高等学校西方经济学课程系列教材

高级微观经济学

袁志刚　总主编
张军　王世磊　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校西方经济学课程系列教材

高级微观经济学

袁志刚　总主编

张军　王世磊　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是高等学校西方经济学课程系列教材。就难度而言，本书是一本中级水平的微观经济学教科书。

本书从最优化的数理结构入手，把微观经济学的主要内容置于一个简单的最优化框架中，用数理分析和简洁的文字阐述了微观经济学理论。全书共分 10 章。第 1 章为最优化，第 2 章为比较静态分析，第 3 章为偏好和显示偏好，第 4 章为消费者选择理论，第 5 章为跨期选择理论，第 6 章为不确定下的选择理论，第 7 章为生产与完全竞争市场理论，第 8 章为博弈论，第 9 章为市场力量，第 10 章为信息与激励。每章的最后均设计练习题。

本书是编著者在多年教学经验的基础上写就的，同时也吸纳了国内外多种微观经济学教材的优点，并考虑到现阶段我国高校经济学教学大纲的内容及特点，因而适合作为我国普通高等学校研究生阶段的微观经济学课程教材。

图书在版编目（CIP）数据

高级微观经济学/张军，王世磊编著. —北京：高等教育出版社，2009.3

（高等学校西方经济学课程系列教材/袁志刚总主编）

ISBN 978-7-04-025457-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②王… Ⅲ.微观经济学-高等学校-教材 Ⅳ.F016

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 004688 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京佳信达欣艺术印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	2002 年 12 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2009 年 3 月第 3 版
印　　张	15.25	**印　　次**	2009 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	270 000	**定　　价**	25.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　25457-00

总序

复旦大学经济学家们编写的普通高等学校经济学系列教材的出版，是近期我国大学经济学教育的一件可喜可贺的事情。

从20世纪70年代末期市场导向的改革开始之日起，结束以苏联《政治经济学》教科书及其衍生品作为经济学基本教材的状况，用经济科学的成果培育年青一代，就成为我国高等学校经济学科教材建设的一项迫切要求。

在20世纪70年代末和80年代初，我国高校采取了两个办法来满足这种迫切的需求：一是由教育部组织编写了"北方本"和"南方本"的《政治经济学》教科书；二是翻译了当时在西方国家流行的教科书，例如雷诺兹(Lloyd G. Reynolds)的《宏观经济学》和《微观经济学》，特别是萨缪尔森(Paul A. Samuelson)的《经济学》(1976年，第10版)。这些都为满足干部群众急迫的经济学补课要求起到了一定的作用。不过，前一类教科书只在苏联教科书的框架下添加了一些中国报刊和党政文件的话语，而且也很难摆脱苏联经济学那种官式的叙事风格。后一类教科书由于编写出版的时间正好在20世纪70年代后经济学对所谓"新古典综合"或"后凯恩斯主流经济学"突破的前夕，以世界标准而论，多少显得有些陈旧。

到了20世纪90年代中后期，我国出版界引入了更多在西方普通高等教育流行的教材。这些教材吸收了经济科学突破取得的新成果，对于经济现象的理论分析更加深刻，也更准确地反映了现代市场经济的实际。以初级的经济学原理课程而论，斯蒂格利茨(Joseph E. Stiglitz)的《经济学》和曼昆(N. Gregory Mankiw)的《经济学原理》都属一时之选。不过，这些教材通常用西方的事例来阐释经济学的原理，对于中国学生往往有某些理解上的困难。据说，也有西方重要经济学家曾经设想将自己的教科书改写为供中国学生用的版本，但最后也因对中国情况掌握不透而作罢。

一些中国学者在编写中国版的经济学教科书上作了辛勤的努力。例如，北京大学卢锋教授的《经济学原理(中国版)》，"用本土故事演绎经济学故

事”，就是中国大学生学习经济学原理时的一本有用参考书。但是，对于我们这样一个高等学校在校学生数占世界第一位、近年来成为世界经济增长主要动力之一的国家来说，只有几套本土版的经济学教科书实在是太少了；也完全不足以形成百花齐放、百舸争流的局面，使教员和学生可以博采众家之长来丰富自己对经济学原理和经济分析工具的认知。

