大学数学同步精版辅导系列丛书（二）

线性代数

基础+题型
数学成功的保证

丛书主编：陈文灯
编　　著：黄先开

原创 实用 严谨 科学

FOCUS
聚焦图书
世界图书出版公司

精版辅导系列丛书（二）

线性代数

丛书主编：陈文灯
编　　著：黄先开

世界图书出版公司
北京 · 广州 · 上海 · 西安

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/黄先开编著 .—北京:
世界图书出版公司北京公司,2003.7
(大学同步精版辅导系列)
ISBN 7-5062-5207-4

Ⅰ.线… Ⅱ.黄… Ⅲ.线性代数—高等数学—教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 076829 号

大学数学同步精版辅导系列丛书(二)线性代数

编　　著:黄先开
责任编辑:罗杨为
装帧设计:京 A 企划

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号 邮编 100010 电话 010 - 62198079)
销　　售:各地新华书店
印　　刷:北京市云西华都印刷厂

开　　本:850×1168 毫米　1/32
印　　张:13.75
字　　数:346 千字
版　　次:2003 年 7 月第 1 版
2003 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5207-4/O·329　　　　定价:16.80 元

服务热线:010 - 62198078

使用说明

《线性代数》是专门研究有限空间的线性理论，它所涉及到的处理问题的思想、方法和技巧被广泛的应用到科技的各个领域，具有很强的现实意义．因此，这门课程被列入高等院校理工科各专业和经济管理类各专业共同的、也是最重要的的基础课程之一．这门课程本身具有概念多、符号多、运算法则多且易混淆等特点，且内容上纵横交错、前后联系紧密，环环相扣、相互渗透，抽象性思维和逻辑思维要求高．为帮助读者把《线性代数》这门课学到手，并能真正自如地运用到实践中去，笔者根据多年教学实践和专门研究成果，倾心编著了这本与教学进度同步的辅导用书．

本书根据现行教学大纲和研究生入学考试 数学考试大纲进行编写．采用目前最为独特新颖的体例设计和版式设计，借鉴了陈文灯教授“以题型为纲”的教参编写思想，归纳了这门课程中几乎所有题型，精心选编和分析了大量的经典例题，并独立设计了许多新颖例题．配合相关考试来写是本书最突显的功能．各章节具体体系如下：

一、基本内容概述　简述学习过程中所要求掌握的概念、性质、定理，对于一些基础性知识理论进行讲解，使读者在学习之初能够打下一个良好的知识基础．

二、重要定理与公式　针对每一章的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，并归纳总结这一章节中的重要公式与结论，特别对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳，从而帮助读者站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题．达到认识和理解的新境

界，对于参加课程结业考试和考研入学考试并取得好成绩来讲，是必不可少的基本功.

三、典型题型与解题指导 对于一门课程来说，题是无穷的，但题型是有限的.本书尽可能全面地归纳了这门课程所涉及的题型，并逐一进行分析.另外，借助于许多重要的的经典例题的评注，帮助读者更好地把握典型题型的典型处理方法和可能的各种延伸，从而达到举一反三、触类旁通的功效.

四、习题精选与精编 对于掌握一门课程并通过相关考试来说，做一定数量的习题是必不可少的.为此，笔者按照填空题、选择题以及计算证明题的顺序编制了相当数量的习题，供读者模拟练习之用，希望读者尽可能地独立完成大部分习题.

在成书过程中，笔者参考了众多著作和教材，由于篇幅所限未能全部列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于时间仓促和笔者水平有限，错误和不妥之处请同行与读者赐教指正.

作者

2003.7

目 录

第一章 行列式

第二章 矩阵

第三章　向量

第六章 特征值和特征向量

第一章　行列式

【基本内容】

行列式的概念和基本性质,行列式按行(列)展开定理,克莱姆法则.

【学习要求】

了解行列式的概念,掌握行列式的性质.会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.掌握克莱姆(Cramer)法则.

§1.1　基本内容提要

一、排列和逆序

1. n 级排列

由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列,通常记为 $(i_1i_2\cdots i_n)$, n 级排列的总数有 $n!$ 个.

2. 逆序与逆序数

在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,若 $i_t > i_s$,则称这一对数 i_ti_s 构成一个逆序.一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数,记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.若 τ 为奇数,则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列;若 τ 为偶数,则称此排列为偶排列.

3. 对换

在排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,交换任意两个数 i_t 和 i_s 的位置,称为一次对换.对换改变排列的奇偶性,任何一个排列都可经过若干次对换变成自然顺序,并且所做对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

注:在所有的 $n(n \geqslant 2)$ 级排列中,奇排列个数 $=$ 偶排列个数 $= \frac{n!}{2}$.

二、n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,其值是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,各项的符号由 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 决定,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时,对应项取正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时,对应项取负号,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.n 阶行列式也可记为 $D=|a_{ij}|$.

注:① n 阶行列式也可用归纳法定义,本质上等价于行列式按一行(列)展开定理.

