ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ VII

Л. Д. ЛАНДАУ
Е. М. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

朗道

理论物理学教程 第七卷

弹性理论（第五版）

Л. Д. 朗道 Е. М. 栗弗席兹 著 曹富新 译

高等教育出版社

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ VII

Л. Д. ЛАНДАУ
Е. М. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

理论物理学教程　第七卷

弹性理论

（第五版）

Л. Д. 朗道　Е. М. 栗弗席兹　著　曹富新　译

俄罗斯联邦教育部推荐大学物理专业教学参考书

高等教育出版社

图字：01-2007-0916 号

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. В 10 томах

图书在版编目(CIP)数据

理论物理学教程,第7卷.弹性理论:第5版/(俄罗斯)朗道,(俄罗斯)栗弗席兹著;曹富新译.—北京:高等教育出版社,2009.3
ISBN 978-7-04-026382-4

Ⅰ.理… Ⅱ.①朗…②栗…③曹… Ⅲ.①理论物理学-教材 ②弹性理论-教材 Ⅳ.O41 O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 003773 号

策划编辑	王 超	责任编辑	王 超	封面设计	刘晓翔
版式设计	陆瑞红	责任校对	杨凤玲	责任印制	陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	涿州市京南印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16		
印 张	14.25	版 次	2009年3月第1版
字 数	260 000	印 次	2009年3月第1次印刷
插 页	1	定 价	38.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 26382-00

第四版序言

本书第四版的基本内容(第一至三章,第五章)与其第一,二版(1944,1953年。在前两版中,曾将弹性理论与流体力学合并为《连续介质力学》出版)相比较,只有很小的变动。这是很自然的,因为弹性理论的基本方程和结论在很久以前就已经“定型”了。

在第三版(1965年)增加了关于晶体的位错理论一章(与A.M.科谢维奇共同编写),这一章现在只作了比较小的改动。

本版增加了新奉献的一章——液晶力学,与Л.П.皮塔耶夫斯基共同编写。这是连续介质力学的新分支,它本身同时带有流体和弹性介质固有的力学特征。因此,以后在本教程的编排中,无论是讲述流体力学还是固体弹性理论,都将适当地介绍连续介质力学。

照样,在本书涉及的许多问题的研究中,我从自己朋友们和同事们那里获取了很多的益处。说到这里,我由衷的感谢Г.Е.沃劳韦卡(Г.Е. Воловика),В.Л.根兹布拉伽(В.Л. Гинзбурга),В.Л.依捷包玛(В.Л. Инденбома),Е.И.卡兹(Е.И. Кац),Ю.А.考协尼洽(Ю.А. Косенича),В.В.列别捷娃(В.В. Лебедева),В.П.米尼叶娃(В.П. Миниева),他们对于本书的计算工作提出了许多有益的意见。

苏联科学院物理研究所　Е.М.栗弗席兹

1985年1月

择自《连续介质力学》的序言

……这本由物理学家写的书，首先也是针对物理学家的。自然，对我们感兴趣的是通常在弹性理论教程中不讲述的问题，例如热传导和固体黏性问题，弹性振动理论和波的许多问题。与此同时，我们只能很简单地接触一些专门的问题（例如，复杂的弹性理论的数学方法，薄壳理论等等）。更何况，在某种程度上，作者也不是这些方面专家。

Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹

1953 年

符　　号

ρ 物质密度

$\boldsymbol{u}$ 位移矢量

$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ 应变张量

σ_{ik}应力张量

K 各向均匀压缩模量(体积模量)

μ 剪切模量

E 拉伸模量(杨氏模量)

σ 泊松系数(泊松比)

c_l纵向声速(纵波波速)

c_t横向声速(横波波速)

通过 K,μ 或 E,σ 表示 c_l 和 c_t 的表达式,见§22.

K,μ 和 E,σ 之间的关系公式:

$$E=\frac{9K\mu}{3K+\mu},\quad \sigma=\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)},$$

$$K=\frac{E}{3(1-2\sigma)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

全书采用通常的矢量和张量的指标求和法则:在给定的表达式中,所有重复两次的指标("傀标")表示将该量按指标 1,2,3 求和.

在第六章中,关于坐标的微分算子利用了符号 ∂_i,$\partial_i\equiv\partial/x_i$.

