应变为 $\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta r},\gamma_{\theta z} = \gamma_{z\theta},\gamma_{zr} = \gamma_{rz}$，用球坐标描述应变，则 α,β 代表 R(径向坐标)、θ(经向坐标)、φ(纬向坐标)，于是正应变为 $\varepsilon_R,\varepsilon_\theta,\varepsilon_\varphi$，剪应变为 $\gamma_{R\theta} = \gamma_{\theta R},\gamma_{\theta\varphi} = \gamma_{\varphi\theta},\gamma_{\varphi R} = \gamma_{R\varphi}$。

应变(无论是正应变，还是剪应变)都是量纲为一的量，它们是物体中点的坐标的函数。显然应变与物体中点的位移有直接联系。位移是一个矢量(无量纲量)，记为 $\boldsymbol{D}$(或 $\boldsymbol{u}$)，它沿坐标轴方向的分量，记为 u_α，例如，对直角坐标系，α 代表 x,y,z，于是 u_α 即为 $u_x = u$，$u_y = v, u_z = w$，即为一点分别沿 x、y、z 方向的位移；对柱坐标，α 代表 r,θ,z，于是 u_α 即为 u_r,u_θ,u_z；对球坐标，α 代表 R,θ,φ，于是 u_α 即为 u_R,u_θ,u_φ。位移的量纲是[长度]。

1.3 弹性力学的基本假设

在 1.1 节中我们已经说过，为了解决物体在力或温度等因素作用下产生变形及应力的问题，首先必须建立一个分析这类问题的数学模型，然后再把这个数学模型用于各种具

体问题。由于在实际问题中涉及的因素太多,全面地考虑各种因素的细节将难以得到问题的数学模型,即便勉强地得到了问题的数学模型也可能由于它过于复杂,很难用它对具体问题进行分析求解。所以,在弹性力学建模时要采用尽可能少,但又在一个比较宽的范围内抓住问题本质的几条基本假设。经典弹性力学常采用的基本假设有如下几个。

1.连续性假设

连续性假设就是假定物体所占空间的各个部分都被组成该物体的介质所填满,不留任何间隙。或者更严格地说,我们用闭曲面在物体中圈出的任何一部分,当闭曲面以任何方式收缩到任意小的程度时,闭曲面内总含有组成物体的介质。连续性假设与物质组成的客观实际并不符合。一切物体都是由分子、原子等极小的微粒组成的,微粒之间总有一定的距离。因此,物体从微观上来看绝不是连续的。但是,当微粒的尺寸及它们之间的距离远小于物体的尺寸时,物体的微观结构对物体客观形变等现象的影响是可以忽略不计的,也就是说连续性假设是可以应用的。事实上,从基于这个假设推出的结果与实验结果的一致性,也肯定了这个假设是可以作为弹性力学(乃至连续介质力学)的基础来应用的。

采用连续性假设后,位移、应变、应力及密度等才有可能是连续的,才有可能用连续函数,或用仅在个别地方间断的连续函数来表示。物体的变形过程变成了物体中的点在物体变形前后一对一的映射过程。从而使我们可以使用极限过程以及由此引出的一切分析手段。

2.完全弹性假设

完全弹性假设也称线弹性假设,即假定物体在外力等因素作用下发生变形与应力,当外力等因素卸除后,物体中的变形与应力也同时随之卸除,即物体恢复到原来状态;并且物体的变形与应力与物体的变形过程无关,它们之间呈线性对应关系,即应变与应力间服从胡克(Hooke)定律。或者更明确地说,应力增加(或减少)多少倍,应变也增加(或减少)多少倍。应力改变符号,应变也改变符号,反之亦然。完全弹性假设也可以用一句话来说,那就是认为材料服从胡克定律的假设。对于脆性材料,当物体中的应力在比例极限以内,对于韧性材料,当应力在屈服极限以内时,胡克定律都是近似成立的。因此,把完全弹性这一限定材料性质的假设引入经典弹性力学模型之中,不但现实,而且也会有效地简化经典弹性力学数学模型的复杂性。从另一个角度来说,当物体的变形很小时,物体中的内能(或自由能)可以近似写成应变的齐二次函数,对变形的热力学过程作某些假定后,由内能(或自由能)取极值的条件,即可推出胡克定律。这又从另一个层面上为经典弹性力学采用完全弹性假设的可行性提供了佐证。

