

大学数学同步 精版 辅导系列丛书(二)

线性代数

基础题型

数学成功的保证

丛书主编：陈文灯

编 著：黄先开

原 创



0151.2

489

清版 辅导系列丛书(二)

线性代数

2011.10.30

丛书主编：陈文灯
编著：黄先开

W 清华大学出版社

北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/黄先开编著. —北京：
世界图书出版公司北京公司, 2003.7
(大学同步精版辅导系列)
ISBN 7-5062-5207-4

I . 线… II . 黄… III . 线性代数—高等数学—教学参考资料 IV .0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 076829 号

大学数学同步精版辅导系列丛书(二)线性代数

编 著: 黄先开

责任编辑: 罗杨为

装帧设计: 京 A 企划

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 邮编 100010 电话 010 - 62198079)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 北京市云西华都印刷厂

开 本: 850×1168 毫米 1/32

印 张: 13.75

字 数: 346 千字

版 次: 2003 年 7 月第 1 版

2003 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5207-4/O·329

定价: 16.80 元

服务热线: 010 - 62198078

使用说明

《线性代数》是专门研究有限空间的线性理论,它所涉及到的处理问题的思想、方法和技巧被广泛的应用到科技的各个领域,具有很强的现实意义.因此,这门课程被列入高等院校理工科各专业和经济管理类各专业共同的、也是最重要的基础课程之一.这门课程本身具有概念多、符号多、运算法则多且易混淆等特点,且内容上纵横交错、前后联系紧密,环环相扣、相互渗透,抽象性思维和逻辑思维要求高.为帮助读者把《线性代数》这门课学到手,并能真正自如地运用到实践中去,笔者根据多年教学实践和专门研究成果,倾心编著了这本与教学进度同步的辅导用书.

本书根据现行教学大纲和研究生入学考试 数学考试大纲进行编写.采用目前最为独特新颖的体例设计和版式设计,借鉴了陈文灯教授“以题型为纲”的教参编写思想,归纳了这门课程中几乎所有题型,精心选编和分析了大量的经典例题,并独立设计了许多新颖例题.配合相关考试来写是本书最突显的功能.各章节具体体系如下:

一、基本内容概述 简述学习过程中所要求掌握的概念、性质、定理,对于一些基础性知识理论进行讲解,使读者在学习之初能够打下一个良好的知识基础.

二、重要定理与公式 针对每一章的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释,并归纳总结这一章节中的重要公式与结论,特别对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳,从而帮助读者站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题.达到认识和理解的新境

界,对于参加课程结业考试和考研入学考试并取得好成绩来讲,是必不可少的基本功.

三、典型题型与解题指导 对于一门课程来说,题是无穷的,但题型是有限的.本书尽可能全面地归纳了这门课程所涉及的题型,并逐一进行分析.另外,借助于许多重要的经典例题的评注,帮助读者更好地把握典型题型的典型处理方法和可能的各种延伸,从而达到举一反三、触类旁通的功效.

四、习题精选与精编 对于掌握一门课程并通过相关考试来说,做一定数量的习题是必不可少的.为此,笔者按照填空题、选择题以及计算证明题的顺序编制了相当数量的习题,供读者模拟练习之用,希望读者尽可能地独立完成大部分习题.

在成书过程中,笔者参考了众多著作和教材,由于篇幅所限未能全部列出,在此谨向有关作者表示衷心感谢!

由于时间仓促和笔者水平有限,错误和不妥之处请同行与读者赐教指正.

作者

2003.7

目 录

第一章 行列式

§ 1.1 基本内容提要	(1)
§ 1.2 重要定理、公式与结论	(5)
§ 1.3 典型题型与解题指导	(7)
题型 I 排列逆序数的计算	(7)
题型 II n 阶行列式的概念	(8)
题型 III 低阶行列式的计算	(12)
题型 IV 行列式按行(列)展开定理的应用	(16)
题型 V n 阶行列式的计算	(19)
题型 VI 利用范德蒙行列式进行计算	(33)
题型 VII 克莱姆法则的应用	(36)
题型 VIII 综合杂例	(38)
习题精选一	(46)
习题精选一答案与提示	(52)

第二章 矩阵

§ 2.1 基本内容提要	(56)
§ 2.2 重要结论与公式	(65)
§ 2.3 典型题型与解题指导	(69)

题型 I	矩阵的乘法运算问题	(69)
题型 II	求方阵的行列式	(74)
题型 III	逆矩阵的计算与证明	(80)
题型 IV	涉及伴随矩阵的计算与证明	(99)
题型 V	有关初等变换与初等矩阵的命题	(104)
题型 VI	解矩阵方程	(105)
题型 VII	求矩阵的秩	(109)
题型 VIII	杂例	(114)
习题精选二		(121)
习题精选二答案与提示		(128)

第三章 向量

§ 3.1	概念及其性质	(133)
§ 3.2	重要定理与结论	(136)
§ 3.3	题型分析与解题指导	(138)
题型 I	判定向量组的线性相关性	(138)
题型 II	已知一组向量线性无关, 讨论另一组向量的线性 相关性	(143)
题型 III	把一个向量用一组向量线性表示	(155)
题型 IV	求向量组的极大线性无关组与秩	(166)
题型 V	求向量组与矩阵的秩	(170)
题型 VI	矩阵秩的(不)等式证明	(177)
题型 VII	杂例	(183)
习题精选三		(189)

