中学数学参考资料

中學數學教學法譯叢

第二輯

蔣 巍 張運鈞 編譯

新中國聯合出版社出版

中學數學參考資料

中學數學教學法譯叢

第二輯

蔣　　巍
張運鈞　編譯

★

新中國聯合出版社出版

版權所有・不准翻印

中學數學參考資料 中學數學教學法譯叢（第二輯）

編譯者	蔣巍 張運鈞
出版者	新中國聯合出版社 上海：(9)石門二路41弄44號
發行者	通聯書店 上海：(11)山東中路128弄4號
印刷者	中和印刷廠 上海：(9)淮安路727弄30號
經售處	全國各大書局

一九五四年五月初版　印數0001—5000　售價￥4400元

譯者序言

自從全國採用蘇聯新教材以後，我們教師都已經在不同的程度上體會和認識了新教材的優越性，但是如何把新教材的精神在教學過程中予以貫澈，使學生獲得深刻的知識和熟練技巧，却常常成爲問題而未能適當的和及時的解決，當然這個問題的解決必須教師們能掌握基本的教學原則和學習蘇聯教師的負責精神。除此以外，學習蘇聯的教學方法和教學經驗應當是主要的。蘇聯在教學法的研究和先進經驗的推廣上是非常重視的。在數學上除了數學教學法雜誌經常研究各科——算術、代數、幾何、三角——的教學法和介紹教學經驗外，教育科學院和國營教育出版社也經常出版各種書籍、刊物、蒐集有關的史料、資料，研究討論各科教學法和介紹先進教學經驗。在我國雖然在全國範圍內已經掀起了學習蘇聯的高潮，各種譯著相繼出版，但在數學教學方面的專門著作却仍不多，所以我們取材於數學教學法雜誌和其他有關刊物，蒐集了一些確實有助於教學的材料迻譯成編，藉供數學教師改進教學的參考。祇是限於我們的教學法理論水平、數學知識水平和俄文水平，而且翻譯工作是在課餘進行的，時間倉卒，故望誤在所難免，倘懇讀者惠予指正。

譯者 1953 年 10 月於瀋陽。

目　錄

交錯直線……………………………………………………… 1
利用相似法來解作圖題 ……………………………………14
（一）緒言………………………………………………………………14
（二）按照基本相似特徵的條件來作補助圖形…………………15
（三）不按照相似基本特徵的相似圖形來作圖…………………21
（四）相似中心的選擇……………………………………………26
（五）授課………………………………………………………………29
十年級數學小組的工作經驗……………………………32
初級中學裏關於不等式的概念 …………………………48
在六——七年級內發展學生的邏輯思惟以及
　證明問題的解法 ……………………………………………57
初中學生在算術上的基本錯誤及原因 …………………77
（一）分數………………………………………………………………77
（二）小數………………………………………………………………89
（三）分數和小數的混合運算………………………………………90
（四）百分法……………………………………………………………92

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

交錯直線

本題是蘇俄功勳教師葉、佛、孟諾庚諾娃同志，1952 年於"教學會議"上所作的報告。

葉、佛、孟諾庚諾娃著

"交錯直線"這個教材裏含有三個問題：1）關於交錯直線的概念，2）二交錯直線間的角 3）二交錯直線間的距離。

這些問題不是集中於立體幾何學教程裏的某一地方，而是在學生對於空間中直線和平面相互位置的知識的積聚過程裏，分散於立體幾何學教程當中的。通常這種教材給學生們很大的困難。由於學生們對於空間的觀念還很薄弱，他們很難理解這個教材，並會迅速地把學過的教材忘掉，而且知識的不鞏固性不僅是促使對於所學的觀念混亂，並且促使着不能充分地來練習。

爲了有成効地學習關於交錯直線的問題，必須：1）保證課上使用直觀教具；2）擬定許多爲了使學生產生清晰觀念以及複習舊教材的練習；3）在今後再三地複習學習過的教材，在習題中把已經學過的教材和求二交錯直線間的角以及距離的問題配合起來，在十年級中學習多面體（或在三角中學習三角形解法）時可以來作。