3.均匀性假设

均匀性假设认为物体的各个部分,不管它是大还是小,也不管它是处于物体的哪一个位置上都应是由同一种材料组成的,也就是说,它们应有完全相同的密度、弹性等力学性质。或者更简单地说,均匀性假设就是认为物体是由(纯而又纯的)同一种物质组成的。严格来说,完全满足这一假设的物体在世界上是很难找到的。但是,只要微细观的不均匀性在整个物体上分布是均匀的,把整个物体看成是满足均匀假设的物体,并不会影响物体客观应变与应力的分析。例如当物体由两种或两种以上材料组成时,只要每种材料的颗粒在物体中分布均匀,而且颗粒的尺寸远远小于物体的尺寸,则物体力学性能就是各组分材料的综合性能,而整个物体就可以看成是均匀的。对于那些客观上明显的非均匀的物

体，例如，加衬的轴瓦、隧洞衬砌、基础梁板等，则只能把该物体看成是两个以上的均匀物体，它们之间通过接触相互作用连接在一起。

4.各向同性假设

各向同性假设认为物体中各点的弹性与在相应点测量弹性的方向无关，换句话说各向同性假设就是物体在同一点的各个方向上具有相同弹性(力学性能)的假设。各向同性假设应与均匀性假设区别开来；前者强调的是同一点各个方向上弹性是否相同，而后者强调的则是不同点的弹性是否相同。不同点的弹性不同，但在同一点的各个方向上弹性相同，这是非均匀各向同性弹性体；反过来，不同点的弹性相同，但在同一点的各个方向上弹性不同，这是均匀各向异性弹性体。木材是均匀的，但不是各向同性的；钢筋混凝土是各向同性的，但却不是均匀的。

符合上述 4 个假设的物体称为理想弹性体。

5.小变形假设

小变形假设假定物体变形时，物体中所有点的位移、应变与转动都很小。确切地说，物体中各点的位移远远小于物体的原有尺寸，应变与转角都远远小于 1。按这个假设，我们在写物体变形后力的平衡条件时，可以不考虑变形对物体原有尺寸的影响，也就是说，我们完全可以用物体变形前的原始尺寸；另一方面这个假设也允许我们在建立弹性力学的数学模型时略去应变及转动的乘积项，从而使所建立的数学模型是线性的。正如前面所说，小变形假设与热力学定律结合起来是可以推出胡克定律的，这也是小变形假设的另一个内涵。

除了以上假设之外，我们总是认为物体在受力变形之前物体内是没有应力的，也就是说它处于一个自然状态。物体受力变形前的应力，即初始应力与物体的形成历史有关，我们总是相对物体的初始状态来计算它的变形与应力的。按这种考虑，我们没有把物体无初应力列为一项基本假设。此外，应该指出的是在上述 5 条基本假设中，最重要的是前两条，即连续性假设与完全弹性假设，而且不满足上述 5 条假设的任何一条假设都可能为经典弹性力学带来新的内容。

1.4 弹性力学发展概况

弹性力学作为一门科学，同其他科学一样，也是人们在认识自然、改造自然和发展生产的过程中逐渐形成与建立起来的。古代的人们在农牧作业、引水灌田、建桥、建房、造船等一系列活动中朴素地运用了有关物体变形及力的知识。但是，人们真正从科学上有意识地去探讨固体变形问题，通常认为是从 1638 年伽利略(Galileo)的工作开始的。他针对造船及水闸中梁的问题，发表了关于两种新科学的叙述与数学证明一书，提出了梁的弯曲问题。1678 年美国的胡克进行了材料研究与试验工作，首次用“力大，变形也大”的说法，揭示了物体变形与力成正比的线弹性规律，即胡克定律。1680 年马略特(Mariotte)给出了梁的应力与梁中性轴的位置，1705 年伯努利(J. Bernoulli)提出了平面假设并给出了梁的弯曲公式，1773 年库仑(Coulomb)最后完成了矩形截面梁弯曲的完整理论并建立了圆轴的扭转理论，1759 年欧拉(L. Euler)给出了压杆稳定的计算公式，1807 年杨(Young)提出了弹性模量的概念。这些零打碎敲的工作形成了弹性力学的前身，即材料力学的重要内容。