习题精选三答案与提示 (194)

第四章 线性方程组

§ 4.1 概念、性质、定理 (198)

§ 4.2 典型题型与解题指导 (202)

 题型 I 有关解的判定、性质和结构的问题 (202)

 题型 II 不含参数的线性方程组求解 (206)

 题型 III 含有参数的线性方程组的求解 (211)

 题型 IV 利用方程组求解向量的线性组合 (225)

 题型 V 抽象线性方程组的求解 (228)

 题型 VI 有关基础解系的证明 (231)

 题型 VII 求方程组的公共解 (235)

 题型 VIII 综合杂例 (241)

习题精选四 (254)

习题精选四答案与提示 (262)

第五章 向量空间与线性空间

§ 5.1 向量空间的概念与性质 (267)

§ 5.2 典型题型与解题指导 (270)

 题型 I 判断一个向量集合是否构成向量空间 (270)

 题型 II 求向量空间的基(底)与维数 (271)

 题型 III 求过渡矩阵与向量的坐标 (275)

 题型 IV 有关向量空间命题的证明 (283)

 题型 V 有关正交矩阵的证明 (284)

 题型 VI 填空题、单项选择题 (286)

§ 5.3 线性空间的基本概念	(289)
§ 5.4 典型题型与解题指导	(293)
题型 I 验证一个集合是否构成线性空间	(293)
题型 II 验证子集合是否为子空间	(294)
题型 III 求线性空间的基与维数	(295)
题型 IV 求线性空间的基变换矩阵与坐标	(297)
题型 V 验证线性变换并求其在一组基下的矩阵	
	(300)
题型 VI 有关线性空间命题的证明	(301)
习题精选五	(304)
习题精选五答案与提示	(308)

第六章 特征值和特征向量

§ 6.1 概念、性质、定理	(311)
§ 6.2 重要结论与公式	(314)
§ 6.3 题型分析与解题指导	(315)
题型 I 数值矩阵特征值、特征向量的计算	(315)
题型 II 抽象矩阵求特征值	(319)
题型 III 矩阵特征值、特征向量逆问题的讨论	(324)
题型 IV 特征值与特征向量有关命题的证明	(333)
题型 V 矩阵相似与对角化	(337)
题型 VI 有关相似矩阵命题的证明	(351)
题型 VII 有关实对称矩阵的命题	(355)
题型 VIII 特征值、特征向量与相似矩阵的应用	(359)

题型IX 综合杂例	(368)
习题精选六	(376)
习题精选六答案与提示	(384)
第七章 二次型	
§ 7.1 基本概念与定理	(392)
§ 7.2 题型分析与解题指导	(395)
题型I 化二次型为标准形	(395)
题型II 求正、负惯性指数与合同矩阵	(409)
题型III 有关正定二次型(正定矩阵)命题的求证 (410)
习题精选七	(420)
习题精选七答案与提示	(424)
参考文献	(427)

第一章 行列式

【基本内容】

行列式的概念和基本性质, 行列式按行(列)展开定理, 克莱姆法则.

【学习要求】

了解行列式的概念, 掌握行列式的性质. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式. 掌握克莱姆(Cramer) 法则.

§ 1.1 基本内容提要

一、排列和逆序

1. n 级排列

由 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n 级排列, 通常记为 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$, n 级排列的总数有 $n!$ 个.

2. 逆序与逆序数

在一个 n 级排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中, 若 $i_t > i_s$, 则称这一对数 $i_t i_s$ 构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数, 记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 若 τ 为奇数, 则称 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为奇排列; 若 τ 为偶数, 则称此排列为偶排列.

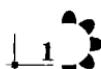
3. 对换

在排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中, 交换任意两个数 i_t 和 i_s 的位置, 称为一次对换. 对换改变排列的奇偶性, 任何一个排列都可经过若干次对换变成自然顺序, 并且所做对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

注: 在所有的 n ($n \geq 2$) 级排列中, 奇排列个数 = 偶排列个数 = $\frac{n!}{2}$.

二、 n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 组成的记号



$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式, 其值是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和, 各项的符号由 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 决定, 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时, 对应项取正号, 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时, 对应项取负号, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和, $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. n 阶行列式也可记为 $D = |a_{ij}|$.

注: ① n 阶行列式也可用归纳法定义, 本质上等价于行列式按一行(列)展开定理.

② n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.

③ 直观地看, n 阶行列式的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为取自不同行不同列的 n 个元素的乘积.

三、行列式的性质

性质 1 行列式的行和列互换后, 行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 2 行列式的两行(或列)互换, 行列式的值变号.

推论 如果行列式有两行(或两列)完全相同, 则行列式的值等于零.



第一章 行列式

性质 3 数乘行列式等于用这个数乘该行列式中任意一行(或列), 即

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

推论 若行列式中有一行(或一列)元素全为零, 则该行列式的值为零.