在引用本《理论物理学教程》其它各卷章节和公式的号码时,给出卷号对应的书名:

第一卷:《力学》,

第二卷:《场论》,

第三卷:《量子力学(非相对论理论)》,

第四卷:《量子电动力学》,

第五卷:《统计物理学Ⅰ》,

第六卷:《流体力学》,

第八卷:《连续介质电动力学》,

第九卷:《统计物理学Ⅱ(凝聚态理论)》,

第十卷:《物理动理学》.

目　　录

第一章

弹性理论的基本方程

§1 应变张量

弹性理论的内容,就是把固体作为连续介质来考虑的力学①.

在作用力的影响下,固体将不同程度地发生**形变**②,即它将改变原来的形状和体积. 对物体形变的数学描述,将按下述方法进行. 物体任意一点的位置由该点在某一坐标系中的径矢 $\boldsymbol{r}$(分量为 $x_1=x, x_2=y, x_3=z$)来确定. 一般来说,当物体形变时,物体上所有的点都会有移动. 现在来研究其中的任一确定点,如果在形变前它的径矢为 $\boldsymbol{r}$,形变后它将为另一径矢 $\boldsymbol{r}'$(分量为 x_i'). 于是,在形变时,物体上点的位移可以表示为矢量 $\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$,记为 $\boldsymbol{u}$:

$$u_i = x_i' - x_i \tag{1.1}$$

矢量 $\boldsymbol{u}$ 称为**位移矢量**③. 自然,点在位移后的坐标 x_i' 是该点在位移前坐标 x_i 的函数. 因此,位移矢量也是坐标 x_i 的函数. 把矢量 $\boldsymbol{u}$ 作为 x_i 的函数给出后,物体的形变也就完全确定了.

当物体形变时,点与点之间的距离也会改变. 现在来考虑任意两个无限接近的点. 如果形变前两点间的径矢为 $\mathrm{d}x_i$,则物体形变后该两点间的径矢将变为 $\mathrm{d}x_i' = \mathrm{d}x_i + \mathrm{d}u_i$. 两点之间的距离在形变前为

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2},$$

形变后为

$$\mathrm{d}l' = \sqrt{\mathrm{d}x_1'^2 + \mathrm{d}x_2'^2 + \mathrm{d}x_3'^2}.$$

根据求和记法的一般法则,有

---

① 弹性理论的基本方程是柯西(A. L. Cauchy)和泊松(S. D. Poisson)在 19 世纪 20 年代建立的.

② 形变亦称为变形. 拉伸(压缩)、弯曲、扭转、剪切等是形变的基本形式 ——译者注

③ 俄文版原文为变形矢量或位移矢量,本书按我国的习惯均译为后者. ——译者注

$$dl^2 = dx_i^2,\ dl'^2 = dx'^2_i = (dx_i + du_i)^2,$$

由于 $du_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_k$,$dl'^2$ 就可以重新写为

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}dx_k dx_l.$$

因为等式右边第二项的指标 i 和 k 都是傀标,可以把它们重新排列并写为明显的对称形式:

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)dx_i dx_k,$$

而在第三项中,交换指标 i 和 l 的位置,最后得到

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik}dx_i dx_k, \tag{1.2}$$

式中

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \tag{1.3}$$

这些表达式确定了物体形变时线元(长度单元)的改变. 张量 u_{ik} 称为**应变张量**,按照定义,它是对称张量,即

$$u_{ik} = u_{ki}. \tag{1.4}$$

像所有对称张量一样,可以把每一个给定点的应变张量 u_{ik} 变换到主轴上. 也就是说,在任意给定点都可以选择张量的主轴坐标系. 在这个坐标系中,张量 u_{ik} 的所有分量,只有对角分量 u_{11}, u_{22}, u_{33} 不为零. 这些分量称为应变张量的主值,分别用 $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ 表示. 当然,必须记住,假使在物体某点上张量 u_{ik} 变换到主轴上,但是,一般来说,在物体的所有其它点上却是非对角化张量.

如果把给定点的应变张量变换到主轴上,那么在包围该点的体元内,线元(1.2)具有如下形式:

$$dl'^2 = (\delta_{ik} + 2u_{ik})dx_i dx_k = (1 + 2u^{(1)})dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)})dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)})dx_3^2.$$

我们看到,这个表达式已被分解为三个独立的项. 这就是说,在物体的任一体元内,都可以把形变看作是按三个相互垂直方向——应变张量主轴方向上的三个独立形变的组合. 每一个这样的形变都是沿着相应方向的简单拉伸(或压缩):沿第一主轴方向,dx_1 的长度变为

$$dx'_1 = \sqrt{1 + 2u^{(1)}}\,dx_1,$$

对于另外两个主轴方向,也可类似地求出. 因此,值

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$$

就是沿着这些主轴方向的相对伸长 $(dx'_i - dx_i)/dx_i$.

