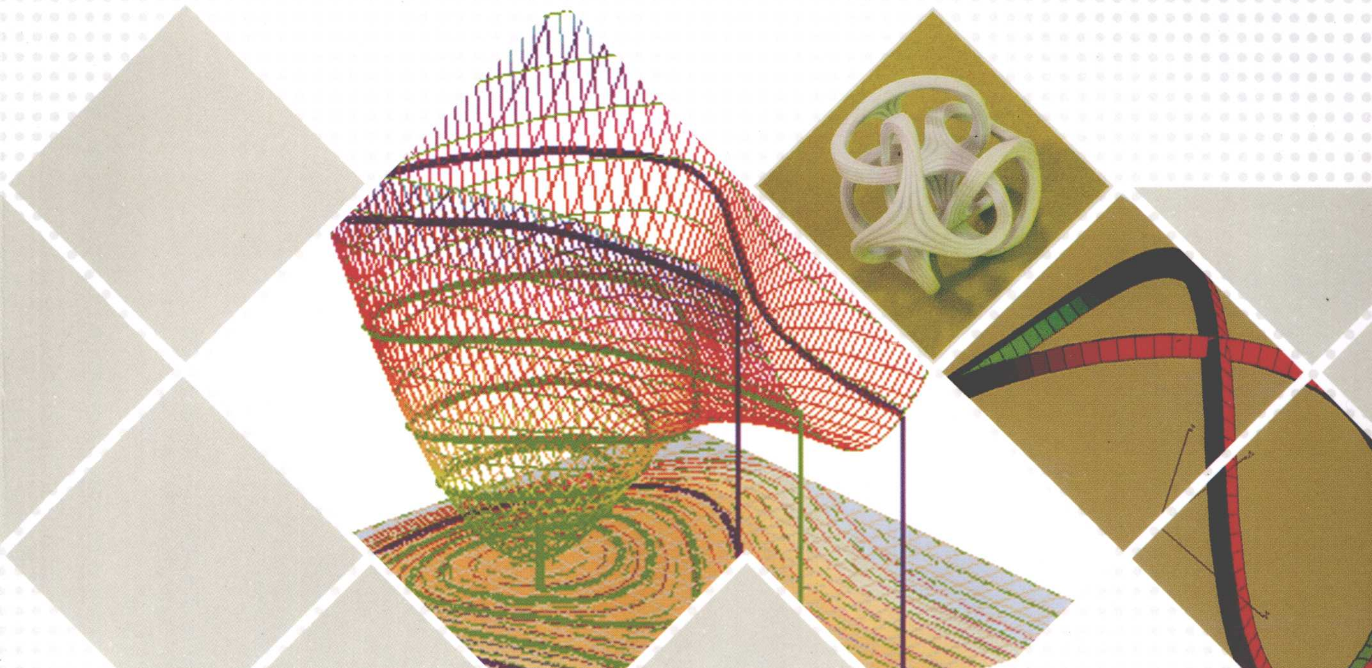
高等教育"十一五"规划教材
公共基础课教材系列

线性代数

史美华 马万 赵岳清 胡亚红 等 编著



科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院教材建设专家委员会教材建设立项项目

高等教育“十一五”规划教材

公共基础课教材系列

线性代数

史美华　马万　赵岳清　胡亚红 等　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书依据诸编者多年成功的教学实践经验，按照新时代下高校教材改革的主要精神及高等教育大众化的新教学理念编写而成。全书共分 6 章，内容主要包括行列式、线性方程组、矩阵、向量、相似矩阵、特征值和特征向量、二次型及习题参考答案或提示。

全书以财经类专业的学生易于接受的方式，科学、系统地介绍了线性代数的基本内容，本书具有结构清晰、概念准确、深入浅出、可读性强、便于学生自学等特点。可作为高等院校财经类及相关专业的教材或教学参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/史美华等编著. —北京：科学出版社，2009
（中国科学院教材建设专家委员会教材建设立项项目·高等教育“十一五”规划教材·公共基础课教材系列）
ISBN 978-7-03-025263-0

Ⅰ. 线… Ⅱ. 史… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151·2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 143997 号

责任编辑：沈力匀　周　恢 / 责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏 杰 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2009 年 9 月第 一 版　开本：787×1092 1/16
2009 年 9 月第一次印刷　印张：10 1/4
印数：1— 4000　字数：240 000

定价：18.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）
销售部电话 010-62134988　编辑部电话 010-62135235（HP04）