但是，随着生产的发展，特别是在欧洲工业革命后，各种机器的使用以及交通运输业的蓬勃兴起，人们提出了各种各样有关结构强度与应力分析的问题。显然，这些问题再用类似于材料力学的方法是难以解决的。1821年，法国桥梁专家，材料力学教师纳维(Navier)把弹性体看成是质点系，质点之间作用着内力，从而初步建立起了弹性力学的基本方程，1922年，工程师出身的数学家柯西(Cauchy)给出了连续体的概念，并从平衡、几何、物理三个方面建立了描述弹性体力学问题的方程组。尽管在以后相当长的一段时间里人们对弹性常数问题有所争论，但经典弹性力学的基本数学模型应该说已经建立起来，从此弹性力学步入了一个新的时期，即弹性力学问题的具体求解时期。

弹性力学的数学模型是数学上的所谓边值(或初边值)问题。对物体的具体几何形状及受荷载作用的条件，求出弹性力学问题的解，在数学上通常是很难办到的，特别是在19世纪初，弹性力学的数学模型刚刚建立的时候，人们仍用材料力学中习惯的办法，如平面假设来求解非圆截面轴扭转之类的问题。因此发展弹性力学的求解方法，便成了19世纪20年代以后弹性力学中最引人关注的问题。1854年，圣维南(Saint-Venant)在他发表的有关柱体扭转与弯曲的论文中，提出了一种数学与物理相结合的所谓半逆解法，并解决了等直柱体的扭转与弯曲问题，与此同时他还注意到如果加于柱体一端的外力是合力与合力矩相同的静力等效力系，那么不同力系在柱体中产生的应力在距离施力端较远的地方几乎没有差别，这就是后来人们所说的圣维南原理。圣维南原理的正确表述及在各种情况下的严格证明，至今仍是一件有趣而又十分重要的研究工作。1885年，布希内斯克(Boussinesq)求解了半空间受集中力作用问题。1862年，艾瑞(G.B.Airy)在弹性力学平面问题中引入应力函数，推动了平面问题的求解。1881年，基尔(G.Kirsch)求解了小孔附近应力集中问题。1882年，赫兹(A.R.Hertz)给出了两个弹性球体间接触问题的解。在同一时期能量原理在弹性力学中也开始萌生。18世纪中叶，拉格朗日(Lagrange)建立了最小势能原理；1872年，贝蒂(E.Betti)提出了功的互等定理；1876年，卡斯提良诺(A.Castigliano)揭示了最小功原理。

20世纪是弹性力学大发展，并且走向辉煌的时期。如果说19世纪的弹性力学是一个“展品”，人们还不怎么会用，到了20世纪，这种“展品”已经发展成为人们采用的畅销“商品”了。1914年，赫林格(E.Hellinger)及后来的赖斯纳(E.Reissner)提出了二类变量的广义变分原理；1943年，柯朗(R.Courant)在他的工作中萌生了有限元的思想；1950年，钱令希发表了余能原理；1954年，胡海昌及后来的鹫津久一郎(Washizu)提出三类变量广义变分原理；1960年，克拉夫(R.W.Clough)在他的一篇有关平面应力分析的论文中正式使用了有限元一词；1964年，钱伟长提出用拉格朗日乘子法构造广义泛函的方法；1965年，冯康提出了变分原理的差分格式(即有限元法)；1971年，卞学璜指出有限元法与差分法对某些边值问题的一致性，如此等等。与此同时，这一时期计算机及计算技术发展迅速。计算机的广泛使用及软、硬件的开发，使得原本无法求解的大量弹性力学问题，都能在一定程度上获得数值解。各种大型通用商业软件(如NASTRAN，ASKA，MARC，ANSYS，ABAQUS，SAP等)的出现，更使弹性力学计算能够直接融入CAD/CAM系统，成为工程设计不可缺少的组成部分。