爲了保證在學習這段教材時的直觀性，必須備有下面這些教具：1）一套直線和平面的模型；2）一套用鉄絲網做的各種不同多面體的模型；3）作直線與二交錯直線相交或與二交錯直線垂直的作圖模型；4）某些習題裏圖形的掛圖。

在開始學習每一個問題時，爲了使學生產生明顯的觀念，應該由學生

自己來作模型(應該有所謂"分發教材"[1])。以後應把模型的作用逐漸減低,而增加圖形的作用:學生應該學會作圖以及看圖形。當學生對所學習的教材持有正確的觀念以後,可以不用圖形及模型來解容易懂的習題,以發展他們對於空間的想像力;可以按照模型及圖形來檢驗解答。

I. 爲了使學生瞭解交錯直線的概念,我們可回憶一下二直線的各種可能的相互位置,亦卽;

1) 二直線有二公共點,這時它們便合爲一直線;

2) 二直線有一公共點,這時它們相交;這樣的二直線是在一平面內的。

3) 二直線沒有公共點,而且在一平面內,這時它們平行。

其次向學生提出這樣的問題,二直線是否不可能再有任何其他的位置呢?爲了解決這個問題,我們提出這樣的習題來。

已知一平面 P,在其上有一直線 DE 及線外一點 C。過點 C 作一不在平面 P 內的直線。

得到了所求的直線 AB(圖1),我們確定:1) 它與 DE 不可能相交、因爲不然的話,過 AB 及 DE 可作一新的平面 R,而過直線 DE 及點 C 就可作兩個不同的平面:R 和 P,但這是不可能的;2) 根據相同的理由,AB 與 DE 亦不平行。在此以後給予定義:二不相交、亦不平行的直線稱爲交錯直線(我們再一次地强調,交錯直線不在同一平面內)。

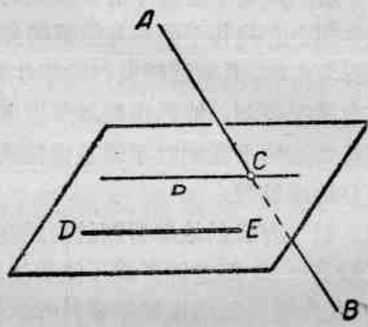

圖 1.

其次我們向學生指出:а) 在立方體的模型上;б) 在室內;в) 在街道上的交錯直線。

下一階段的工作是在圖形上找出交錯直線,例如,在正方體的圖形上

[1]) 對於分發教材一詞,讀者可參閱人民教育出版社出版的凱洛夫教育學1952年10月上海八版第171頁。(譯者按)

(圖 2)或解答勃布金著立體幾何習題集 §1 第 1 題；這時應當特別地注意，交錯直線在圖形上相交的地方，實際上是沒有交點的；這時所有直線的交點用色粉筆標出較爲合適。

應該給予學生類似的家庭作業。

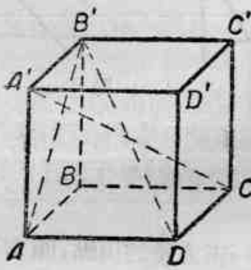

圖 2.

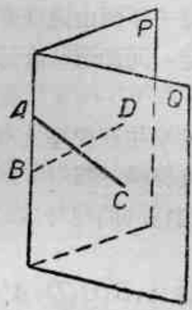

圖 3.

更進一步來練習：

1. 在一直線上已知二點。過每一點作該直線的垂線。這些垂線的相互位置可能是怎麼樣的？

2. 已知二相交的平面 Q 和 P。由它們的交線上，二不同的點 A 和 B 各在一平面上作一直線；在平面 Q 上作直線 AC，在平面 P 上作直線 BD。證明這兩條直線是交錯直線。

我們假設該二直線不是交錯直線，則過直線 AC 和 BD 可作一平面 M。這一平面含有點 B 和直線 AC，所以它應與平面 Q 合而爲一。平面 M 過直線 BD 和點 A，所以它又應與平面 P 合而爲一，但這是不可能的，因爲平面 P 和 Q 應該是二不同的平面。因此，AC 和 BD 是交錯直線。