现在，我国经济学科教学重镇之一的复旦大学也作出了自己的贡献。复旦的经济学教授们在自己的教学和研究工作中，既掌握对中国学生讲授经济科学所必须注意的问题，也对中国经济的实际情况有深入的了解。他们最近推出的这一套供普通高等教育经济、工商管理和公共管理学科以及政府、企业、新闻等工作者使用的教材，不但用言简意赅的方式阐明了经济学的基本原理，而且用“专栏”等多种形式介绍了我国乃至世界经济发展的最新材料，以帮助读者理解这些原理和在分析中国经济时运用这些经济学工具。它们是我国经济学教材百花园中的一簇新葩，无疑将在我国经济科学的普及和提高中起到积极的作用。

吴敬琏

2007 年 9 月 24 日

前言

对于每一本书的作者和读者而言，当他们着手写作或者准备阅读这本书的时候，一个很自然的问题是，这本书存在的理由是什么？所以，在这个前言里，我们首先提到这个问题。本书是编著者在多年教学经验的基础上写就的，同时也吸纳了国内外多种微观经济学教材的优点，并考虑到中国高校经济学教学大纲的内容及特点，用数理分析和简洁的文字阐述了微观经济学理论，因而比较适合中国高校师生使用。我们有理由相信这本书能够较大地区别于已有的微观经济学教材，即差异化构成其存在的必要性。

本书是我主编的高级微观经济学教材的延续与发展，之前的两个版本分别在2002年由复旦大学出版社和2005年由清华大学出版社出版发行。我们对其中存在的错误和疏漏进行了较为细致的改正，除了第1章最优化的数理结构的内容基本保持不变之外，其他章节都有了不少的修订。现在的第2章为比较静态分析；第3章为偏好和显示偏好；第4章是消费者选择理论；第5章的内容涉及跨期选择理论；第6章介绍不确定下的选择理论；第7章是生产与完全竞争市场理论；第8章是博弈论；第9章取名“市场力量”，主要讲述非竞争市场条件下的生产决策；第10章是关于信息与激励理论的介绍。

在以上内容中，第3章、第5章和第6章是由王世磊增补的。最初，我们期望能够加入更多的理论章节，并且对原有的一些章节做一些更加理论化的润色或重写。比如，对博弈论章节的进一步改进，甚至考虑过增加一些博弈论的自然延伸和应用部分的内容，如社会选择理论、机制设计和合同理论以及发展较为完备的一般均衡理论等。但由于各种约束条件的存在，特别是本书主要是为硕士研究生和一些学校经济学专业的高年级本科生（如数理班或者强化班等）使用的，我们决定暂时不增加这些内容，而是准备在以后的修订中再来增补它们。

另外，我们需要对微观经济学的学习和研究作一些说明：我们希望读者能够认识到，对于方法论的认知要比微观经济理论的学习和研究本身更为重要。

谈到微观经济理论，我们就不能不提及数学在其中的作用，我们认为这种作用是双重的，并且需要采取一种略微中庸的态度来看待它。也就是说，数学在这里是一种工具，一种提供解释力的工具；同时又是一种技术，一种构建理论根基的技术。在这一点上，经济学对于理性的坚持与数学对于逻辑的依赖取得了某种对应。在本书中，数学在微观经济理论中的技术功能被我们淡化了，有时甚至可以说是故意忽略了。在关于理性选择理论的那三章内容中，我们对于某些重要的原理给出了必要的数学证明，紧接着就会给出相应的应用，以使其显得不那么抽象。因为经济学是需要某种除了逻辑之外的鲜活养分的，这一点，我们希望读者能够了然于胸，从而在阅读和学习本书的时候，不被那些技术的细节所拘泥，因为很多时候，我们的论证是通过各种形式的经济学直观来推进的。这和读者阅读文学作品的体验是一致的，我们的感受并不是来源于读懂了作品中的每一个文字。

本书是在前两版的基础上根据教学经验进行修改的。在之前的版本中，冯曲、罗长远、陈钊、施少华、潘瑞娇等作出了贡献，在此对他们表示感激。当然本书中的不足及存在的问题依然由我负责。