中国科学院教材建设专家委员会教材建设立项项目

《数学教学改革理论与研究》

专家委员会

主　任　徐宪民

副主任　严从荃　盛宝怀

编　委（按姓氏笔画排序）

马　万　艾为鸿　兰家诚　郑学良　荆广珠

相丽驰　徐光辉　梅雪锋　韩祥临

前　言

线性代数是数学的一个重要分支，其主要研究对象是矩阵、线性方程组、向量及其运算。它不仅在数学、力学等自然科学和工程技术领域有着重要的应用，而且在经济学、管理学等社会科学领域也有着十分广泛的应用。目前，线性代数课程已成为高等学校理、工、经、管等专业的一门基础数学课程。

本书依据教育部制订的财经类专业线性代数课程教学大纲的内容编写而成，与全国硕士研究生入学统一考试“数学考试大纲”线性代数部分的要求一致。主要内容有：行列式、线性方程组、矩阵、向量、相似矩阵、特征值和特征向量、二次型。每章后配有总复习题，可作为财经类各专业本科生的线性代数课程教材。

本书的编写理念——在不失科学性的前提下不过分强调某些理论的严密论证及研究过程，突出其数学思想的介绍和相应的数学方法训练及应用，让读者能更多地体会数学的思想方法，增强他们应用数学的意识和应用数学的能力。

本书由史美华、马万、兰家诚、胡亚红、赵岳清、王亢共同编写。第 1 章由胡亚红编写；第 2 章由兰家诚编写；第 3 章由赵岳清编写；第 4 章由史美华、王亢编写；第 5 章由马万编写；第 6 章由史美华编写。全书由史美华统稿。本系列教材的编写委员会的各位专家教授认真审阅了全书，并提出了非常宝贵的意见。

在本书的编写过程中，编者除了总结多年的教学经验外，还参考了其他的一些教材和参考书，在很多方面得到启发与教益，在此不一一指明，谨对原书编著者表示衷心地感谢。同时也得到科学出版社的大力支持，在此一并致谢。

限于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免会出现错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正，以期本书能不断完善。

编者

目　　录

第 1 章　行　列　式

行列式是线性代数中的一个重要概念，它广泛用于数学、工程技术及经济学等众多领域. 本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

§1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　二、三阶行列式定义

引例　当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，对于给定的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$$

用加减消元法，得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.1}$$

注意：求 x_1,x_2 的分式的分子、分母都是两项积的差，为了便于表述及进一步学习，引入二阶行列式的概念.

定义 1.1　把代数式

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

记做 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.2}$$

则式(1.2)的左边称为二阶行列式，右边称为**二阶行列式按对角线展开式**；横排称为行，竖排称为列；把 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为**行列式中处于第 i 行、第 j 列的元素**；从左上角到右下角对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**副对角线**(图 1.1). 由二阶行列式定义，式(1.1)可写为

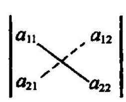


图 1.1

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}.$$

定义 1.2　把代数式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

记做

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.3}$$

式(1.3)的左边称为三阶行列式,右边称为三阶行列式按对角线展开式.
其运算规律用图 1.2 表示.

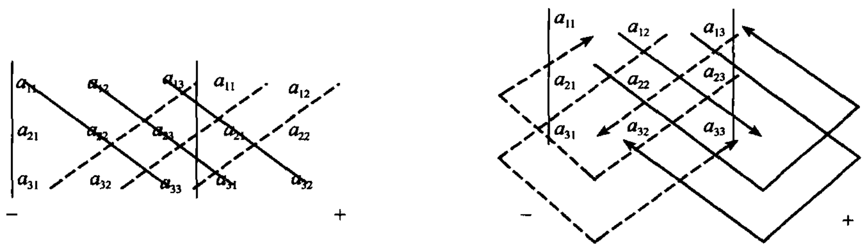


图 1.2

可以验证,三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时,$x_1=\dfrac{D_1}{D}$,$x_2=\dfrac{D_2}{D}$,$x_3=\dfrac{D_3}{D}$,其中 $D_j(j=1,2,3)$是在 D 中的第 j 列元素依次用 b_1,b_2,b_3 代替的三阶行列式.

由式(1.2)和式(1.3)的右边可得到二阶、三阶行列式的结构规律:

(1) 每一项的各个因子位于不同的行,也位于不同的列,而且所有既位于不同行又位于不同列的元素的乘积都在行列式中出现.

(2) 有的项取正号,有的项取负号.

对于规律(2),什么时候取正号,什么时候取负号的规律不容易看出。为此,我们引入排列概念.