实际上,几乎在物体所有的形变中,应变都是很小的. 这就是说,在物体内任何一段距离的改变量,与其距离本身相比,都是很小的. 换句话说,相对伸长

远远小于 1. 以后，我们将认为所有的应变都是小量.

由此可见，如果物体处于小形变，则在物体内部，用来确定长度相对变化的应变张量的所有分量都是小量. 至于说到位移矢量，在某些情况下，即使应变分量很小，它也可能是比较大的. 例如，一个细长的杆，甚至在受到很大的弯曲时，它的两端在空间已经发生了明显的变位，而杆件内部的拉伸和压缩却是不大的.

除了这样的特殊情形外①，在小形变时，位移矢量同样也是小的. 实际上，任何"三维"的物体(即，在任何方向上的尺寸都不是特别小的物体)显然不可能发生这样的形变——物体的个别部分在空间发生很大的变位，而在物体内部却不产生强烈的拉伸或压缩.

关于细长杆的问题我们将在第二章单独研究. 就是说，在其它情形下，形变小时，其位移分量 u_i 连同它们关于坐标的导数也都是小的. 因此，在一般表达式(1.3)中，可以把最后一项作为二阶小量而略去. 这样一来，在小形变情形下，应变张量可以由如下表达式确定：

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{1.5}$$

现在，线元沿应变张量(在给定点)主轴方向的相对伸长(精确到高阶量)等于

$$\sqrt{1+2u^{(i)}}-1\approx u^{(i)},$$

亦即，直接等于张量 u_{ik} 的主值.

现在来考虑任一无限小的体元 $\mathrm{d}V$，并确定物体形变后体积的大小 $\mathrm{d}V'$. 为此，在所研究的点，选取应变张量的主轴作为坐标轴. 这样，沿着这些轴的线元 $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$，在形变后变为 $\mathrm{d}x_1'=(1+u^{(1)})\mathrm{d}x_1$，等等. 体积 $\mathrm{d}V$ 等于积 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$，而体积 $\mathrm{d}V'$ 等于积 $\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'$. 于是有

$$\mathrm{d}V'=\mathrm{d}V(1+u^{(1)})(1+u^{(2)})(1+u^{(3)}).$$

由此，略去高阶小量，得

$$\mathrm{d}V'=\mathrm{d}V(1+u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}).$$

众所周知，张量主值之和 $u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}$ 是不变量，并等于在任何坐标系中的对角线分量之和：$u_{ii}=u_{11}+u_{22}+u_{33}$.

这样一来，即有

$$\mathrm{d}V'=\mathrm{d}V(1+u_{ii}). \tag{1.6}$$

由此可见，应变张量对角分量之和就是体积的相对变化：$(\mathrm{d}V'-\mathrm{d}V)/\mathrm{d}V$.

有时，应变张量的分量比较方便的不是利用笛卡儿坐标，而是利用球坐标或柱坐标. 在这里，为了便于查阅，我们相应的引入用位移矢量的分量在球坐标和

① 除了细长杆的形变外，属于这种情形的还有薄板的柱面弯曲. 同样应该例外的还有当"三维"物体除了形变外，整体还围绕某个轴旋转有限角度的情形.

柱坐标中的导数表示它们的公式.

在球坐标 r,θ,φ 中：

$$\begin{aligned}
&u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ u_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\\
&u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\cot\theta+\frac{u_r}{r},\\
&2u_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\cot\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi},\\
&2u_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta},\\
&2u_{\varphi r}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}.
\end{aligned}\tag{1.7}$$

在柱坐标 r,φ,z 中：

$$\begin{aligned}
&u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r},\quad u_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&2u_{\varphi z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z},\ 2u_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r},\\
&2u_{r\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}.
\end{aligned}\tag{1.8}$$

§2 应力张量

在未形变的物体中，分子的分布适合于物体的热平衡状态. 这时，物体所有各部分彼此之间也都处于力学平衡. 这就意味着，如果在物体内部任意分离出一部分体积，那么从物体其余部分作用于该体积上的所有的力之合力等于零.