本书的编著过程中得到了上海市重点学科建设项目“西方经济学”的资助（项目编号：B101），对此我们表示感谢。此外，还要感谢高等教育出版社的大力支持以及有关编辑为本书出版所付出的辛劳。

张军

2008年12月24日于上海

目录

1 最 优 化

1.1 最优规划问题

经济学家所面临的是一系列的选择问题。而这些问题常常需要他们进行一些确定的计算与求解。它们可以归结为这样一些规划问题：如何在给定的约束下做出某种意义上的最优决策。一般的，可以来考察如下的规划问题：

$$\max_{x} f(x)$$
$$\text{s.t. } g(x)=c$$

这样一个规划问题可以用来表达在给定资源约束情况下的经济决策问题，其中$f(x)$称为目标函数，x为选择变量，$g(x)$为约束函数。如果用集合$S=\{x \mid g(x)=c\}$表示约束，则此规划问题可以看作是在集合S（可以看作是欧氏空间的一个子集，称为可行集）上选择一个点x（或向量），使得目标函数$f(x)$的值最大。如图 1.1 所示，在二维情形下，S表示可行集，$f(x)=k$表示目标函数的等值线，则上述规划问题就变成了在S中找一点，使得目标函数的等值线达到一个最高的位置。

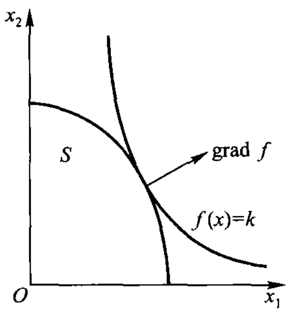

图 1.1 最优规划问题

从这样的角度看规划问题，我们可以将研究的重点放在目标函数的性质和可行集的性质两个部分。

1.2 梯度向量及其衍生概念

梯度 grad f 的概念一般和目标函数的等值线（面）的变化有关（见图 1.1）。我们分以下两种情况从梯度的角度来看最优化问题，即从是否存在约束的角度来对其进行区分。首先来看不存在约束的优化问题，梯度是如何帮助我们几何化地理解这类最优规划问题的。

1.2.1 无约束极值问题

1.2.1.1 一维情况

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

此时，目标函数值的变化是两部分的乘积：第一部分是导数，第二部分是 x 的微分，或者说是 x 的变化，可以取正也可以取负。

若 $f'(x)>0$，则可以取 $\mathrm{d}x>0$，使得 $\mathrm{d}f(x)>0$，即通过点 x 的移动，可以使目标函数值增加；若 $f'(x)<0$，则可以取 $\mathrm{d}x<0$，从而 $\mathrm{d}f(x)>0$，目标函数值还可以继续增加。因此，当 $f(x)$ 取得极值，即目标函数值不再增加时，上述情形不可能发生，即有 $f'(x)=0$。

所以，一维无约束极值问题中，目标函数的梯度就是导数，表示目标函数值变化（增加）的方向。

1.2.1.2 多维情形

$$\mathrm{d}f(x)=f_x\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

此时，f_x 为 $f(x)$ 在点 x 处的梯度向量，为横向量 $(f_1,\ \cdots,\ f_n)$，其中每一个分量为偏导数；$\mathrm{d}x$ 为纵向量，表示 x 的变化。目标函数 $f(x)$ 的变化可以用梯度向量和 $\mathrm{d}x$ 的内积来衡量：

$$\mathrm{d}f(x)=f_x\mathrm{d}x=(f_1,\cdots,f_n)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}=f_1\mathrm{d}x_1+\cdots+f_n\mathrm{d}x_n$$

1.2.1.3 向量的内积

x，y 是两个向量，其内积定义为：

$$xy=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

上式也可以表示成：$xy=|x||y|\cos\alpha$，或 $\cos\alpha=\dfrac{xy}{|x||y|}$，其中 α 表示向量 x，y 之间的夹角，$|x|$，$|y|$分别表示向量 x，y 的模（原点到点 x，y 的距离）。

如果 $0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，则 $xy>0$；

如果 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，则 $xy=0$，即向量 x，y 正交（垂直）；