② n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.

③ 直观地看,n 阶行列式的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为取自不同行不同列的 n 个元素的乘积.

三、行列式的性质

性质 1 行列式的行和列互换后,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 2 行列式的两行(或列)互换,行列式的值变号.

推论 如果行列式有两行(或两列)完全相同,则行列式的值等于零.

性质 3　数乘行列式等于用这个数乘该行列式中任意一行(或列),即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论　若行列式中有一行(或一列)元素全为零,则该行列式的值为零.

性质 4　行列式中若有两行(或列)元素对应成比例,则该行列式的值为零.

性质 5　如果行列式的某一行(或列)的所有元素都可表示为两项之和,则该行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的此行(或列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(或列)的元素与原行列式相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6　将行列式某行(或列)的 k 倍加到另一行(或列),其值不变.

四、行列式按行(或列)展开定理

1. 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式$D = |a_{ij}|$中划去元素 a_{ij} 所在的第i行及第j列,由余下来的元素按原来的次序所排成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}. 而称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. **行列式按一行(或列)展开定理**

n 阶行列式$D=|a_{ij}|$等于它的任意一行(或列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

或 $$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(1\leqslant j\leqslant n).$$

一般地,有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}D, i=k,\\0, i\neq k.\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases}D, j=k,\\0, j\neq k.\end{cases}$$

* 五、拉普拉斯定理

1. **子式及其代数余子式**

k 阶子式:n 阶行列式中,任取 k 行 k 列,这 k 行 k 列交点处元素按原来的顺序位置组成的 k 阶行列式M,称为原 n 阶行列式的 k 阶子式.划去子式 M 所在的行和列,由余下来的元素按原来的次序所排成的$(n-k)$阶行列式 N,称为 M 的余子式.设 M 所在行的序号为 $i_1,i_2,\cdots i_k$,M 所在列的序号为 $j_1,j_2,\cdots j_k$,则称

$$A=(-1)^{i_1+i_2+\cdots i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$$

为 M 的代数余子式.

2. **拉普拉斯展开定理**

在 n 阶行列式$D=|a_{ij}|$中,任意取定 k 行(或列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$,则这 k 行(或列)中所有的 k 阶子式(共有 $C_n^k=t$ 个,记为 $M_1,M_2,\cdots,M_t$)分别与它们对应的代数余子式乘积之和等于该行列式,即

$$D=\sum_{i=1}^{t}M_iA_i=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t.$$

六、克莱姆(Cramer)法则

$$方程组\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

称为 n 元非齐次线性方程组,当其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$ 时,此方程组有惟一解,且可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将行列式 D 中第 j 列元素换成常数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,其余元素不变而得到的行列式的值.

当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时,对应方程组称为 n 元齐次线性方程组.

注:① 克莱姆法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

② n 元非齐次线性方程组,当系数行列式 $D\neq 0$ 时有惟一解,当系数行列式 $D=0$ 时克莱姆法则失效,方程组可能有解也可能无解.

③ n 元齐次线性方程组,当系数行列式 $D\neq 0$ 时有惟一零解,当系数行列式 $D=0$ 时,齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

§1.2 重要定理、公式与结论

一、重要公式

1. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 副对角线下(上)边的元素全为 0 的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3. 两个特殊的可用拉普拉斯展开计算的行列式

① $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & C_{11} & \cdots & C_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & C_{n1} & \cdots & C_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{11} & \cdots & C_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

② $$\begin{vmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & C_{m1} & \cdots & C_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

二、重要结论

n 阶范德蒙(Vandermonde)行列式($n \geqslant 2$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \vdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \vdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \vdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

【评注】当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两互不相同时,行列式的值不为零.

§1.3 典型题型与解题指导

题型 Ⅰ 排列逆序数的计算

【解题提示】 任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数可如下计算：$\tau(i_1i_2\cdots i_n) = i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+ i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+ \cdots + i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数.

【例 1.1】 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1)53214；　(2)$n(n-1)\cdots 2\cdot 1$；

(3)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

【解】 (1)$\tau(53214) = 4+2+1+0 = 7$，为奇排列.

(2)$\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

由于$\dfrac{n(n-1)}{2}$的奇偶性需根据 n 而定，故讨论如下：

当 $n = 4k$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$ 为偶数；

当 $n = 4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$ 为偶数；

当 $n = 4k+2$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ 为奇数；

当 $n = 4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ 为奇数.

综上所述，当 $n = 4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n = 4k+2$ 或 $4k+3$ 时，此排列为奇排列，其中 k 为任意非负整数.

(3) 该排列中前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$ 之间不构成逆序，后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$ 之间也不构成逆序，只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序，

$$\begin{aligned}\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)) &= 0+1+2+\cdots+(n-1)\\ &= \frac{n(n-1)}{2},\end{aligned}$$

奇偶性情况与(2) 完全一致.

【例 1.2】 设排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为k，问 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？