在物体形变时，分子的分布发生了变化，使物体离开了原来所处的平衡状态，从而产生了力图使物体恢复平衡状态的力. 这种在形变时出现的内力称为**应力**. 如果物体没有形变，那么在物体内部就没有应力.

应力是由物体分子之间彼此相互作用的分子力引起的. 对弹性理论而言，最为重要的事实，就是分子力具有极小的作用半径. 在产生分子力的质点周围，该分子力的影响只能扩展到与分子间距同样数量级的距离上. 而作为宏观的弹性理论，它只考虑远大于分子间距的距离. 因此，在弹性理论中可以认为分子力的“作用半径”等于零. 也可以说，在弹性理论中，引起应力的力只能是从某点传递给相邻点的“近程作用力”，由此可以得出：物体内任何一部分，从包围它的那部分物体方面给它的作用力，只能直接通过物体该部分的表面来显现①.

---

① 超过接触表面的分子间的相互作用力，即所谓“远程作用力”，根据柯西应力原理可以忽略. 这使计算大为简化，并为实验所证实. ——译者注

这里必须作如下的说明：如果在物体形变时伴随有宏大的电场出现，则前面的论断就不正确了. 这样的(所谓热电性或压电性)物体，详见第八卷.

我们在物体中切取任意一部分体积，并且研究作用在它上面的合力. 一方面，这个合力可以表示为体积分形式：

$$\int \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V,$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 是作用在物体单位体积上的力. 另一方面，在所研究体积内不同部分间相互作用的力不可能产生不为零的合力，因为根据牛顿第三定律(作用力与反作用力相等)，这些力在求和时彼此相互抵消. 因此可以认为，所求的作用在给定体积上的合力，仅仅是从围绕该体积的那部分物体对其作用力的总和. 但是，按照前面的说明，作用在所研究体积上的这些力是通过该体积的表面而作用的，因此，其合力可以表示为在该体积表面每个单元上作用力的总和，即表示为沿该体积表面的某个积分.

这样一来，对于物体任一部分体积，所有应力之合力 $\int F_i\,\mathrm{d}V$ 的每一个分量都可以化为沿该体积表面的积分. 由矢量分析可知，如果一个标量是某个矢量的散度，那么这个标量在任意体积上的体积分就可以化为沿着那个体积表面的面积分. 在这里的情形，所涉及的不是标量积分，而是矢量积分. 因此，矢量 F_i 必定是某个二阶张量的散度，即有①

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{2.1}$$

于是，作用在某体积上的力，可以写为沿包围该体积的闭合曲面上的一个积分②：

$$\int F_i\,\mathrm{d}V = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\mathrm{d}V = \oint \sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k. \tag{2.2}$$

张量 σ_{ik} 称为**应力张量**. 由式(2.2)可见，$\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$ 是作用于面元(面积单元)$\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 上的力在第 i 个坐标轴方向的分量. 若在平面 xy, yz, zx 上选取面元，就会发现，应力张量之分量 σ_{ik} 是作用在垂直于 x_k 轴的单位面积上的力在第 i 个坐标轴方向的分量. 于是，在垂直于 x 轴的单位面积上，沿 x 轴方向作用的法线方向的力为 σ_{xx}(称为**法向应力**或**正应力**)，沿 y 轴和 z 轴方向作用的切线方向的力分别

---

① 严格说来，在确定作用于形变后物体体积上的合力进行积分时，不应该用原来的坐标 x_i，而应该用物体形变后的坐标 x_i'. 因此，式(2.1)也应该对 x_i' 取导数. 但是，由于小形变时，对 x_i 取导数与对 x_i' 取导数彼此之间的差别是高阶小量，所以，所有的求导全都是对坐标 x_i 进行的.

② 面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 的方向沿着所包围体积表面的外法线方向. 借助于用算子 $\mathrm{d}V\cdot\partial/\partial x_i$ 代换 $\mathrm{d}f_i$ 的方法可将按闭合曲面的积分化为体积分.

为 σ_{yx} 和 σ_{zx}（这两个力称为**切向应力或剪应力**）.

在这里，关于力 $\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$ 的符号问题必须作如下的说明：在式(2.2)中，沿曲面的积分所表示的是从物体其余部分作用在被该曲面包围的体积上的力；相反，从该体积作用于包围它的表面上的力则具有相反的符号. 因此，例如，从内部应力那方面作用于物体整个表面上的力为

$$-\oint \sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k\ ,$$

式中的积分是遍及物体表面的，而 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 指向外法线方向.

