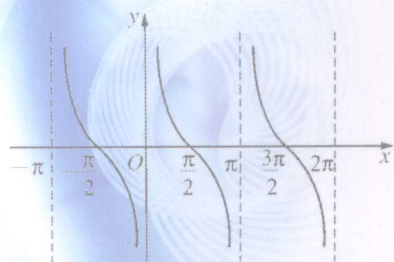
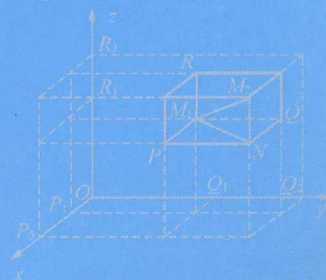
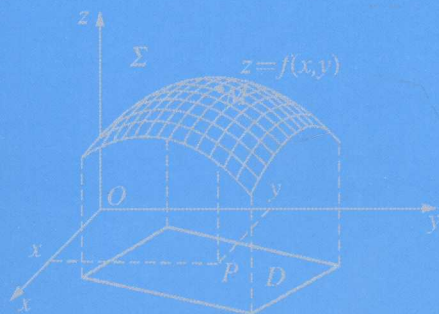


高等职业院校基础课规划教材



高等数学

● 主编 龚三琼 王海舟



GAODENG SHUXUE

南京大学出版社

高等职业院校基础课规划教材

高等数学

主 编	龚三琼	王海舟		
主 审	赵银玉			
副主编	郭 君	吴多康		
编 著	陈 飞	仇丹红	刘 玮	
	徐丽丽	鲍信茹	郭 君	
	吴多康	王海舟	龚三琼	

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 龚三琼, 王海舟主编. —南京: 南京大学出版社,
2009. 8

高等职业院校基础课规划教材

ISBN 978 - 7 - 305 - 06389 - 3

I. 高… II. ①龚…②王… III. 高等数学—高等学校:
技术学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 143735 号

出版者 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
网 址 <http://www.NjupCo.com>
出版人 左 健
丛 书 名 高等职业院校基础课规划教材
书 名 高等数学
主 编 龚三琼 王海舟
责任编辑 吴 汀 编辑热线 025 - 83686531
照 排 南京紫藤制版印务中心
印 刷 宜兴市文化印刷厂
开 本 787×1092 1/16 印张 21.25 字数 526 千
版 次 2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷
印 数 1~4000
ISBN 978 - 7 - 305 - 06389 - 3
定 价 36.00 元

发行热线 025 - 83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

-
- * 版权所有, 侵权必究
 - * 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购
图书销售部门联系调换

前 言

为了适应我国高等职业教育迅速发展及多层次办学的需要,我们以教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为依据,以提高学生的综合素质为前提,按照“以应用为目的,以必需、够用为度”的教学原则,结合高职高专的特点,编写了本教材。

本教材在保证科学性的基础上,注意讲清概念,适度淡化深奥的数学理论,减少论证,使学生掌握基本概念、基本理论和计算技能,初步具备应用微积分方法解决实际问题的能力。

为使学生理解基本概念、基本数学思想,掌握其思维方法,必须强化学生对概念的思考与基本训练。因此,对每一章节的重点内容和解题方法,采取边讲解边让学生“练一练”的方法;每章后的复习题采用阶梯式分程度设计,(A)组题为基础内容,突出基本概念和基本解题方法的训练,通过这些训练使学生掌握教材的基本内容,(B)组题为提高题,选自近年来专转本的考题(并在各题后附有年号),以适应不同层次的教学需要;每章之后配备学习指导和自测题,以便于学生自学;同时为适应部分学生继续深造的需要,适当加深一些内容,加深的內容以“※”号标示,或放在每章的“知识拓展”这一部分。

本教材共分九章。第一章为极限部分,第二、三、四、五章为一元函数微积分部分,第六章为常微分方程部分,第七章为空间解析几何与向量代数部分,第八章为多元函数微积分部分,第九章为级数部分。

在极限部分,采用描述性定义,从最简单的数列极限引入,类比地给出当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数的极限,从具体到抽象,让学生自然地接受函数的极限的概念,使学生对极限的思想和方法有初步认识;在一元函数微积分部分,讲述导数和积分时,尽可能选择简单的载体,略去一些繁杂的公式,以讲解数学方法为主;在常微分方程部分,主要介绍可分离变量的微分方程、一阶微分方程和二阶线性常系数微分方程及其解法;在空间解析几何与向量代数部分,通过建立直角坐标系讲述一些简单的曲面方程,旨在培养学生的空间概念,为多元函数的学习做准备;对于多元微积分,着重体现它是一元函数微积分在几何空间上的推广,讲清思想和基本概念,使学生掌握基本方法;在级数部分,通过学习,使学生对有限与无限、合成与分解的辩证关系有初步的了解,掌握一些有关的基本知识。