如果 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$，则 $xy<0$。

1.2.1.4 梯度向量 f_x 和 dx 的几何含义

dx 代表欧氏空间中一点 x 微小变化的向量，方向可以是前后左右上下，取决于每一个分量变化的大小。具体地，如图 1.2 所示，以二维为例，$dx=(dx_1, dx_2)$ 的分量分别表示从点 x 出发横轴和纵轴变化的方向，向量 dx 则表示从点 x 变化的整体方向，满足平行四边形法则。

与无约束问题相比，存在约束时，可以选择的点（可行集）不再是整个欧氏空间，而是由具体的约束条件构成的欧式空间的一个子集。因此，此时从点 x 移动的方向不再是任意的，而只能在这个可行集内移动。可以想象一下：在一个没有围墙的校园内，可以向任意方向行走；如果有了围墙，则在围墙的附近就不能朝任意方向了，最多只能沿着围墙走。如在消费者选择的问题（两种商品的情形）上，其约束满足：

$$p_1x_1+p_2x_2=I,\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

预算线如同围墙一般，在其附近就只能沿其方向移动。

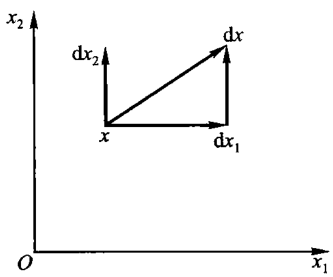

图 1.2 dx 的几何含义

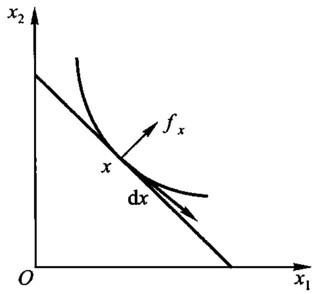

图 1.3 梯度向量 f_x 的几何含义

从代数上看，也可以得到直观的理解，对上式两边全微分，并且令 p_1，p_2，I 保持不变，得：

$$p_1dx_1+p_2dx_2=0 \tag{1.3}$$

与无约束情形相比，dx_1，dx_2 的大小不是任意的，而是相互联系的，即确定了 dx_1，则 dx_2 也就相应确定了（一般的，相互联系的机制由约束条件决定）。在这个例子中，dx_2 和 dx_1 的比例就等于预算线的斜率，作为平行四边形对角线的 dx 的方向也就确定了，就是沿着预算线移动。

梯度向量 f_x 的几何意义是：等值面 $f(x)=k$ 在点 x 处指向函数值增加（变化）的法方向，也就是在点 x 处 $f(x)$ 值增加最快的方向，其变化率为 f_x 的模。如图 1.3 所示，在无差异曲线（二维情形下，等值面就是无差异曲线）上的点 x 处作切线（多维情形下就是切平面），f_x 就是和切线垂直的、无差异曲线增加的向量。

由上述的讨论，对于 $\mathrm{d}f(x)=f_x\mathrm{d}x$，如果梯度向量 f_x 和 $\mathrm{d}x$ 的方向是一致的（夹角小于$\frac{\pi}{2}$），则 $\mathrm{d}f(x)>0$，即从点 x 移动，可以使 $f(x)$ 的值增加；如果梯度向量 f_x 和 $\mathrm{d}x$ 的方向不一致（夹角大于$\frac{\pi}{2}$），则 $\mathrm{d}f(x)<0$，即从点 x 移动，可以使 $f(x)$ 的值减少；当且仅当梯度向量 f_x 和 $\mathrm{d}x$ 正交或其中有一个向量为零向量时（当其中有一个向量为零向量时，也可以将这两个向量看作是垂直的），$\mathrm{d}f(x)=0$，即随点 x 的微小移动，目标函数值不再增加，或者说在点 x 处的一个邻域内，找不到一个可移动的方向，使得目标函数值增加，即在最优解 $\bar{x}$ 处，一定有 $\mathrm{d}f(\bar{x})=0$。

在无约束极值问题中，$\mathrm{d}x$ 可以是任意向量，因此只要 f_x 不是零向量，总可以在点 x 处找到一个变化方向，使得向量 $\mathrm{d}x$ 和梯度向量 f_x 成锐角，从而有 $\mathrm{d}f(x)>0$。故而当目标函数在点 $\bar{x}$ 取得极值，一定有梯度向量 $f_x(\bar{x})=0$，这就是无约束极值问题的一阶条件。

