简明线性代数

陈家春

$$AX = \lambda X$$

云南大学出版社

简明线性代数

陈家春 编

云南大学出版社出版发行

出版前言

本书从应用出发，通过建立新的结构来筛选内容，使它既简明，又充实。所有的讲述都力图符合初学者的思维发展过程，富于启发性，从而既便于授课，又使于自学。

本书可供高等学校物理类专业和工科各专业作为教材，也供其它相近专业和自学者使用。使用时，如果相应专业对线性代数要求较少，那么可以放过最后一章为部份或全部内容。

责任编辑：张世鸾
封面设计：

简明线性代数
陈家春　编
*
云南大学出版社出版发行
（云南大学校内）
云南科技印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32　印张：3.875　字数：84千
1991年3月第1版　1991年3月第1次印刷
印数：1～2000册
ISBN7-81025-098-3/O·6　定价：1.55元

目 录

第一章　行列式

许多实际问题的解决，都可以归结为研究一次方程组。一次方程组也叫做**线性方程组**。研究这种方程组的基本数学工具是行列式，现在就来讲述它。

§1　行列式的定义

1. 三阶行列式的定义　设 m 和 n 是任何两个正整数，由 mn 个数组成的矩形的表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

叫做具有 m 行和 n 列的**矩阵**；组成这个矩阵的数 a_{11}，a_{12}，…，a_{mn}，叫做它的**元素**。每个元素都有两个下标，第一个表示它所在的行的号码，第二个表示它所在的列的号码，就是说，记作 a_{ij} 的元素，位于矩阵的第 i 行和第 j 列。为了方便，矩阵（1.1）可以缩写成（a_{ij}）或者简单地记作 A。

行数和列数都是 n 的矩阵，叫做 n **阶矩阵**。每个 n 阶矩阵都有两条对角线，其中从左上角到右下角的一条叫做**主对角线**，而从左下角到右上角的一条叫做**副对角线**。

n 阶矩阵的基本数字特征是它的行列式——n 阶行列

式。三阶矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

的行列式 △，在解析几何里已经引进了，并且定义为

$$\begin{aligned} \triangle = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}。 \end{aligned} \tag{1.3}$$

我们看到，它是由六项组成的，其中每一项都是（1.2）中三个元素的乘积，而且每个乘积所含的三个元素，从行来看每行一个，从列来看每列一个。这些乘积具有

$$a_{1j}a_{2k}a_{3l} \tag{1.4}$$

的形式，其中第二个下标呈现的序列

$$j，k，l$$

是数码 1，2，3 的某一个确定的排列。让乘积（1.4）中的第二个下标 j，k，l 取所有可能的排列，结果得到以下六种排列：

$$1,2,3;\ 2,3,1;\ 3,1,2;\ 1,3,2;\ 2,1,3;\ 3,2,1。 \tag{1.5}$$

由此，从（1.4）刚好得出式子（1.3）的六项。但是，乘积（1.4）出现在式子（1.3）中时，像我们看到的那样，还要带上符号，其中带上"＋"号的那些乘积的第二个下标形成的排列是

$$1,2,3;\ 2,3,1;\ 3,1,2, \tag{1.5$_1$}$$

带上"—"号的那些乘积的第二个下标形成的排列是

$$1,3,2;\ 2,1,3;\ 3,2,1。 \tag{1.5$_2$}$$

为了找出带上"＋"号或"—"的规则，我们对于上述各个排列，比较其中较大的数码出现在较小的数码之前的情况。

在一个排列里，比较每一对数码，如果较大的一个位于较小的一个之前，就说这对数码构成一个**逆序**。（1.5_1）的第一个排列没有逆序，我们说它的逆序数是零。对于第二个排列，依次比较其中每个数码跟它后面各个数码的大小，我们看到，这个排列有两个逆序（一个是2在1之前，另一个是3在1之前），记作

$$\tau(2,3,1)=2。$$

同样，可以看到第三个排列有两个逆序，就是说

$$\tau(3,1,2)=2。$$

总之，我们看到，（1.5_1）中的所有排列都含有偶数（包括零）个逆序。用同样的方法研究（1.5_2）中的各个排列，我们看到，它们都含有奇数个逆序。这表明，**在乘积（1.4）中，凡是第二个下标形成的排列里逆序数是偶数的，出现在式子（1.3）中时带上正号，凡是第二个下标形成的排列里逆序数是奇数的，出现在（1.3）中时带上负号。**

所以，**三阶矩阵（1.2）的行列式，就是形式为（1.4）的所有可能的乘积，在带上按刚才所述的规则得到的符号后的代数和。**现在，我们推广这个结果，来给出任意阶行列式的定义。