1.1.2 排列

定义 1.3 n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 的一个**排列**是指由这 n 数码组成的一个有序数组.

例如,123;231;312;321;213;132 都是 1,2,3 这 3 个数码组成的排列,显然 n 个数码的不同排列共有 $n!$ 个.

注意:上面由 1,2,3 组成的每一个排列里,除了排列 123 的数码排法是按自然顺序排列外,其余的排列中,都有较大的数码排在较小的数码的前面.例如,在排列 132,里,3 比 2 大,但 3 排在 2 的前面;在排列 321 里,2 排在 1 的前面,3 排在 2 和 1 的前面.一般,在一个排列里,如果某一个较大的数码排在某一个较小的数码前面,就说这两个数码构成了一个**逆序**.例如,132 排列有一个逆序;321 有 3 个逆序,在一个排列里出现的逆序总数称为这个排列的**逆序数**.我们用 $\pi(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$的逆序数.

给了任意一个排列,我们可以按照以下方法来计算它的逆序数:看有多少个数码排在 1 的前面,设为 m_1 个,那么就有 m_1 个数码与 1 构成逆序;把 1 划去,再看有多少个数码排在 2 的前面,设为 m_2 个,那么就有 m_2 个数码与 2 构成逆序;把 2 划去,计算有多少个数码排在的 3 前面,如此继续下去,最后设在 n 的前面有 m_n 数码(显然 $m_n=0$).那么这个排列的逆序数为 $m_1+m_2+\cdots+m_n$.

例如,在排列 451362 中,$m_1=2,m_2=4,m_3=2,m_4=m_5=m_6=0$.所以这个排列有 8 个逆序.

一个排列的逆序数可能是偶数也可能是奇数,有偶数个逆序的排列称为一个**偶排列**;有奇数个逆序的排列称为一个**奇排列**.例如,451362 为偶排列;132 和 321 为奇排列.

在由数码 123 组成的 6 个排列中,有 3 个偶排列,就是 123;231;312.另 3 个 321;213;132 是奇排列.在 n 个数码的所有 $n!$ 个排列中,偶排列与奇排列各占一半.

如果把一个排列里的任意两个数码交换一下位置,而其余数码不动,那么就得到一个新的排列.对排列施行这样一个变换称为**对换**.关于逆序数和对换有下面定理.

定理 1.1 设 $i_1i_2\cdots i_n$和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是由数码 $1,2,\cdots,n$ 构成的任意两个排列.那么总可以通过一系列对换由 $i_1i_2\cdots i_n$得出 $j_1j_2\cdots j_n$.

定理 1.2 每一个对换改变排列的奇偶性.

定理 1.3 设 n 个元素的乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$分别是由第一下标和第二下标构成的数码 $1,2,\cdots,n$ 的排列,如果根据乘法的交换律把乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 写成 $a_{k_1l_1}a_{k_2l_2}\cdots a_{k_nl_n}$,$k_1k_2\cdots k_n$ 和 $l_1l_2\cdots l_n$ 都是数码 $1,2,\cdots,n$ 构成的排列.则

$$(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)+\pi(i_1i_2\cdots i_n)}=(-1)^{\pi(k_1k_2\cdots k_n)+\pi(l_1l_2\cdots l_n)}$$

定理 1.1 与定理 1.2 证明读者自己完成,下面给出定理 1.3 的证明.

证明 设 $\pi(i_1i_2\cdots i_n)=s,\pi(j_1j_2\cdots j_n)=t$.如果交换乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中某两个因子的位置,那么乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_n,j_n}$ 的因子的第一个下标和第二个下标所构成的排

列同时经过一次对换. 假定经过这样一次对换后所得的两个排列的逆序数分别为 s'，与 t'，那么由定理 1.2 得，$s'-s$ 和 $t'-t$ 都是奇数. 因为两个奇数的和是偶数，所以 $(s'+t')-(s+t)=(s'-s)+(t'-t)$ 是一个偶数. 因此 $s'+t'$ 与 $s+t$ 同时是偶数或同时是奇数，从而

$$(-1)^{s'+t'} = (-1)^{s+t}.$$

因此有

$$(-1)^{\pi(j_1 j_2 \cdots j_n)+\pi(i_1 i_2 \cdots i_n)} = (-1)^{\pi(k_1 k_2 \cdots k_n)+\pi(l_1 l_2 \cdots l_n)}.$$

定理 1.3 被证明.