1.2.2　约束极值问题

当存在约束（不管是等式约束还是不等式约束）时，点 x 处的变化方向是有限制的，即向量 $\mathrm{d}x$ 不是任意的。比如在上面所举的消费者选择的例子中，在预算线上，向量 $\mathrm{d}x$ 的方向为沿着预算线。此时，按上面对梯度向量 f_x 和向量 $\mathrm{d}x$ 的几何意义的讨论，如图 1.4 所示，当点 x^1（x^3）处梯度向量 f_x 和向量 $\mathrm{d}x$ 不是正交的时候，向右（左）移动，可以使目标函数值增大；在点 x^2 处，梯度向量 f_x 和向量 $\mathrm{d}x$ 正交，$\mathrm{d}f(x)=0$，目标函数取得极值。由前面的讨论，向量 $\mathrm{d}x$ 的方向即为预算线的方向，而梯度向量 f_x 为无差异曲线的法方向，也就是与无差异曲线切线垂直的方向。由几何知识，我们知道，在点 x^2（最优解）处，无差异曲线的切线的斜率一定与预算线的斜率相同，在图 1.4 中，无差异曲线在点 x^2 处一定与预算线相切。这个结论与我们对消费者选择的讨论结果是一致的。

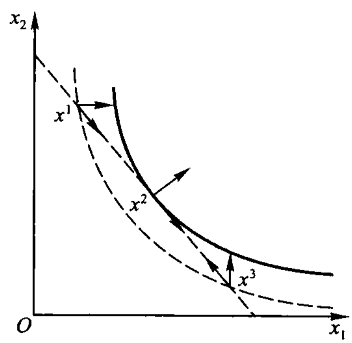

图 1.4　约束优化问题图解

一般的，约束由等式 $g(x)=c$ 表示，点 x 的变化向量 $\mathrm{d}x$ 是受限制的，具体的，将约束等式全微分，

$$g_1\mathrm{d}x_1+\cdots+g_n\mathrm{d}x_n=0 \tag{1.4}$$

由于 c 是常数，等式的右边等于零，写成向量的形式为：

$$(g_1, \cdots, g_n)\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}=0\text{，或 } g_x dx=0\text{，其中 } g_x=(g_1, \cdots, g_n)$$

因此，在点 x 处，向量 dx 的方向由上式确定，即向量 dx 与向量 g_x 正交。

在最优解 $\bar{x}$ 处，满足 $f_x dx=0$，即梯度向量 f_x 与向量 dx 正交。根据几何知识，我们知道，在最优解 $\bar{x}$ 处，梯度向量 f_x 一定与向量 g_x 成比例，即存在常数 λ 使得：

$$f_x=\lambda g_x\text{，或}\frac{f_x}{g_x}=\lambda$$

这就是我们熟悉的等式约束极值问题的一阶条件。

正如前面对梯度向量 f_x 的讨论，此处也可以将向量 g_x 看作是约束函数 g_x 在点 x 处的梯度向量，即等值面 $g(x)=c$ 在点 x 处的法向量。由 $g_x dx=0$，向量 dx 与梯度向量 g_x 是垂直的，或者说向量 dx 可以看作是等值面 $g(x)=c$ 的切平面中的一个向量。又由在点 $\bar{x}$ 处，$f_x dx=0$，即梯度向量 f_x 和向量 dx 垂直，也就是说向量 dx 也在等值面 $f(x)=k$ 的切平面中。因此，在最优解点 $\bar{x}$ 处，两个等值面 $f(x)=k$ 与 $g(x)=c$ 的切平面重合，推得法向量 f_x 与 g_x 平行，即有 $f_x=\lambda g_x$。

所以，梯度向量 f 在一维的情形下就是导数 $f'(x)$，而在 n 维情形下就是偏导数向量 f_x。

1.2.3 雅克比矩阵

在上面的例子中，如果约束不是单个等式，而是由 m 个等式组成的，即 $g(x)$ 和 c 都是向量，具体的：

$$\begin{cases} g^1(x_1, \cdots, x_n)=c_1 \\ \qquad\vdots \\ g^m(x_1, \cdots, x_n)=c_m \end{cases} \tag{1.5}$$