现在让我们来确定作用在物体某体积上的力矩. 众所周知，力 $\boldsymbol{F}$ 之矩，可以写为二阶反称张量形式，它的分量为 $F_i x_k - F_k x_i$，其中 x_i 是力作用点的坐标①. 因此，作用在体元 $\mathrm{d}V$ 上的力矩为 $(F_i x_k - F_k x_i)\mathrm{d}V$，而作用在整个体积上的力矩为

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\,\mathrm{d}V.$$

像作用在任一体积上的合力一样，该合力矩也可以表示为沿体积表面的积分. 将表达式(2.1)中的 F_i 代入上式，得

$$M_{ik} = \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l}x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}x_i\right)\mathrm{d}V = \int \frac{\partial(\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)}{\partial x_l}\mathrm{d}V - \int \left(\sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl}\frac{\partial x_i}{\partial x_l}\right)\mathrm{d}V$$

我们注意到，在上式第二项中的导数 $\partial x_k/\partial x_l$ 构成一个单位张量 δ_{kl}，而在第一项里位于积分号后面的部分是某个张量的散度. 将该体积分化为面积分，最后得到：

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)\,\mathrm{d}f_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik})\,\mathrm{d}V. \tag{2.3}$$

如果应力张量是对称的，即

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \tag{2.4}$$

则式(2.3)中的体积分就消失了（对于式(2.4)这个重要结果的论证，我们将在本节的最后再来研究）. 于是，张量 M_{ik} 将只表示为按表面进行积分的形式. 这时，作用在物体某部分体积上的力矩可以简单的表示为：

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\,\mathrm{d}V = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)\,\mathrm{d}f_l. \tag{2.5}$$

在物体受各向均匀压缩的情形下，很容易写出应力张量. 在这样压缩时，作用于物体表面每单位面积上压力的大小都是相同的，其方向处处与表面垂直并指向物体内部. 如果用字母 p 表示这个压力，则作用在面元 $\mathrm{d}f_i$ 上的力为 $-p\,\mathrm{d}f_i$. 另

---

① 力 $\boldsymbol{F}$ 之矩定义为矢量积 $\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}$，两个矢量的矢量积是一个二阶反称张量，在本书中将该张量写为分量形式.

一方面,该力又可以通过应力张量表示为 $\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$. 把 $-p\mathrm{d}f_i$写为 $-p\delta_{ik}\mathrm{d}f_k$形式后,我们看到,当物体受到各向均匀压缩时,应力张量具有如下形式:

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}, \tag{2.6}$$

该张量所有不为零的分量,都等于这个简单的压力.

在任意形变的一般情况下,应力张量的非对角分量也不为零. 这就意味着,在物体内部每一个面元上作用的力,不仅有法向应力,还有切向应力. 切向应力力图使彼此相邻的面元作平行移动.

当平衡时,在物体的每个体元内部的应力必然相互抵消,即 $F_i=0$. 这样一来,形变物体的**平衡方程**将有如下形式:

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{2.7}$$

如果物体处在重力场中,则作用在物体每单位体积上的力(由内部应力形成的力)与重力 $\rho\boldsymbol{g}$ 之和,即 $\boldsymbol{F}+\rho\boldsymbol{g}$ 应等于零①,其中 ρ 是密度②,$\boldsymbol{g}$ 是物体自由下落时的加速度矢量,其方向竖直向下. 在这种情形下,平衡方程具有如下形式:

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+\rho g_i=0. \tag{2.8}$$

至于直接作用于物体表面上的外力(通常是引发形变的根源)将进入到平衡方程的边界条件中去. 设 $\boldsymbol{P}$ 为作用于物体表面单位面积上的外力,则作用于面元 $\mathrm{d}f$ 上的外力为 $\boldsymbol{P}\mathrm{d}f$. 在平衡时,它应与从物体内部的应力方面作用在同一个面元上的力 $-\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$相抵消. 这样一来,必有

$$P_i\mathrm{d}f-\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k=0.$$

把 $\mathrm{d}f_k$写为 $\mathrm{d}f_k=n_k\mathrm{d}f$ 的形式,其中 $\boldsymbol{n}$ 是表面外法线方向上的单位矢量,由此得到:

$$\sigma_{ik}n_k=P_i. \tag{2.9}$$

该式即是处于平衡的物体在全部表面上必须满足的条件(通常称为**边界条件**).