关于行列式的结构规律(2)什么时候取正号，什么时候取负号的问题，我们不妨以三阶行列式为例作以下分析：

每一项的元素都带有 2 个下标. 第一个下标表示这个元素所在行数，第二个下标表示这个元素所在列数. 每一项元素的第一个下标都是按自然顺序排列的，而第二个下标构成 3 个数码的一切排列：123；231；312；321；213；132. 前 3 个为偶排列，与它们对应的三项取正号；后 3 个排列是奇排列，与它们对应的三项取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\pi(123)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\pi(231)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\pi(312)} a_{13}a_{21}a_{32},$$

$$+ (-1)^{\pi(321)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{\pi(213)} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\pi(132)} a_{11}a_{23}a_{32},$$

简记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\pi(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

二阶行列式也有同样的结论.

类似二阶、三阶行列式的定义，下面给出 n 阶行列式的定义.

1.1.3　n 阶行列式定义

定义 1.4　用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

表示的 n 阶行列式. 它指的是 $n!$ 项的代数和，这些项是一切可能的，取自式(1.4)的不同行与不同列上的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$. 项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\pi(j_1 j_2 \cdots j_n)}$，也就是说，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时，这一项的符号为正，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时，这一项的符号为负. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\pi(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \tag{1.5}$$

n 阶行列式(1.4)简记为 $|a_{ij}|$,或 $\det(a_{ij})$.

一个 n 阶行列式正是前面所说的二阶和三阶行列式的推广,特别当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a|$ 就是数 a.

思考:下列等式是否成立?

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\pi(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\pi(i_1 i_2 \cdots i_n)+\pi(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

例 1.1 求 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值(这个行列式称为**下三角形行列式**).

解 根据定义 1.4,它是一个 $n!$ 项的代数和.然而这些项里,除了 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外,其余的项都至少含有一个因子 0,因而等于 0.与 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 对应的第二个下标构成的排列为 $12\cdots n$ 的逆序数为零,是一个偶排列,取正号.因此

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

习题 1.1

1. 计算下列二阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$. (2) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$. (3) $\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a^2+a+1 & a^3 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.　(2) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -2 & -3 & 6 \\ -6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.　(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}$.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$.　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

3. 求下列排列的逆序数.

(1) 4231.　(2) 1324.　(3) 63725148.　(4) 4312765.

4. 在六阶行列式中$|a_{ij}|$,下列各项应取什么符号?

(1) $a_{13}a_{24}a_{35}a_{42}a_{56}a_{61}$.　(2) $a_{14}a_{26}a_{33}a_{42}a_{55}a_{61}$.　(3) $a_{12}a_{26}a_{34}a_{41}a_{53}a_{65}$.

5. 利用行列式的定义求下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.　(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

§1.2　行列式的性质

定义 1.5　将行列式 D 的行与相应的列互换后得到的新行列式,称为 D 的转置行列式,记为 D^{T}(或 D').

例如,若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

行列式具有如下性质(以三阶行列式为例来理解):

性质 1.1　行列式转置后,其值不变,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1.2　互换行列式中的任意两行(列),行列式改变符号.

性质 1.3　如果行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式为零.

性质 1.4　如果行列式中有一行元素全为零,则此行列式等于零.

性质 1.5　把行列式的某一行(列)的每个元素同乘以数 k,等于以数 k 乘该行列式.如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 1.1 如果行列式某行(列)的所有元素有公因子,则公因子可以提到行列式的外面.

推论 1.2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则行列式等于零.

性质 1.6 如果行列式中的某一行(列)所有元素都是两个项的和,则此行列式等于两个行列式的和,这两个行列式是在两个项中各取一项作为该行(列)的元素,其余的元素与原来行列式的对应元素相同.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 1.7 以数 k 乘行列式的某行(列)的所有元素,然后加到另一行(列)的对应元素上,则行列式的值不变.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

这里只证明性质 1.1,其余证明读者自己完成.

证明 设 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是 n 阶行列式 D 的任意一项. 这一项的元素位于 D 的不同行和不同列,所以位于 D 的转置 D^T 的不同列和不同行,因而也是 D^T 的一项. 反过来,D^T 的任意一项也是 D 的一项. 因此 D 和 D^T 是由完全相同的项组成的. 由定理 1.3 知,这一项在 D 里和在 D^T 里的符号都是 $(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}$. 这样 D 与 D^T 是带有相同符号的相同项的代数和. 所以 $D=D^T$.

行列式的性质为计算行列式的值带来方便.