则此时，$G=g_x\equiv\frac{\partial(g^1, \cdots, g^m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\equiv\begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g^m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g^m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$，我们称之为 $g(x)$ 的雅克比矩阵。在隐函数定理的讨论中，我们会涉及雅克比矩阵的概念。

1.2.4　隐函数定理

（1）在隐函数 $f(x, y)=0$ 中（x，y 都是一维向量），如果在点（x^0，y^0）的一个邻域内有 $f_y \neq 0$，则 y 可以表示成 x 的函数，即 $y=\phi(x)$，并且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{f_x}{f_y}$。

（2）当 x 是 n 维向量时，如果在点（x^0，y^0）的一个邻域内有 $f_y \neq 0$，则 y 可以表示成 n 维向量 x 的函数，即 $y=\phi(x)$，且 $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{f_i}{f_y}$，$i=1$，…，$n$。

这可以通过对隐函数 $f(x, y)=0$ 求全微分，$f_1\mathrm{d}x_1+\cdots+f_n\mathrm{d}x_n+f_y\mathrm{d}y=0$ 求得。

（3）当 y 是一个 m 维向量时，根据方程组的知识，y 的值要能够被确定，$f(x, y)$ 也一定是一个 m 维的向量，即：

$$\begin{cases} f^1(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m)=0 \\ \qquad\vdots \\ f^m(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m)=0 \end{cases} \tag{1.6}$$

此时，$f_y=\dfrac{\partial(f^1, \cdots, f^m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$，我们称之为 f^1，…，f^m 对于 y_1，…，y_m 的雅克比矩阵（秩为 m 的方阵）。

如果在点（x^0，y^0）的一个邻域，雅克比矩阵 f_y 是非奇异的，或者说 $\det f_y \neq 0$，即雅克比行列式不等于零，则向量 y 可以写成向量 x 的函数，即 $y=\phi(x)$，其中 $\phi(x)$ 是一个向量，并且有：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} = -f_y^{-1}f_i = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x_i} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

此结果可以通过对下列式子全微分：

$$\begin{cases} f^1(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f^m(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m) = 0 \end{cases}$$

并利用克莱姆法则求得。

1.2.5 超平面

在上面消费者选择的例子中，预算约束等式为 $p_1x_1 + p_2x_2 = I$，即 $px = I$。在平面 $x_1 - x_2$ 中表现为一条直线；当 x 是三维向量时，预算约束等式为 $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = I$，在三维空间（$x_1$，$x_2$，$x_3$）中表现为一个平面，法方向为（$p_1$，$p_2$，$p_3$）；当 $n>3$ 时，预算约束 $px = I$ 在 n 维欧氏空间（x_1，…，x_n）中表现为超平面。

1.3 线性规划问题的求解：拉格朗日方法

前面从梯度的角度得出了约束等式优化问题的边际条件，

$$\max_x f(x)$$
$$\text{s.t. } g(x) = c$$

在最优解 $\bar{x}$ 处的一阶条件，即 $f_x = \lambda g_x$，其中 λ 为常数。

此处，给出一个一般的求解方法——拉格朗日（Lagrange）方法：通过引入一个参数，将一个约束极值问题转化成无约束极值问题。具体的，构造拉格朗日函数：

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda(c - g(x)) \tag{1.8}$$

其中，x 是 n 维向量，λ 是参数，称之为拉格朗日乘子。上述约束极值在最优解 $\bar{x}$ 处的一阶条件可以用拉格朗日函数的一阶导数表示：

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} = f_i - \lambda g_i = 0, \ i = 1, \cdots, n$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda} = c - g(x) = 0$$

第一个式子用向量表示，即为 $f_x = \lambda g_x$，其中 f_x，g_x 分别表示目标函数和约束函数在最优解点 $\bar{x}$ 处梯度向量的取值；第二个式子是约束等式的重新表述。共有 $n+1$ 个变量（x_1，…，x_n，λ）和 $n+1$ 个等式，一般能直接求出最优解（$\bar{x}$，λ），拉格朗日乘子 λ 是作为最优解的一部分求出来的。

当约束 $g(x) = c$ 表示 m 个等式时，求解过程与上面一样，此时拉格朗日