3. 過已知點 A 作一直線，使與不過點 A 的二交錯直線 a 和 b 垂直(圖 4)。

所求的直線應該通過點 A 並與直線 a 相交；那末，它在過直線 a 及點 A 的平面 M 上(因爲它的二點：點 A 及與直線 a 的交點應該在平面 M 上)。所求的直線亦在過點 A 及直線 b 的平面 N 上；因此，它是平面 M

[1]) 卽指前東北人民政府教育部編譯的立體幾何習題。(譯者按)

與 N 的交線。由此就產生了作法。若平面 M 和 N 的交線與直線 a 或 b 平行，則該問題無解。

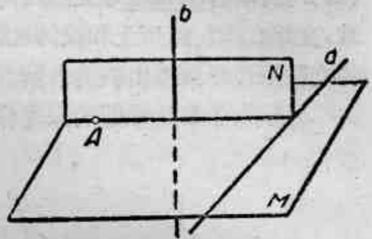

圖 4.

4. 二交錯直線與第三條直線相交。使每一平面由這些直線中的二直線決定，問過這些直線可作幾個平面？

促使學生在模型上和在圖形上找交錯直線後，應該給予學生這樣的一組直線，它們在延長時相交，當學生回答這樣的問題時：該二直線是否爲交錯直線？學生應該回答：不是。例如：

5. 若 A,B,C,D,A',B',C',D' 是一正方體的頂點，而 M 和 N 是相隣二稜中的中點(圖 5)。確定下列各直線的相互位置：BB' 與 NC'；AM 與 NC；MN 與 AC；MN 與 BC。

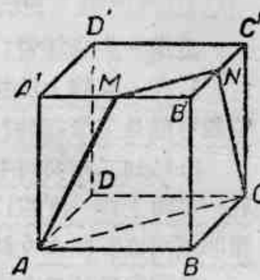

圖 5.

我們用這些練習可以使交錯直線的定義鞏固起來，並教會學生觀察，這條或那條直線在那一個平面內。

由於"交錯直線"的概念對學生是生疏的，爲了避免忘記，在學立體幾何學的下幾章時，應該引入適當的練習。

習題1.　在平面 P 內已知一直線 AB 以及平面外一點 M。過點 M 可引幾條與平面 P 平行，且與 AB 是交錯的直線？

習題2.　下面這個定理是否正確：與一平面平行的一直線和此平面上的任一直線平行？

習題3.　爲什麼在平行平面上的直線或平行、或交錯，而不可能相交呢？

習題4.　已知二交錯直線及線外一點。過此點作一平面與該二交錯直線平行。

習題5.　在一正三角錐內，過底面中心作一與二不相交的稜平行的

截面(勒布金著三角習題集 §19，第 17 題)。

習題6. 過二交錯直線作一組平行平面。

習題7. 證明介於二交錯直線間的線段的中點在同一平面上。

習題8. 作一直線與二已知的交錯直線相交，且與第三條已知直線平行。

II. 現在我們轉入關於二交錯直線間的角的問題上。

向學生闡明交錯直線不相交，在一般的意義下它們不形成角，而給予新的定義。我們預先證明這樣的定理：

若過空間的任一點作二直線，與二已知的交錯直線平行，則所得到的角的大小與該點的位置無關(圖 6)。

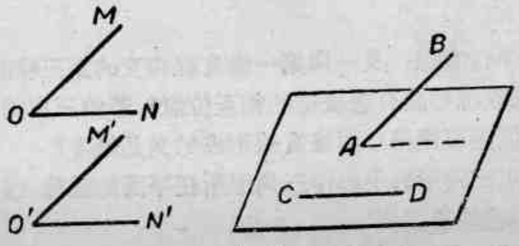

圖 6.