性质 4 行列式中若有两行(或列)元素对应成比例, 则该行列式的值为零.

性质 5 如果行列式的某一行(或列)的所有元素都可表示为两项之和, 则该行列式等于两个行列式的和, 这两个行列式的此行(或列)的元素分别为对应的两个加数之一, 其余各行(或列)的元素与原行列式相同, 即

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} - a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

性质 6 将行列式某行(或列)的 k 倍加到另一行(或列), 其值不变.

四、行列式按行(或列)展开定理

1. 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列, 由余下来的元素按原来的次序所排成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} . 而称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 行列式按一行(或列)展开定理

n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 等于它的任意一行(或列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\text{或} \quad D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (1 \leq j \leq n).$$

一般地, 有

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \begin{cases} D, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ik} = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \begin{cases} D, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

* 五、拉普拉斯定理

1. 子式及其代数余子式

k 阶子式: n 阶行列式中, 任取 k 行 k 列, 这 k 行 k 列交点处元素按原来的顺序位置组成的 k 阶行列式 M , 称为原 n 阶行列式的 k 阶子式. 划去子式 M 所在的行和列, 由余下来的元素按原来的次序所排成的 $(n - k)$ 阶行列式 N , 称为 M 的余子式. 设 M 所在行的序号为 i_1, i_2, \dots, i_k , M 所在列的序号为 j_1, j_2, \dots, j_k , 则称

$$A = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} N$$

为 M 的代数余子式.

2. 拉普拉斯展开定理

在 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中, 任意取定 k 行(或列) ($1 \leq k \leq n - 1$), 则这 k 行(或列) 中所有的 k 阶子式(共有 $C_n^k = t$ 个, 记为 M_1, M_2, \dots, M_t) 分别与它们对应的代数余子式乘积之和等于该行列式, 即

$$D = \sum_{i=1}^t M_i A_i = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_t A_t.$$

六、克莱姆(Cramer) 法则

方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$

第一章 行列式

称为 n 元非齐次线性方程组, 当其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 时, 此方程组有惟一解, 且可表示为}$$
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是将行列式 D 中第 j 列元素换成常数 b_1, b_2, \dots, b_n , 其余元素不变而得到的行列式的值.

当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时, 对应方程组称为 n 元齐次线性方程组.

注: ① 克莱姆法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

② n 元非齐次线性方程组, 当系数行列式 $D \neq 0$ 时有惟一解, 当系数行列式 $D = 0$ 时克莱姆法则失效, 方程组可能有解也可能无解.

③ n 元齐次线性方程组, 当系数行列式 $D \neq 0$ 时有惟一零解, 当系数行列式 $D = 0$ 时, 齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

§ 1.2 重要定理、公式与结论

一、重要公式

1. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 副对角线下(上)边的元素全为 0 的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

3. 两个特殊的可用拉普拉斯展开计算的行列式

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & C_{11} & \cdots & C_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & C_{n1} & \cdots & C_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{11} & \cdots & C_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \right| \\ & = \left| \begin{array}{cc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \right|. \\ \textcircled{2} & \left| \begin{array}{ccccc} C_{11} & \cdots & C_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & C_{m1} & \cdots & C_{mn} \end{array} \right| \\ & = (-1)^{mn} \left| \begin{array}{cc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array} \right|. \end{aligned}$$

二、重要结论

n 阶范德蒙(Vandermonde) 行列式 ($n \geq 2$)

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{array} \right| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j).$$

【评注】当 a_1, a_2, \dots, a_n 两两互不相同时, 行列式的值不为零.

§ 1.3 典型题型与解题指导

题型 I 排列逆序数的计算

【解题提示】任一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数可如下计算: $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 + i_2 后面比 i_2 小的数的个数 + \cdots + i_{n-1} 后面比 i_{n-1} 小的数的个数.

【例 1.1】求下列排列的逆序数, 并确定它们的奇偶性.

$$(1) 53214; \quad (2) n(n-1)\cdots 2 \cdot 1;$$

$$(3) 135\cdots(2n-1)246\cdots(2n).$$

【解】 (1) $\tau(53214) = 4 + 2 + 1 + 0 = 7$, 为奇排列.

$$(2) \tau(n(n-1)\cdots 2 \cdot 1) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

由于 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性需根据 n 而定, 故讨论如下:

当 $n = 4k$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$ 为偶数;

当 $n = 4k+1$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$ 为偶数;

当 $n = 4k+2$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ 为奇数;

当 $n = 4k+3$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ 为奇数.

综上所述, 当 $n = 4k$ 或 $4k+1$ 时, 此排列为偶排列; 当 $n = 4k+2$ 或 $4k+3$ 时, 此排列为奇排列, 其中 k 为任意非负整数.

(3) 该排列中前 n 个数 $1, 3, 5, \dots, (2n-1)$ 之间不构成逆序, 后 n 个数 $2, 4, 6, \dots, (2n)$ 之间也不构成逆序, 只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序,

$$\begin{aligned} \tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)) &= 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}, \end{aligned}$$

奇偶性情况与(2)完全一致.

【例 1.2】设排列 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ 的逆序数为 k , 问 $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 的逆序数是多少?