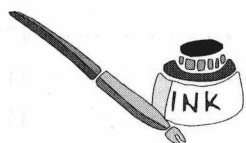
本教材从基本内容到全部内容参考学时为 72 至 144 学时,适用于高职高专理工科类专业。

本教材由龚三琼(苏州高博软件技术职业学院)、王海舟(硅湖职业技术学院)任主编,郭君(硅湖职业技术学院)、吴多康(苏州高博软件技术职业学院)任副主编,按本书章节分工顺序,参加编写的有:陈飞(硅湖职业技术学院)、仇丹红(硅湖职业技术学院)、刘玮(硅湖职业技术学院)、徐丽丽(苏州高博软件技术职业学院)、鲍信茹(盐城师范学院)、郭君、吴多康、王海舟、龚三琼。全书的结构布局、统稿、定稿工作由龚三琼承担。

本教材由苏州高博软件技术职业学院基础部赵银玉教授主审,他提出了许多宝贵的改进意见,谨在此表示衷心的感谢!

由于水平有限,时间仓促,书中难免存在谬误之处,敬请广大读者不吝赐教!

编者
2009 年 6 月



目 录

第一章 函数、极限与连续	1
§ 1.1 函数	1
一、函数概念	1
二、函数的基本性态	3
三、反函数	4
四、初等函数	4
习题 1.1	6
§ 1.2 极限概念	7
一、数列的极限	7
二、函数的极限	8
三、无穷小与无穷大的概念	10
习题 1.2	12
§ 1.3 极限运算	13
一、极限运算法则	13
二、两个重要极限	14
三、无穷小的比较	16
习题 1.3	18
§ 1.4 函数的连续性	19
一、函数的连续性	19
二、间断点及其分类	20
三、初等函数的连续性	21
四、闭区间上连续函数的性质	22
习题 1.4	23
知识拓展: 常见经济函数的介绍	24
学习指导	26
复习题一	29
自测题一	32
第二章 导数与微分	34
§ 2.1 导数概念	34
一、引例	34



二、导数的概念	35
三、导数的几何意义	39
四、可导与连续的关系	40
习题 2.1	41
§ 2.2 求导法则	41
一、导数的四则运算法则	41
二、反函数的求导法则	42
三、复合函数的求导法则	43
四、隐函数求导法	44
五、基本初等函数的求导公式	46
* 六、参数方程所表示函数的导数	46
习题 2.2	47
§ 2.3 高阶导数	48
习题 2.3	49
§ 2.4 函数的微分	50
一、微分的定义	50
二、微分的几何意义	51
三、微分公式与运算法则	52
四、微分形式不变性	52
习题 2.4	53
知识拓展:微分在近似计算中的应用	53
学习指导	55
复习题二	59
自测题二	62
第三章 导数的应用	64
§ 3.1 洛必达法则	64
一、“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式	64
二、其他类型极限求法	67
习题 3.1	67
§ 3.2 函数的单调性和极值	68
一、函数的单调性	68
二、函数的极值	70
三、最大值与最小值问题	72
习题 3.2	72
§ 3.3 曲线的凹凸性与拐点	73
习题 3.3	74
§ 3.4 函数作图	75



一、曲线的渐近线	75
二、函数图形的描绘	76
习题 3.4	77
知识拓展:微分中值定理	77
学习指导	79
复习题三	83
自测题三	85
 第四章 不定积分	87
§ 4.1 不定积分的概念与性质	87
一、原函数与不定积分的概念	87
二、不定积分的几何意义	88
三、不定积分的性质	89
四、基本积分公式	89
五、直接积分法	90
习题 4.1	91
§ 4.2 换元积分法	91
一、第一类换元积分法(凑微分法)	91
二、第二类换元积分法	94
习题 4.2	97
§ 4.3 分部积分法	98
习题 4.3	101
知识拓展:几种特殊类型函数的积分	101
学习指导	107
复习题四	113
自测题四	115
 第五章 定积分及其应用	118
§ 5.1 定积分的概念与性质	118
一、引例	118
二、定积分的定义	120
三、定积分的几何意义	121
四、定积分的性质	122
习题 5.1	124
§ 5.2 定积分的计算	125
一、牛顿-莱布尼兹公式	125
二、定积分的换元积分法	126
三、定积分的分部积分法	128
习题 5.2	129



