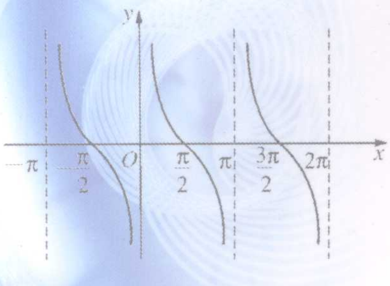
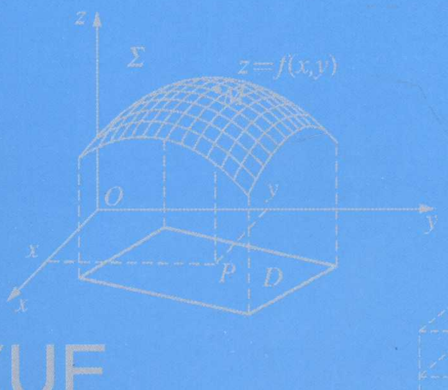
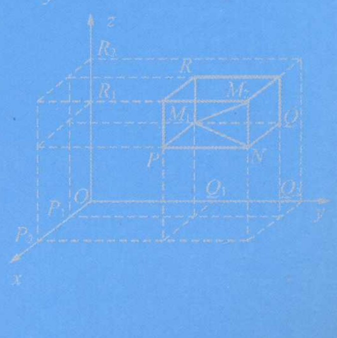
高等职业院校基础课规划教材



高等数学

主编 龚三琼 王海舟





GAODENG SHUXUE

南京大学出版社

高等职业院校基础课规划教材

高等数学

主　编　龚三琼　王海舟
主　审　赵银玉
副主编　郭　君　吴多康
编　著　陈　飞　仇丹红　刘　玮
徐丽丽　鲍信茹　郭　君
吴多康　王海舟　龚三琼

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 龚三琼，王海舟主编. —南京：南京大学出版社，2009.8

高等职业院校基础课规划教材

ISBN 978-7-305-06389-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①龚…②王… Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 143735 号

出 版 者 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路22号 邮 编 210093
网 址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左 健

丛 书 名 高等职业院校基础课规划教材
书 名 高等数学
主 编 龚三琼 王海舟
责任编辑 吴 汀 编辑热线 025-83686531
照 排 南京紫藤制版印务中心
印 刷 宜兴市文化印刷厂
开 本 787×1092 1/16 印张 21.25 字数 526 千
版 次 2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷
印 数 1~4000
ISBN 978-7-305-06389-3
定 价 36.00 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

前　言

为了适应我国高等职业教育迅速发展及多层次办学的需要，我们以教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为依据，以提高学生的综合素质为前提，按照“以应用为目的，以必需、够用为度”的教学原则，结合高职高专的特点，编写了本教材.

本教材在保证科学性的基础上，注意讲清概念，适度淡化深奥的数学理论，减少论证，使学生掌握基本概念、基本理论和计算技能，初步具备应用微积分方法解决实际问题的能力.

为使学生理解基本概念、基本数学思想，掌握其思维方法，必须强化学生对概念的思考与基本训练. 因此，对每一章节的重点内容和解题方法，采取边讲解边让学生“练一练”的方法；每章后的复习题采用阶梯式分程度设计，(A)组题为基础内容，突出基本概念和基本解题方法的训练，通过这些训练使学生掌握教材的基本内容，(B)组题为提高题，选自近年来专转本的考题(并在各题后附有年号)，以适应不同层次的教学需要；每章之后配备学习指导和自测题，以便于学生自学；同时为适应部分学生继续深造的需要，适当加深一些内容，加深的内容以“※”号标示，或放在每章的“知识拓展”这一部分.

本教材共分九章. 第一章为极限部分，第二、三、四、五章为一元函数微积分部分，第六章为常微分方程部分，第七章为空间解析几何与向量代数部分，第八章为多元函数微积分部分，第九章为级数部分.

在极限部分，采用描述性定义，从最简单的数列极限引入，类比地给出当$x\to+\infty$时函数的极限，从具体到抽象，让学生自然地接受函数的极限的概念，使学生对极限的思想和方法有初步认识；在一元函数微积分部分，讲述导数和积分时，尽可能选择简单的载体，略去一些繁杂的公式，以讲解数学方法为主；在常微分方程部分，主要介绍可分离变量的微分方程、一阶微分方程和二阶线性常系数微分方程及其解法；在空间解析几何与向量代数部分，通过建立直角坐标系讲述一些简单的曲面方程，旨在培养学生的空间概念，为多元函数的学习做准备；对于多元微积分，着重体现它是一元函数微积分在几何空间上的推广，讲清思想和基本概念，使学生掌握基本方法；在级数部分，通过学习，使学生对有限与无限、合成与分解的辩证关系有初步的了解，掌握一些有关的基本知识.

本教材从基本内容到全部内容参考学时为72至144学时，适用于高职高专理工科类专业.