我們有

$$\left.\begin{array}{l} OM \parallel AB \\ O'M' \parallel AB \end{array}\right\}: OM \parallel O'M'$$

$$\left.\begin{array}{l} ON \parallel CD \\ O'N' \parallel CD \end{array}\right\}: ON \parallel O'N'$$

因此，

$$\angle MON = \angle M'O'N'。$$

其次給予定義：所謂二交錯直線間的角就是過一點所作與交錯直線平行的二直線間的角。

註釋　角取銳角。

給予了定義後，應該指出，在二交錯直線中的一直線上取點 O 常常是有利的。

其次應該擴大關於互相垂直的直線的概念，若二直線形成一直角，則無論相交或不相交，都認爲是互相垂直的二直線。

定義．形成一直角的二直線稱爲互相垂直的直線。

必需給予較一般的直線和平面垂直的定義。

定義．若一直線與一平面上所有的直線垂直，則稱此直線與該平面垂直。

由此亦產生了表示直線和平面垂直特徵的定理底新的敍述法：

與一平面上任二相交直線垂直的直線與該平面上任一直線垂直。

爲了產生二交錯直線間之角的清晰的觀念，並使學生把這些定義掌握很牢固，應該作一系列的練習，這些練習無論是在這些定義以後直接引入，或在今後引入均可。

練習：

1．有二平行直線，及一與第一條直線相交的第三條直線，問第三條直線與第二條直線可能有怎麼樣的相互位置？若第三與第一兩條直線的交角是 40°，問第三與第二兩條直線形成的角是幾度？

2．由一正三角形的中心作三角形所在平面的垂線。確定該直線與三角形各邊所形成的角。

3．在一正三角柱內確定：

a）側稜與其不相交的底面的邊間的角。

答：AB 和 CD 間的角等於角 $ABM=90^\circ$（其中 $BM \parallel CD$）（圖 7）。

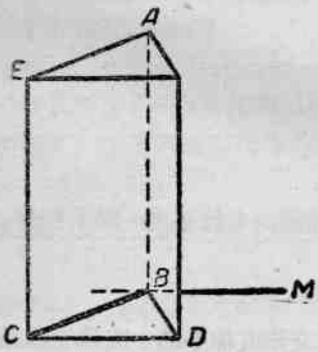

圖 7．

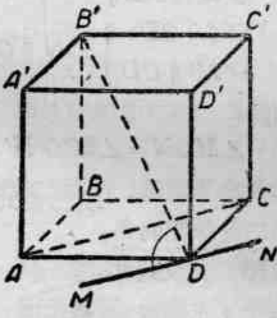

圖 8．

试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

б) 上底的邊與其不平行的下底的邊間之角。

答：因爲 $AE \parallel CB$；AE 和 CD 間的角等於 $\angle BCD$，$\angle BCD = 60°$。

4. 在一正方體內確定：

a) 交錯的稜之間的角：

б) 正方體的對角線與其不相交的底的對角線之間的角。(圖 8)

答：$B'D$ 與 AC 之間的角等於角 $B'DN = 90°$ ($MN \parallel AC$)。

в) 正方體的對角線與其不相交的稜之間的角。(圖 9)

答：$A'C$ 和 AB 之間的角等於角 $A'CD = arc\ tan\sqrt{2}$。

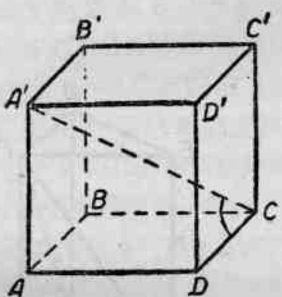

圖 9.

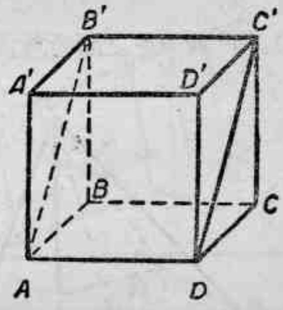

圖 10.

г) 面的對角線與其不相交的稜之間的角。(圖 10)

答：$B'B$ 和 $C'D$ 之間的角等於角 $DC'C = 45°$。

д) 相鄰二面的不相交的對角線之間的角。(圖 11)

答：$A'D$ 和 $B'D'$ 之間的角等於角 $A'DB = 60°$。

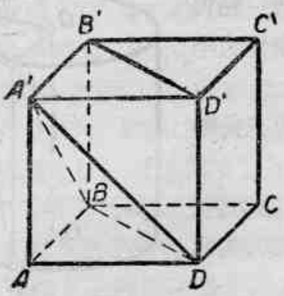

圖 11.