【例 1.2】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+a_2 & 1+a_3 \\ 2+a_1 & 2+a_2 & 2+a_3 \\ 3+a_1 & 3+a_2 & 3+a_3 \end{vmatrix}.$$

解 根据性质 1.7,把 D 的第一行元素乘以 (-1) 分别加到第二行和第三行的对应元素上,再由推论 1.2 即可得 D 的值为零.

即

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+a_2 & 1+a_3 \\ 2+a_1 & 2+a_2 & 2+a_3 \\ 3+a_1 & 3+a_2 & 3+a_3 \end{vmatrix} \xlongequal[-r_1+r_3]{-r_1+r_2} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+a_2 & 1+a_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

注意:为了便于检查运算过程,我们用 r_i 表示第 i 行,用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行元素与第 j 行的对应元素互换位置,用 $kr_i + r_j$ 表示第 i 行元素乘以 k 加到第 j 行对应元素上.若对列,则把"r"改成"c".

习题 1.2

1. 利用行列式性质计算.

(1) $\begin{vmatrix} 435 & 635 \\ 565 & 365 \end{vmatrix}$.　　(2) $\begin{vmatrix} 1+\cos\varphi & 1+\sin\varphi & 1 \\ 1-\sin\varphi & 1+\cos\varphi & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$.　　(4) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 解下列关于 x 的方程.

(1) $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix}=0$.　　(2) $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix}=0$.

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1-x \end{vmatrix}=0 \quad (n>1)$.

§1.3　行列式的按行(列)展开

1.3.1　三阶行列式的按行(列)展开

一个高阶的行列式能化成较低阶的行列式计算吗?回答是肯定的.下面以三阶行列式为例来说明.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

可见,我们可以通过计算 3 个二阶行列式来计算三阶行列式.

为了更好地表达上述结论,先引进余子式和代数余子式的概念.在 n 阶行列式中划去

a_{ij}元素所在的第i行和第j列的元素，剩下的元素按原次序构成的$n-1$阶行列式称为a_{ij}**的余子式**，记做M_{ij}，a_{ij}的余子式乘上$(-1)^{i+j}$称为a_{ij}**的代数余子式**，记做A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+1}M_{ij}.$$

例如，三阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$中元素$a_{11}$的代数余子式是

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

元素a_{12}的代数余子式是

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

元素a_{13}的代数余子式

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

此时

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

因此可以得到下面定理.

定理 1.4 三阶行列式D的值等于它任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ &= a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} \\ &= a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \\ &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} \\ &= a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{33}A_{33} \\ &= a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

或简写为

$$D=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij},\quad 其中\ i=1,2,3;j=1,2,3.$$

式(1.6)的前3个等式称为三阶行列式的**按行展开式**，后3个等式称为三阶行列式的**按列展开式**.

【例 1.3】 将行列式$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$按第一行，第三列展开.

解 按第一行展开得

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-10) - 3\times(-2) + (-1)\times 18 = -32.$$

按第三列展开得

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\times 18 - 1\times(-19) + 3\times(-11) = -32.$$

从例 1.3 可以看到行列式按不同行或不同列展开计算的结果相等.

推论 1.3 三阶行列式 D 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = 0 \quad (i \neq j), \tag{1.7}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = 0 \quad (i \neq j). \tag{1.8}$$

其中 $i=1,2,3;j=1,2,3$.

证明 以 $i=2,j=1$ 为例给出证明(其余类推). 即证 $a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0$.

事实上,行列式 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 按第 1 行展开为

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}.$$

由性质 1.3 可知该行列式的值为零,即得

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0.$$

把式(1.6)、式(1.7)和式(1.8)结合起来可写成:

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{3} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases} \quad (i,j = 1,2,3). \tag{1.9}$$

1.3.2 n 阶行列式的按行(列)展开

与三阶行列式可以按行(列)展开一样,我们也可以证明 n 阶行列式按行(列)展开.

定理 1.5 n 阶行列式 D 等于它任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},$$

(按第 i 行展开，$i=1,2,3,\cdots,n$).

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij},$$

(按第 j 列展开，$j=1,2,3,\cdots,n$).

同样也有与推论 1.3 类似的结论.

推论 1.4 n 阶行列式 D 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j), \tag{1.10}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j). \tag{1.11}$$

其中 $i=1,2,3,\cdots,n;j=1,2,3,\cdots,n$.

并且有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n), \tag{1.12}$$

其中 A_{ij} 是 $a_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 的代数余子式，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式，是一个 $n-1$ 阶行列式.

由定理 1.5 很容易得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{(见例 1.1)}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{(这个行列式称为上三角形行列式)}.$$