§ 5.3 定积分的几何应用	129
一、微元法简介	129
二、平面图形的面积	130
三、旋转体体积	132
习题 5.3	134
§ 5.4 无穷区间上的广义积分	134
一、无穷区间上的广义积分	134
* 二、无界函数的广义积分	135
习题 5.4	136
知识拓展: 积分上限的函数及其导数	137
学习指导	139
复习题五	143
自测题五	146
第六章 常微分方程	148
§ 6.1 微分方程的基本概念	148
习题 6.1	150
§ 6.2 一阶微分方程	150
一、可分离变量的微分方程	151
二、齐次方程	152
三、一阶线性微分方程	154
习题 6.2	157
§ 6.3 二阶常系数线性微分方程	157
一、线性微分方程解的结构	157
二、二阶常系数线性齐次微分方程	158
三、二阶常系数线性非齐次微分方程	161
习题 6.3	164
知识拓展: 可降阶的二阶微分方程 伯努利方程	165
学习指导	167
复习题六	172
自测题六	174
第七章 空间解析几何及向量代数	176
§ 7.1 空间直角坐标系	176
一、空间点的坐标	176
二、空间两点间的距离	177
习题 7.1	178
§ 7.2 空间向量	178
一、向量的概念	178



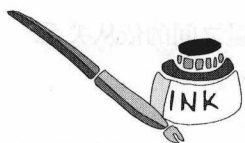
二、向量的加减法与向量的数乘	179
三、向量的坐标表示	180
四、向量的数量积	182
五、向量的向量积	184
习题 7.2	186
§ 7.3 平面及其方程	186
一、平面方程	186
二、平面之间的关系	189
习题 7.3	190
§ 7.4 空间直线及其方程	190
一、直线方程	190
二、两直线的夹角	192
三、直线与平面的夹角	192
习题 7.4	193
知识拓展:空间曲面与空间曲线	193
学习指导	200
复习题七	205
自测题七	207
 第八章 多元函数微积分学	 210
§ 8.1 多元函数的基本概念	210
一、多元函数概念	210
*二、二元函数的几何意义	212
三、二元函数的极限	212
四、二元函数的连续性	213
习题 8.1	214
§ 8.2 偏导数	215
一、偏导数的定义及其算法	215
二、高阶偏导数	217
习题 8.2	218
§ 8.3 全微分	218
一、全微分的定义	218
二、全微分的算法	219
习题 8.3	220
§ 8.4 多元复合函数和隐函数的求导法	220
一、多元复合函数的求导法	220
二、隐函数的求导法	222
习题 8.4	224
§ 8.5 多元函数的极值及其求法	224



一、二元函数的极值	225
二、最大值与最小值问题	226
三、条件极值	227
习题 8.5	228
§ 8.6 二重积分的概念与性质	228
一、二重积分的概念	228
二、二重积分的性质	231
习题 8.6	232
§ 8.7 二重积分的计算	232
一、利用直角坐标计算二重积分	232
* 二、利用极坐标计算二重积分	236
习题 8.7	238
知识拓展:简单经济问题中的最大值、最小值求法	239
学习指导	240
复习题八	248
自测题八	251
第九章 无穷级数	253
§ 9.1 常数项级数的概念与性质	253
一、常数项级数的概念	253
二、常数项级数的性质	256
三、级数收敛的必要条件	256
习题 9.1	257
§ 9.2 常数项级数的审敛法	258
一、正项级数及其审敛法	258
二、交错级数及其审敛法	261
三、任意项级数的绝对收敛与条件收敛	262
习题 9.2	263
§ 9.3 幂级数	263
一、函数项级数的一般概念	263
二、幂级数及其收敛域的求法	264
* 三、幂级数的运算	266
习题 9.3	268
§ 9.4 函数展开成幂级数	269
一、泰勒级数	269
二、函数展开成幂级数	270
习题 9.4	273
知识拓展:根值判别法	274
学习指导	275



复习题九.....	286
自测题九.....	289
附录一 基本初等函数的图形及其主要性质.....	291
附录二 常用数学公式.....	294
附录三 希腊字母表.....	299
附录四 常用人名表.....	300
参考答案.....	302
参考文献.....	325



第一章

函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一,也是微积分学中最基本的一个概念,是高等数学的主要研究对象,极限概念是微积分的理论基础,极限方法是微积分的基本分析方法,连续则是函数的一个重要性质.本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法,为微积分的学习奠定基础.

§ 1.1 函 数

一、函数概念

1. 区间与邻域

把介于某两个实数之间的全体实数称为区间,这两个实数称为区间的端点,两端点间的距离称为区间的长度,区间包括有限区间和无限区间.