除了上面谈的数值计算技术之外，20世纪在近似求解与精确求解弹性力学问题方面也有了长足的进展。在近似求解方面，自1908年里茨(Ritz)在瑞利(Reyleigh)之后完整地

提出了后来称为里茨法的近似方法，并把它用于薄板问题的求解。之后，一系列的近似求解弹性力学问题的方法接二连三地被提了出来，如最小余能法，卡斯提良诺法，康脱洛维奇(Kantorovich)法，弗拉索夫(Vlasov)法等能量变分方法以及伽辽金(Galerkin)法，屈列弗兹(Trefftz)法，正交法，最小二乘方法，配点法，区域法等各种限制误差的方法。这些方法都能在某种平均意义上给出弹性力学问题的近似解答。尽管有些解答的误差难以严格判断，但经验表明，如果近似解的基函数取自完备函数序列，并且相邻两次近似解之间的差别不大，则所给出的近似解的精度就是足够的了。在精确求解方面，主要是在两条路线上，一条路线是以弹性力学基本方程的一般解(或称通解)为基础，通过积分变换与级数方程或积分方程的求解方法，另一条路线是以解析(或准解析)函数论为基础的复变函数求解方法。所谓弹性力学基本方程的一般解，简单地说就是满足弹性力学基本方程的位移，或应力所具有的一般形式，后者也称为应力函数。历史上，许多学者研究了弹性力学的一般解问题，较早又较有影响的一般解有：1885 年及 1930 年分别由布希涅斯克(Baussinesq)与伽辽金给出的位移由 3 个重调和函数表达的布希涅斯克 - 伽辽金一般解；1932 年及 1934 年分别由巴普考维奇(Papkovich)及诺埃伯(H.Neuber)给出的位移由 4 个调和函数表达的巴普考维奇 - 诺埃伯一般解以及艾瑞、勒夫(Love)、麦克斯韦(Maxwell)、莫瑞拉(Morera)、贝尔特拉米(Beltrami)、谢菲尔(Schaefer)等一般解(应力函数)。用应力函数精确求解的弹性力学问题类型很多，例如弹性层问题、厚板问题、应力集中问题、裂纹问题、接触问题等。复变函数方法是穆斯海里什维里(H.H.Muskhelishvili)于 20 世纪 30 年代在前人零星工作基础上创造的精确求解弹性力学平面问题有效的数学方法，之后，他的学生维库阿(Викуа)对这一数学方法又作了许多新的发展。特别是在 1959 年亚历山德罗夫(А.я.Александров)进一步将复变函数方法推广到三维情况，提出了空间弹性力学问题的复变函数求解方法。

近半个多世纪来，弹性力学的发展更是惊人，靠着强大的计算机的计算能力，人们已经能够把多种物理因素、几何因素融入经典弹性力学中，形成了流固耦合、磁电弹性耦合、(正、逆)热弹性耦合、气弹性耦合、黏弹塑性耦合等多场耦合下的弹性力学；形成了考虑几何非线性、接触非线性、耦应力效应等的弹性力学；形成了考虑材料微细结构的多相弹性体力学、复合材料力学，以及金属泡沫橡胶之类的超弹性材料力学；形成了考虑物质间长程相互作用的非局部弹性理论以及把优化、概率、模糊、控制等概念引入到经典弹性力学中而形成的广义下的弹性力学等。与此同时，弹性力学的各种计算方法，特别是各种数值算法更是日新月异，层出不穷，形成了计算固体力学。弹性力学发展到今天，从广义上来说如此多样化，如此庞大，应用面与能够解决的实际问题也越来越广。但是我们也应该看到弹性力学的发展远未达到尽善尽美的程度，例如，多场耦合下弹性力学的数学模型越来越复杂，也许并未抓住建模的关键量及问题的实质。所以，弹性力学的发展空间还很大，留给人们要做的事也还有很多。