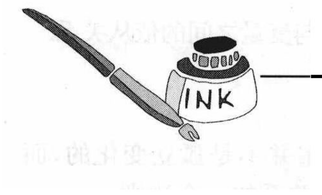
本教材由龚三琼(苏州高博软件技术职业学院)、王海舟(硅湖职业技术学院)任主编，郭君(硅湖职业技术学院)、吴多康(苏州高博软件技术职业学院)任副主编，按本书章节分工顺序，参加编写的有：陈飞(硅湖职业技术学院)、仇丹红(硅湖职业技术学院)、刘玮(硅湖职业技术学院)、徐丽丽(苏州高博软件技术职业学院)、鲍信茹(盐城师范学院)、郭君、吴多康、王海舟、龚三琼.全书的结构布局、统稿、定稿工作由龚三琼承担.

本教材由苏州高博软件技术职业学院基础部赵银玉教授主审，他提出了许多宝贵的改进意见，谨在此表示衷心的感谢！

由于水平有限，时间仓促，书中难免存在谬误之处，敬请广大读者不吝赐教！

编者
2009年6月

目 录



第一章

函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，也是微积分学中最基本的一个概念，是高等数学的主要研究对象，极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，连续则是函数的一个重要性质. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为微积分的学习奠定基础.

§1.1 函　　数

一、函数概念

1. 区间与邻域

把介于某两个实数之间的全体实数称为**区间**，这两个实数称为区间的端点，两端点间的距离称为区间的长度，区间包括有限区间和无限区间.

有限区间：设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

类似地，有闭区间和半开半闭区间：

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

无限区间：引入记号“$+\infty$”（读作“正无穷大”）及“$-\infty$”（读作“负无穷大”），并记 $[a,+\infty)=\{x|a\geqslant x\}$，$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$. 特别地，全体实数的集合 **R** 也可以表示为 $(-\infty,+\infty)$. 常用 I 来表示区间.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 为任一实数，以 a 为中心的任何一个开区间称为点 a 的一个**邻域**，记为 $U(a)$.

若开区间的端点到中心的距离为 δ，则称此邻域为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$. 将 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉的点集称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta，且\ x\neq a\}$.

2. 常量与变量

生活中存在着各种形式的量，有些量在研究的过程中保持不变，可用固定的数值来表示，这种量称为**常量**，常用字母 a,b,c 等表示；还有一些量在研究的过程中是变化着的，可以取不同的数值，这种量称为**变量**，常用字母 x,y,z,t 等表示.

需要指出的是，常量和变量都是相对的概念，同一个量在某个问题中是常量，而在另外的问题中则可能是变量.

初等数学主要研究常量，而高等数学主要研究变量，着重研究变量与变量之间的依从关系.

3. 函数的定义

在某一自然现象或社会现象中，常常会遇到许多变量，这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定的规律的，函数就是描述各种变量之间相互关系的一个法则.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则 f，总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$；$x\in D$.

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为这个函数的定义域，当 x 取遍 D 的各个数值时，对应函数值的全体组成的数集称为函数的值域，记为 $M=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

函数的两个要素是对应规则和定义域. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的. 如果不考虑所讨论函数的实际意义，它的定义域就是使解析式有意义的一切实数构成的集合.

【例 1.1.1】 确定函数 $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 该函数的定义域为满足不等式组 $\begin{cases}x\neq 0\\ 1-x^2\geqslant 0\end{cases}$ 的集合，解不等式组得

$$-1\leqslant x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq 0,$$

所以定义域为

$$D=[-1,0)\cup(0,1].$$

【练一练】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；(2) $y=\sqrt{x-4}$.

4. 函数的表示法

(1) **表格法** 把一系列自变量的值与对应的函数值列成表格的方法，例如平方表、三角函数表等，这就是函数的表格法.

(2) **图像法** 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法. 例如，图 1-1 是绝对值函数 $y=|x|$ 的图形.

(3) **公式法(解析法)** 自变量和因变量之间的关系用数学表达式来表示的方法.

需要指出的是，有时一个函数在其定义域的不同范围内具有不同的表达式，这样的函数称为**分段函数**.

例如，函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$ 是分段函数，其定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，如图 1-2 所示.

又如，符号函数 $y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 也是分段函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$，

如图 1－3 所示.

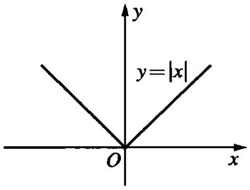


图 1－1

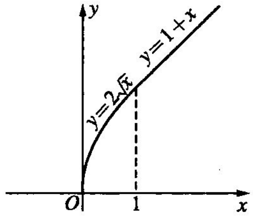


图 1－2

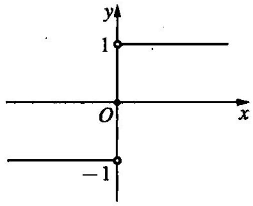


图 1－3

二、函数的基本性态

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**；若对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，奇函数的图形是关于原点对称的. 例如，函数 $y=\sin x$，$y=x^3$ 是奇函数，函数 $y=\cos x$，$y=x^2$ 是偶函数.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，如果对于区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加**（或**单调减少**）的，区间 I 称为**单调增区间**（或**单调减区间**）.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$内是单调减少的，在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的；函数 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在非零常数 T，使得对一切 $x\in D$，有 $T+x\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数，称 T 为 $f(x)$的周期. 周期函数的周期不唯一，通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的函数.