2. 任意阶行列式的定义 在 n 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

中，任意地取 n 个既在不同的行又在不同的列的元素，把

它们乘起来，我们造出下列形式的乘积：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\ (j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_n)。\tag{1.7}$$

实际上，造出的过程可以这样地进行：在矩阵（1.6）的第一行取一个元素作为第一个因子，如果用 j_1 表示这个元素所在的列的号码，那第这个元素的下标是 1 和 j_1。同样，从第二行取一个元素作为第二个因子，它的下标是 2 和 j_2，其中 j_2 表示这个元素所在的列的号码，并且 $j_2\neq j_1$；等等。

按照条件，元素 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 在矩阵(1.6)的不同的列里，每列一个，因而它们的第二个下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 没有相同的，并且形成数码 $1,2,\cdots,n$ 的一种排列。如果这个排列的逆序数

$$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$$

是偶数，那么在乘积(1.7)的前面带上"＋"号，如果是奇数，那么在乘积的前面带上"－"号，就是说，**我们规定，在形式为(1.7)的每个乘积的前面，带上符号 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots j_n)}$。把形式为(1.7)的所有可能的乘积带上这样规定的符号后加起来，所得的式子(1.8)**

$$\sum(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

（求和是对数码 $1,2,\cdots,n$ 的所有可能的排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 进行）叫做 n 阶矩阵(1.6)的行列式，并且用下面的任意一种符号表示：

$$\triangle=\mathbf{det}\ A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}。\tag{1.9}$$

3 按第一列展开行列式 我们来证明

定理 1.1 交换一个排列中任意两个数码的位置，这个排列的逆序数改变奇偶性。

证明 1) 先看交换排列中两个相邻数码的情形。设有排列

$$j_1, j_2, \cdots, j_{k-1}, j_k, j_{k+1}, \cdots, j_n,$$

交换数码 j_k 和 j_{k+1} 的位置，我们得到排列

$$j_1, j_2, \cdots, j_{k-1}, j_{k+1}, j_k, \cdots, j_n。$$

如果数码 $j_k < j_{k+1}$，那么它们交换后，排列的逆序数增加一个；而如果 $j_k > j_{k+1}$，那么在交换后，排列的逆序数减少一个。所以，无论数码 j_k 和 j_{k+1} 中哪个较大，它们交换后，原来排列的逆序数都改变了奇偶性。

2) 再看交换排列中不相邻的数码 j_i 和 j_k 的情形。这种情形可以分成许多阶段来实现：先把 j_i 朝着指向 j_k 的方向一次次地跟相邻的数码交换，直到占据原来排列中 j_k 的位置；然后把 j_k 朝跟刚才相反的方向一次次地跟相邻的数码交换，直到占据原来排列中 j_i 的位置。在这个过程中，一共进行了奇数的

$$2|i-k|-1$$

次相邻数码的交换，每进行一次相邻数码的交换，排列的逆序数都改变一次奇偶性，所以，最后所得的排列跟原来的排列比起来，逆序数也改变了奇偶性。定理就证明了。

回到行列式的定义式（1.8），我们看到，它的一般项的 n 个因子是按第一个下标递增的顺序排列的，但是数的乘法具有交换性，我们可以把这 n 个因子改变顺序地写成

$$a_{p_1q_1} a_{p_2q_2} \cdots a_{p_nq_n}$$

这里的 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 和 $q_1, q_2, \cdots, q_n$，都是数码 $1,2,\cdots,n$ 的排

列。所进行的改写可以看成一次次地交换两个因子的结果，在每次交换中，第一个下标的排列和第二个下标的排列同时地改变了逆序数的奇偶性，因而第一个下标的排列的逆序数跟第二下标的排列的逆序数之和，就奇偶性来说是始终保持不变，所以

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2,\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(1,2,\cdots,n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}$$
$$=(-1)^{\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)+\tau(q_1,q_2,\cdots q_n)}$$

这样，我们得到了

定理 1.2　n 阶行列式的定义式 (1.8) 中的一般项，也可以写成下面的形式：

$$(-1)^{\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)+\tau(q_1,q_2,\cdots q_n)}a_{p_1q_1}\cdots a_{p_nq_n} \tag{1.9}$$