习　题

1.什么是弹性力学(或弹性理论)？

2.弹性力学是如何分析与解决力学问题的，它与材料力学有何区别和联系？

3.什么是数学(或经典)弹性力学，什么是应用弹性力学，两者有何异同？

4.为什么说经典弹性力学的数学模型是精确的、严格的？举例说明由经典弹性力学可派生出哪些“新”的力学。

5.为什么说只有掌握了经典弹性力学才有可能认识整个固体力学乃至变形体力学？

6.现今分析与求解大部分弹性力学问题靠什么方法，为什么？

7.什么是外力、体力、面力，它们的符号是怎样规定的？

8.什么是内力、应力(正应力、剪(切)应力)，它们的符号是怎样规定的，与材料力学规定的符号有何异同？

9.什么是应变、正应变、剪(切)应变，它们的符号是怎样规定的？

10.经典弹性力学采用的基本假设有几个，它们分别是什么？

11.经典弹性力学中为什么要采用连续性假设，它有什么好处？

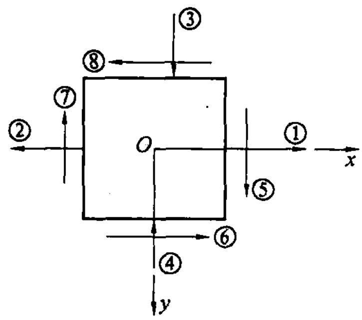
12.完全弹性假设中的“完全”二字指的是什么？

13.举例说明均匀性假设与各向同性假设的根本区别。

14.小变形假设的具体含义是什么？

15.什么是理想弹性体？一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否视为理想弹性体？岩质地基和土质地基能否视为理想弹性体？

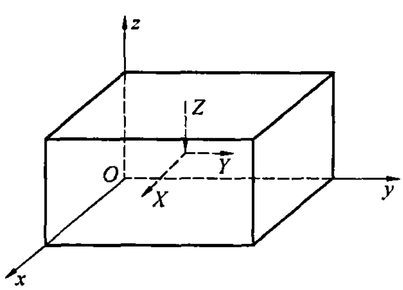
16.试用应力符号标出图中所示(平面)微元体各面上的应力，并指明它们的符号。



16 题图

17.如果将 16 题的坐标 Oxy 逆时针转 180°，那么在新坐标系下应力符号有何改变。如果只将 x(或 y)坐标反向，应力符号又有何变化？

18.如图所示，微元体上的体力分量为 X、Y、Z，哪些是正的，哪些是负的？如果将各坐标反向，所标体力的符号有何变化，如果只将一个坐标反向时体力的符号又有何变化？

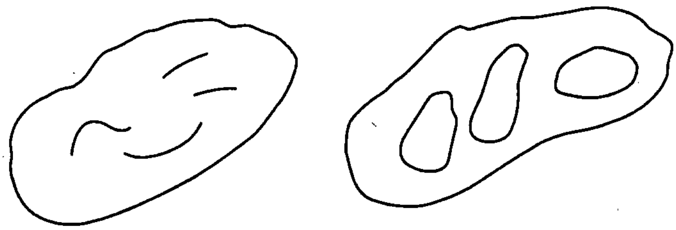


18 题图

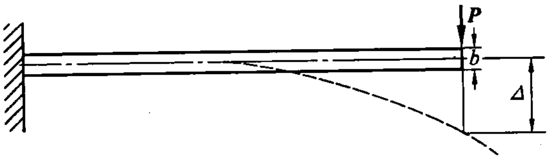
19.试分析具有裂纹的物体是否是符合连续性假设的物体，具有孔洞的物体又如何(见图)？

20.梁端挠度 Δ 远大于梁的横向尺寸 b ($\Delta \gg b$)时，图中所示是悬臂梁中的应变一定很大吗？此时梁的变形是否符合小变形假设？

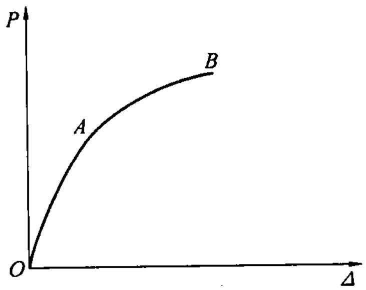
21.假设杆在正、逆加载时完全按着如图所示变形曲线 OAB 或 BAO 的路线进行，试说明杆材的变形是否是弹性的，是否是完全弹性的，为什么？



19 题图



20 题图



21 题图