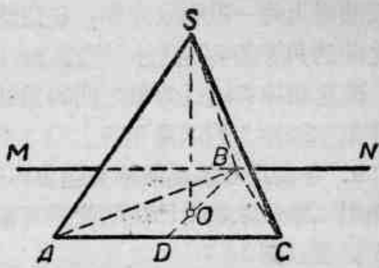

圖 12

5. 證明正四面體的不相交的稜互相垂直。(圖 12)

答: AC 和 SB 之間的角等於角 $SBN=90^0$ ($MN \parallel AC$),卽 $AC \perp SB$。

6. 證明在正四角錐內，側稜垂直於與其不相交的底的對角線。(圖 13)

7. 一直角柱的底是具有直角 B 的三角形 CBD; $CD=\sqrt{3}$ 分米; $AB=3$ 分米; $BD=\sqrt{2}$ 分米。確定:

a) 側面 CF 的對角線和與其交錯的稜 AB 之間的角。

答: 30^0

б) CF 與 AE 之間的角。(圖 14)

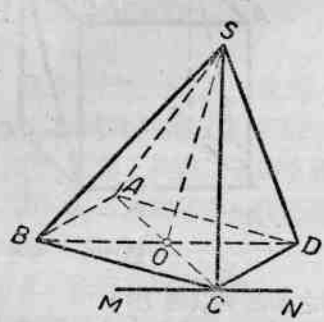

圖 13.

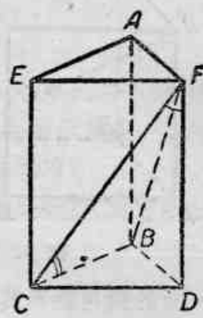

圖 14.

答: $arc\ tan\sqrt{11}$。

8. 在一等邊圓柱內，把上底圓周上的一點與下底圓周上的一點聯成直線，在這些點所作的半徑之間的角等於 30^0。

確定聯線與圓柱的軸之間的角 (勒氏三角學習題集 §20 第1題。(圖 15)

9. 在勒氏立體幾何學習題集內，§3 第23題，應該引入關於求題內已給的交錯直線之間的角的補充問題。(圖 16)

已知: $AB \parallel M$; $BK \perp M$; $BK=b$; $AC \perp AB$;

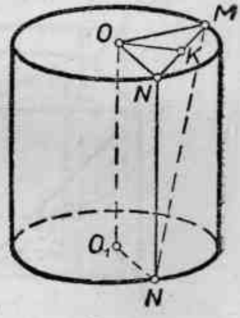

圖 15.

$BD \perp AB$；AC 和 BD 不在同一平面內；$AC=BD=c$。

求 AC 和 BD 之間的角。

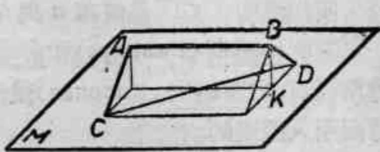

圖 16.

二交錯直線之間的最短距離

習題1.　已知二交錯直線。作一直線與該二直線相交並與它們垂直。

解法1.　(若這一問題在研究垂直平面以前研究)。

已知交錯直線 a 和 b 。過直線 a 作一平面 M 與直線 b 平行。由直線 b 上任意二點 A 和 B 作平面 M 的垂線(圖 17)：$AA' \perp M$ 和 $BB' \perp M$。把點 A' 和 B' 與點 C' (直線 $A'B'$ 與 a 的交點) 聯成直線，引 $CC' \perp M$；CC' 即為所求的直線，現在我們來證明這一點。

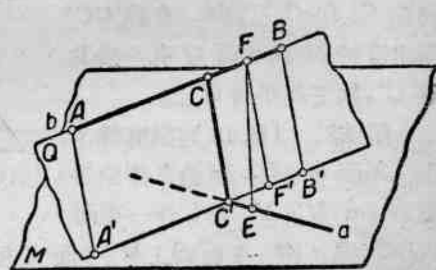

圖 17.