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若存在一个正数 $M>0$，使得对一切 $x\in D$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上有界，或称 $f(x)$是 I 上的有界函数，否则称 $f(x)$在 I 上无界. 每一个具有上述性质的 M，都是该函数的界，也即函数的界不是唯一的.

例如，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，因为对任何的实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $y=\tan x$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上有界，而在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$内无界.

三、反函数

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 对于 M 中的任意的 y 值，D 中有唯一的 x 值与之对应，使得 $y=f(x)$ 成立，于是得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数

$$x=f^{-1}(y),$$

称为 $y=f(x)$ 的**反函数**.

习惯上总是用 x 表示自变量，用 y 表示函数，因此往往把 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$，所以今后的反函数也记为 $y=f(x)$，$x\in M$.

从反函数的定义可以看出，函数的定义域恰好是反函数的值域，值域恰好是其反函数的定义域. 在同一坐标系下，函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

【例 1.1.2】 求函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{x}{1+x}$，解得 $x=\dfrac{y}{1-y}$，故反函数为：

$$y=\frac{x}{1-x},x\in(-\infty,1)\cup(1,\infty).$$

【练一练】 求函数 $y=\lg x+1$ 的反函数.

四、初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常数函数 $y=C$ (C 是常数).

(2) 幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 是常数).

(3) 指数函数 $y=a^{x}$($a>0,a\neq1,a$ 是常数).

高等数学里常用到以无理数 e 为底的指数函数：$y=e^{x}$($e=2.718281\cdots$).

(4) 对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq1,a$ 是常数).

当 $a=10$ 时，$y=\log_{10} x$，简记为 $y=\lg x$，称为常用对数.

当 $a=e$ 时，$y=\log_e x$，简记为 $y=\ln x$，称为自然对数.

(5) 三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 和余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 六种.

(6) 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 反正弦函数为 $y=\arcsin x$，反余弦函数为 $y=\arccos x$，反正切函数为 $y=\arctan x$，反余切函数为 $y=\text{arccot}\, x$.

这些函数的性质、图形在中学里已经学过，这里不再重复，对基本初等函数不熟悉的读者，可查阅附录一.

2. 复合函数

定义 1.3　设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，则 y 通过变量 u 的联系也成为 x 的函数，我们称 y 为 x 的**复合函数**，记为

$$y=f(\varphi(x)).$$

其中，f 称为外层函数，φ 称为内层函数，u 称为中间变量.

注意　不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的，$y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数，因为 $u=2+x^2$ 的值域 $[2,+\infty)$ 未包含在 $\arcsin u$ 定义域 $[-1,1]$ 内.

实际上，只要内层函数的值域与外层函数的定义域的交集不是空集，这两个函数就能复合. 例如，$y=\ln u$ 定义域为 $[0,+\infty)$，$u=4-x^2$ 的值域 $(-\infty,4]$，显然后者的值域并不包含在前者的定义域内，但二者的交集不是空集，我们可以将其复合，复合后的函数为 $y=\ln(4-x^2)$，定义域为 $(-2,2)$.

还可以把两个以上的函数复合起来，复合过程是由外层函数开始逐个带入的过程. 例如，由 $y=\ln u$，$u=2+v^2$ 和 $v=e^x$ 三个函数复合成函数 $y=\ln(2+e^{2x})$.

相对于复合函数，我们称由基本初等函数经过有限次四则运算所得到的函数为**简单函数**. 例如，$y=x^3+2x-7$，$y=e^x\cos x+\ln x$ 和 $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x}}$ 都是简单函数.

反过来，我们也可以将一个复合函数分解成若干个简单函数. 例如，函数 $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$ 可以分解为三个简单函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$ 和 $v=\dfrac{x}{2}$.

复合函数的概念非常重要，下面再举些例子.

【例 1.1.3】　设 $y=f(u)=\cos u$，$u=\varphi(x)=x^2+1$，求 $f(\varphi(x))$.

解　$f(\varphi(x))=\cos u=\cos(x^2+1)$.

【例 1.1.4】　把下列复合函数分解为若干个简单函数：

(1) $y=\sqrt{\ln\sin^2 x}$；　　(2) $y=e^{\arctan x^2}$.

解　(1) 所给函数由

$$y=\sqrt{u},\ u=\ln v,\ v=w^2,\ w=\sin x$$

四个函数复合而成；

(2) 所给函数由

$$y=e^u,\ u=\arctan v,\ v=x^2$$

三个函数复合而成.

【练一练】　分析下列复合函数的结构：

(1) $y=\arccos e^{-x}$；　　(2) $y=\tan\dfrac{2}{x}$；　　(3) $y=(1+\ln^2 x)^3$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成的，能用一个式子表示