现在,我们再来推导形变物体中表示应力张量平均值的公式. 为此,用 x_k 乘方程(2.7),并按物体全部体积进行积分:

$$\int\frac{\partial\sigma_{il}}{\partial x_l}x_k\mathrm{d}V=\int\frac{\partial(\sigma_{il}x_k)}{\partial x_l}\mathrm{d}V-\int\sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l}\mathrm{d}V=0.$$

将上式右边第一个体积分化为遍及物体表面的面积分,在第二个积分里,注意到

① 注意,这里,式(2.7)以及后面一些地方,如式(40.6),(44.9),(45.1)等处,都提到单位体积上的力. 要区分两种情形,一种是由单位体积内的应力形成的力,一种是作为外力(如重力)作用在单位体积上的力,这后者就是弹性理论通常说的体积力(简称体力).

——译者注

② 严格说来,当物体形变时它的密度是会改变的. 不过,在小形变情形下考虑这个改变,得到的是高阶小量. 因此,对我们来说是不重要的.

$\partial x_k/\partial x_l=\delta_{kl}$，由此可得：

$$\oint \sigma_{il}x_k\,\mathrm{d}f_l-\int \sigma_{ik}\,\mathrm{d}V=0.$$

将式(2.9)代入第一个积分中，得

$$\oint P_i x_k\,\mathrm{d}f=\int \sigma_{ik}\,\mathrm{d}V=V\overline{\sigma}_{ik}.$$

式中 V 是物体体积，$\overline{\sigma}_{ik}$ 是应力张量按全部体积的平均值. 利用关系式 $\sigma_{ik}=\sigma_{ki}$，可以将上式写为对称形式：

$$\overline{\sigma}_{ik}=\frac{1}{2V}\oint (P_i x_k+P_k x_i)\,\mathrm{d}f. \tag{2.10}$$

这样一来，应力张量的平均值就可以直接由作用于物体上的外力来确定，而无需先求解平衡方程.

现在我们返回到前面已经引用过的应力张量对称性的证明，因为它需要精确的表述. 如果张量 σ_{ik} 的反称部分（即式(2.3)中体积分内的被积函数表达式）不仅等于零，而且，它还是一个全散度，亦即，如果

$$\sigma_{ik}-\sigma_{ki}=2\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_{ikl},\quad \varphi_{ikl}=-\varphi_{kil} \tag{2.11}$$

（式中 φ_{ikl} 是第一对指标为反称的任意张量），则提供的物理条件（把张量 M_{ik} 表示为只是个沿表面的积分）将被满足. 在这种情形下，最后这个张量可以通过导数 $\partial u_i/\partial x_k$ 表示，而在相应的应力张量中出现了位移矢量的高阶导数项. 在本书弹性理论的叙述范围内，所有这样的项都应视为高阶小量并弃之.

但是，本质上，从原则的观点来说，即使这些项不被忽略①，应力张量也可以导入对称形式. 事实上，按照式(2.1)确定的这个应力张量不是唯一的，即容许任何如下形式的变换：

$$\tilde{\sigma}_{ik}-\sigma_{ik}=\frac{\partial}{\partial x_l}\chi_{ikl},\quad \chi_{ikl}=-\chi_{ilk}. \tag{2.12}$$

式中 χ_{ikl} 是任意关于最后一对指标反称的张量. 很明显，导数 $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ 和 $\partial\tilde{\sigma}_{ik}/\partial x_k$ 都由力 $\boldsymbol{F}$ 确定，是恒等的. 如果张量 σ_{ik} 的反称部分具有式(2.11)的形式，则非对称张量 σ_{ik} 可以用这样的变换导出对称形式. 对称张量的形式为

$$\tilde{\sigma}_{ik}=\frac{1}{2}(\sigma_{ik}+\sigma_{ki})+\frac{\partial}{\partial x_l}(\varphi_{ilk}+\varphi_{kli}). \tag{2.13}$$

实际上，根据张量关系式

$$\chi_{ikl}=\chi_{kli}+\chi_{ilk}-\chi_{ikl} \tag{2.14}$$

很容易确信差 $\tilde{\sigma}_{ik}-\sigma_{ik}$ 具有式(2.12)的形式（P. C. Martin, O. Parodi, P. S. Pers-

---

① 按照微观理论的一般论述，可比较第二卷 § 32.