$AA' \parallel BB'$ 為一平面上之二垂線。過 AA' 和 BB' 作一平面 Q (這樣的平面總是存在的，而且是唯一的)。直線 b 和 $A'B'$ 與此平面有二公共點，故直線 b 和 $A'B'$ 在平面 Q 上。$A'B' \parallel b$ (若平面過平行於另一平面之直線，且與此平面相交，則其交線平行於該直線)：

$$\left.\begin{matrix} CC' \perp M \\ BB' \perp M \end{matrix}\right\} CC' \parallel BB'$$

所以直線 CC' 與直線 BB' 應在同一過 C' 點的平面上，而這樣的平面是唯一的平面 Q。因此，CC' 在平面 Q 上。

若在一平面上，一直線與二平行直線之一相交，則與另一亦必相交。由此可見，CC' 與該二交錯直線相交。

因為 $CC' \perp M$，則 $CC' \perp a$，以及 $CC' \perp A'B'$，$A'B' \parallel b$，因此，$CC' \perp b$ 即 CC' 垂直於該二交錯直線。所以，CC' 即為所求的直線。

其次我們要闡明，線段 CC' 是該二交錯直線上點之間的最短距離。聯直線 a 和 b 上的任一點 F 和 E 成一直線，且引 $FF' \perp M$，我們發現 $FF' < FE$，$FF' = CC'$。因此，$OC' < FE$。

所以證明了 CC' 是直線 a 與 b 之間的最短距離。

在岡格諾斯 (Гангнус) 和古爾維茨 (Гурвиц) 的教學法中有唯一的證明，但在吉西略夫 (Киселёв) 幾何學中沒有研究這個問題；這是由相反方面引入證明的。

若研究這個問題是在學習關於二互相垂直的平面的問題以後，則它的解較簡易亦較明顯。

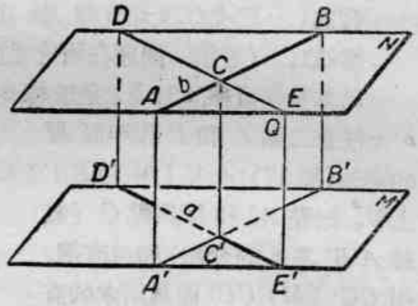

圖 18.

解法2. 過直線 a 作一平面 $M \parallel b$；過直線 b 作一平面 $Q \perp M$；過點 C' 作 $CC' \perp M$。直線 CC' 與垂直於 M 的平面 Q 有一公共點 C'，故它在平面 Q 上。

解法3. (圖 18)。過直線 a 作一平面 $M \parallel b$，而過 b 作一平面 $N \parallel a$；$M \parallel N$。過 b 作一平面 $P \perp M$，過 a 作一平面 $Q \perp M$。平面 P 和 Q 相交；若是 $P \parallel Q$，則 $DE \parallel b$，但 $DE \parallel a$，因此 $a \parallel b$，這就與條件矛盾。

P 與 Q 的交線 CC' 是所求的公垂線。

由這一作法，學生們可以明顯地看出二交錯直線的公垂線的存在和它的唯一性。

在這個習題的解法結束後，應該闡明：

1) 二交錯直線之間的距離同時也就是由二交錯直線中的一直線到過另一直線，而與該直線平行的平面之距離。

2) 這一距離同時也就是過此二交錯直線的二平行平面之間的距離。

這一習題應該用空間的模型來說明，因爲它需要清晰的空間觀念，因爲它會給學生們許多困難。

在解答這種交錯線段是空間的幾何圖形的組成部份的習題時，要應用詳盡分析過和學習過的作圖法。

習題

1. 由長等於 a、且與平面 M 平行的線段 AB 的兩端，作平面 M 的垂線 AC 以及斜線 $BD \perp AB$。求 AC 與 DB 之間的距離。(圖 19)

2．一立方體的稜等於 a，求正方體的稜與不相交的正方體的對角線之間的最短距離(勒氏立體幾何習題集 §7，第 8 題)。(圖 20)

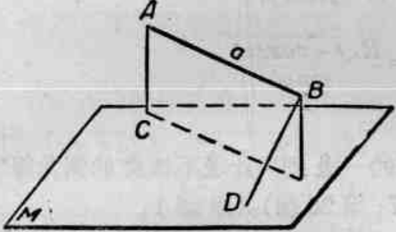

圖 19.