特别地，如果在公式 (1.8) 中，取 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 为按自然顺序的排列 $1,2,\cdots,n$，并且把 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 改写成 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，那么所得的结果意味着式子 (1.8) 可以改写成

$$\sum(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.10}$$

式子 (1.10) 叫做 n 阶矩阵 (1.6) 的行列式按第一列元素的完全展开式。因此，我们得到了

推论　行列式等于它的按第一列元素的完全展开式。

§2　行列式的性质

1. **基本性质**　转向建立行列式的性质之前，我们引进转置矩阵的概念。设 $A=(a_{ij})$ 是一个具有 m 行和 n 列的矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个具有 n 行和 m 列的矩阵，而且

$$a_{ij}=b_{ji}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n), \tag{1.11}$$

那么就说，这两个矩阵中的一个是另一个的**转置矩阵**。换句话说，如果矩阵 B 的第一行是矩阵 A 的第一列，B 的第二行是 A 的第二列，等等，那么 B 是 A 的转置。矩阵 A 的转置矩阵以后用 A' 表示。

自然地产生一个问题：把一个 n 阶矩阵转置，它的行列式的值会不会改变呢？关于这个问题的答案，构成了行列式的第一个性质。

性质 1（行和列的平等性）　任何行列式都跟自己的转置行列式具有相同的值。

证明　为了比较行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{和} |A'|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们把前者按第一列元素展开，后者按定义式写出，那么发现，所得的是完全相同的式子。但是，任何行列式都等于它的按第一列元素的完全展开式，所以 $|A|=|A'|$。

所证明的这个性质表明，行列式的行跟列是完全平等的。因此，对于行列式的以下各个性质，只要对行给出证明就够了。

性质 2（关于行（或列）的反对称性）　如果交换一个行列式中两行（或两列）的位置，那么这个行列式发生符号的改变。

证明　设交换 n 阶矩阵

$$A=(a_{ij})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的第 k 行和第 l 行，我们得到矩阵

$$B=(b_{ij})=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}。$$

这两个矩阵的元素之间的关系是：当 $i \neq k$ 和 l 时，$b_{ij}=a_{ij}$；而当 $i=k$ 和 $i=l$ 时，$b_{kj}=a_{lj}, b_{lj}=a_{kj}$。因此，如果

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{lj_l}\cdots a_{nj_n} \tag{1.12}$$

是组成行列式 $|A|$ 的一个乘积，那么组成行列式 $|B|$ 的对应的乘积是

$$b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{kj_l}\cdots b_{lj_k}\cdots b_{nj_n} \tag{1.13}$$

其中 $b_{kj_l} = a_{lj_l}, b_{lj_k} = a_{kj_k}$。

乘积(1.12)和(1.13)是相等的，只是在行列式中所带的符号不同。乘积（1.12）所带的符号由排列

$$j_1, j_2, \cdots, j_k, \cdots, j_l, \cdots, j_n \tag{1.14}$$

的逆序数的奇偶性决定，而乘积（1.13）所带的符号由排列

$$j_1, j_2, \cdots, j_l, \cdots, j_k, \cdots, j_n \tag{1.15}$$

的逆序数的奇偶性决定。由于排列（1.15）可以从排列（1.14）交换数码 j_k 和 j_l 的位置来得到，所以它们的逆序数的奇偶性相反。

这表明，交换一个行列式中两行的位置，组成行列式的每个乘积都改变所带的符号，从而整个行列式也改变符号。

性质3（线性性质）　在 n 阶矩阵中，如果某个第 i 行 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 的每个元素都可以表示成两项之和，并且具有

$$a_{ij} = \lambda b_{ij} + \mu c_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.16}$$

的形式，其中的 λ 和 μ 是两个数，那么这个矩阵的行列式 $\triangle$ 可以表示成

$$\triangle = \lambda \triangle_1 + \mu \triangle_2, \tag{1.17}$$

这里的 $\triangle_1$ 和 $\triangle_2$，是把行列式 $\triangle$ 的第 i 行分别用由数 $b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in}$ 组成的行和由数 $c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in}$ 组成的行代替，所得的行列式。

证明　记 $\tau = \tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$，我们有

$$\begin{aligned}
\triangle &= \sum(-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
&= \sum(-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (\lambda b_{ij_i} + \mu b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\
&= \lambda \sum(-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
&\quad + \mu \sum(-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n}。
\end{aligned}$$

这串等式的后面两个和分别是 $\triangle_1$ 和 $\triangle_2$，因而等式（1.11）成立。

当然，对于列来说，也有同样的结果。

2. **几个推论** 以上建立的行列式的三个性质，是基本的。下面几个性质是它们的逻辑推论。

推论 1 如果行列式 $\triangle$ 有两行（或两列）相同，那么它的值等于零。 事实上，在交换相同的两行时，一方面，行列式 $\triangle$ 没有改变，而从另一方面看，按照性质 2，它改变了符号。于是 $\triangle=-\triangle$，因而有 $2\triangle=0$ 或 $\triangle=0$。