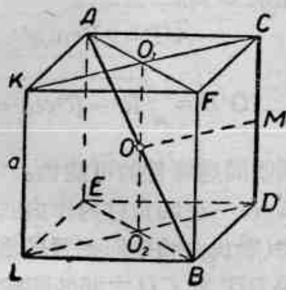

圖 20.

我們來求 AB 和 CD 之間的距離。作平面 P ($AFBE$)。這一平面 $P \parallel CD$，因 $CD \parallel FB$；$CK \perp P$；$DL \perp P$；作 $OM \perp P$；OM 卽爲所求的距離：

$$OM = O_1C = \frac{a\sqrt{2}}{2}。$$

3．圓柱的高爲 6 分米；底的半徑爲 5 分米。一已知線段的兩端在上下二底的圓周上；線段之長等於 10 分米。求該線段與圓柱之軸的最短距離以及 OO_1 與 MN 之間的角(勒氏立體幾何習題集 §13，第 8 題)。(圖 21)

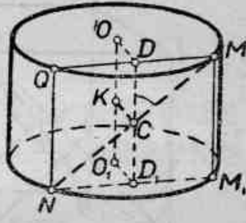

圖 21.

過 MM_1 和 MN 作一平面 Q，$Q \parallel OO_1$；$OD \perp Q$；$O_1D_1 \perp Q$；$CK \perp Q$；$CK = OD$；$OD = 3$ 分米。

答：$CK = 3$ 分米。OO_1 與 MN 之間的角等於角 DCM；$\angle DCM = arc\ cos\frac{3}{5}$。

4．在一等邊圓柱內，它的底的半徑等於 R，把上底圓周上的一點與下底圓周上的一點聯成一直線。聯線與底面形成角 α。確定此直線與圓柱的軸的最短距離。(圖 22)

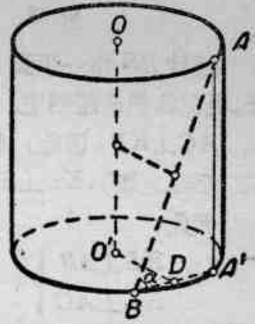

圖 22.

已知：角 $ABA'=\alpha$；$OA=R$。求 OO' 與 AB 之間的距離。所求的距離等於由 OO' 到三角形 ABA' 所在的平面的距離，據此，可以不作這距離而求 $O'D$。

$$A'B=2R\cot\alpha;\quad A'D=R\cot\alpha;$$

$$O'D=\sqrt{R^2-R^2\cot^2\alpha}=\frac{R\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$$

闡明問題條件的可能性。

5. 在一正四角柱內作由底面的一邊到與此邊不相交的對角線的最短距離(勒氏立體幾何學習題集 §7，第 26 題)。(圖 23)

求 BD' 和 CD 之間的距離。這一距離等於直線 CD 到平面 $AD'C'B$ 的距離，卽等於 $DL=CN$，其中 $DL\perp AD$；$CN\perp BC'$。

6. 一正四面體稜長等於 a，確定二不相交的稜之間的距離。(圖 24)

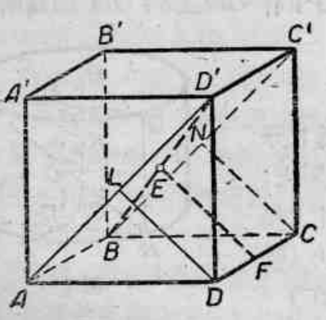

圖 23.

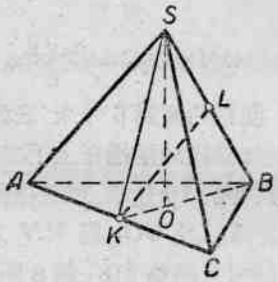

圖 24.

過稜 BS 作一平面 BSK，作高 SO 以及 $KL\perp SB$；KL 爲所求的距離。現在我們來證明它。

$AC\perp KB$；因此，$AC\perp SK$ (按照三垂線定理)，以及 $AC\perp KL$ (按照三垂線定理)；$KL\perp SB$ 爲所作。

因此，

$$\left.\begin{matrix}KL\perp SB\\ KL\perp AC\end{matrix}\right\},$$

這就是所需之證明。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com