推论 2 用数 λ 乘行列式的某行（或某列）的所有各个元素，相当于把行列式乘上这个数 λ。

换句话说，**行列式的某行（或某列）的所有各个元素的公因子，可以从这个行列式的符号下提出来。** 这个性质，可以从性质 3 的公式（1.17）在 $\mu=0$ 时推出。

推论 3 如果行列式的某行（或某列）的所有元素都等于零。那么行列式本身也等于零。 这个推论，可以从前一个性质在 $\lambda=0$ 时推出。

推论 4 如果行列式的两行（或两列）的各个元素成比例，那么行列式等于零。 事实上，按照推论 2，比例因子可以从行列式的符号下提出来。这以后，剩下了具有两个相同的行的行列式，按照推论 1，它等于零。

推论 5 如果给行列式的某行（或某列）的各个元素，加上另一行（另一列）的乘了任意因子 λ 的对应元素，那么行列式的值不变。 事实上，按照性质 3，这样得到的行列式可以拆成两个行列式之和，其中一个跟原来的行列式一致，而另一个，由于有两行（或两列）的元素成比例，按照推论 4，是等于零的。

§ 3 按一行或一列展开行列式

1. **代数余子式** 当 n 较大时，从公式

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.18}$$

出发，来计算 n 阶行列式的值，并不是方便的，因为它的项数等于 $n!$ ，而这个数随着 n 的增大而迅速地增加。现在来找出便于实际计算的方法。

设 i 是数码 1，2，…，n 中的任意一个。行列式 $\triangle$ 的每一项。都含有第 i 行的一个元素作为因子。利用交换两项的位置的办法，把式子（1.12）右边含有元素 a_{i1}（第 i 行的第一个元素）的所有各项移到一起而用括号括起来，再把公因子 a_{i1} 从括号下提出来而用 A_{i1} 表示留在括号内的式子。其次，把含 a_{i2} 的所有各项集聚在一起而得得到它们的和 $a_{i2}A_{i2}$，等等。结果，公式（1.12）右边的和被分成 n 个部分: $a_{i1}A_{i1}$，$a_{i2}A_{i2}$，…，$a_{in}A_{in}$。因此

$$\triangle=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}。\tag{1.19}$$

这个等式叫做**行列式 $\triangle$ 按第 i 行元素的展开式**。明显地，设 j 是数码 1，2，…，n 中的任意一个，我们可以类似地得到**行列式 $\triangle$ 按第 j 列元素的展开式**:

$$\triangle=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}。\tag{1.20}$$

展开式(1.19) 和 (1.10) 中的 A_{ij}，由于稍后将要证明的一个定理，叫做行列式 $\triangle$ 中元素 a_{ij} 的**代数余子式**。因此，把这两个展开式用文字叙述出来，就是

定理 1.3 行列式等于它的任意一行（或任意一列）的各个元素，分别乘以它们的代数余子式的乘积的代数和。

我们指出，行列式的以元素 a_{ij} 作为因子的每一项，都不可能含有行列式的第 i 行和第 j 列的任何别的元素作为因子。由此推出，在 A_{ij} 的表达式里，不出现行列式的第 i 行和第 j 列的元素。换句话说，**数 A_{ij} 完全决定于行列式的位于别的（不同于 i 的）行和别的（不同于 j 的）列的元素。**因此，如果在行列式 $\triangle$ 中，用数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 依次代替第 i 行的各个元素，而不改变其余的行，那么公式（1.20）中的因子 $A_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$ 没有改变而新的行列式的值等于

$$\triangle = b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in}。$$

特别是，如果让 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 等于另一行 k 的元素 $a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn}$，那么行列式$\triangle$ 的第 i 行跟第 k 行相同，从而有着等于零的值，就是说

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots a_{kn}A_{in}=0 \tag{1.21}$$

（对于不相等的任何 i 和 k）。把同样的方法用到列，将得到，当 $l\neq j$ 时，

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=0。\tag{1.22}$$

这样，我们得到了

定理 1.4 **行列式的任何一行（或列）的各个元素跟另一行（或列）的对应元素的代数余子式的乘积之和，是等于零的。**

2. **余子式** 研究中引进余子式的概念。如果从 n 阶行列式 $\triangle$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，那么剩下的元素自然地构成一个 $n-1$ 阶的行列式，叫做行列式 $\triangle$ 中元素 a_{ij} 的**余子式**，用 M_{ij} 表示。例如四阶行列式