有限区间: 设 a, b 为两个实数,且 $a < b$, 数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间,记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

类似地,有闭区间和半开半闭区间:

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}, [a, b) = \{x | a \leq x < b\}, (a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

无限区间: 引入记号“ $+\infty$ ”(读作“正无穷大”)及“ $-\infty$ ”(读作“负无穷大”),并记 $[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}$, $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$. 特别地,全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可以表示为 $(-\infty, +\infty)$. 常用 I 来表示区间.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 为任一实数,以 a 为中心的任何一个开区间称为点 a 的一个邻域,记为 $U(a)$.

若开区间的端点到中心的距离为 δ ,则称此邻域为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a, \delta)$, 即 $U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$. 将 $U(a, \delta)$ 的中心 a 去掉的点集称为点 a 的去心 δ 邻域,记为 $\dot{U}(a, \delta)$, 即 $\dot{U}(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta, \text{ 且 } x \neq a\}$.

2. 常量与变量

生活中存在着各种形式的量,有些量在研究的过程中保持不变,可用固定的数值来表示,这种量称为**常量**,常用字母 a, b, c 等表示;还有一些量在研究的过程中是变化着的,可以取不同的数值,这种量称为**变量**,常用字母 x, y, z, t 等表示.



需要指出的是,常量和变量都是相对的概念,同一个量在某个问题中是常量,而在另外的问题中则可能是变量.

初等数学主要研究常量,而高等数学主要研究变量,着重研究变量与变量之间的依从关系.

3. 函数的定义

在某一自然现象或社会现象中,常常会遇到许多变量,这些变量并不是孤立变化的,而是相互联系并遵循一定的规律的,函数就是描述各种变量之间相互关系的一个法则.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则 f , 总有唯一确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y=f(x); x \in D$.

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, 数集 D 称为这个函数的定义域, 当 x 取遍 D 的各个数值时, 对应函数值的全体组成的数集称为函数的值域, 记为 $M=\{y|y=f(x), x \in D\}$.

函数的两个要素是对应规则和定义域. 在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的. 如果不考虑所讨论函数的实际意义, 它的定义域就是使解析式有意义的一切实数构成的集合.

【例 1.1.1】 确定函数 $y=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 该函数的定义域为满足不等式组 $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases}$ 的集合, 解不等式组得

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ 且 } x \neq 0,$$

所以定义域为

$$D=[-1,0) \cup (0,1].$$



【练一练】 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}$; (2) $y=\sqrt{x-4}$.

4. 函数的表示法

(1) **表格法** 把一系列自变量的值与对应的函数值列成表格的方法, 例如平方表、三角函数表等, 这就是函数的表格法.

(2) **图像法** 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法. 例如, 图 1-1 是绝对值函数 $y=|x|$ 的图形.

(3) **公式法(解析法)** 自变量和因变量之间的关系用数学表达式来表示的方法.

需要指出的是, 有时一个函数在其定义域的不同范围内具有不同的表达式, 这样的函数称为分段函数.

例如, 函数 $y=\begin{cases} 2\sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x & x > 1 \end{cases}$ 是分段函数, 其定义域为 $[0, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$, 如图 1-2 所示.

又如, 符号函数 $y=\begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 也是分段函数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{-1, 0, 1\}$,



如图 1-3 所示.

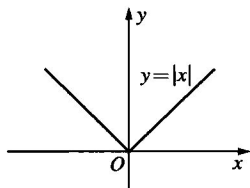


图 1-1

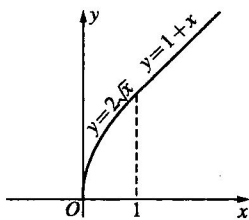


图 1-2

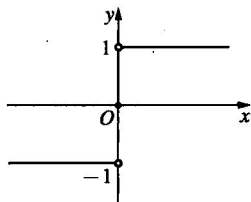


图 1-3

二、函数的基本性态

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若对任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的, 奇函数的图形是关于原点对称的. 例如, 函数 $y = \sin x$, $y = x^3$ 是奇函数, 函数 $y = \cos x$, $y = x^2$ 是偶函数.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于区间 I 上的任意两点 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$) 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加 (或单调减少) 的, 区间 I 称为单调增区间 (或单调减区间).

例如, 函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的, 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的; 函数 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在非零常数 T , 使得对一切 $x \in D$, 有 $T+x \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 称 T 为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期不唯一, 通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期.

例如, $y = \sin x$, $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的函数, $y = \tan x$, $y = \cot x$ 是以 π 为周期的函数.

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若存在一个正数 $M > 0$, 使得对一切 $x \in D$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界, 或称 $f(x)$ 是 I 上的有界函数, 否则称 $f(x)$ 在 I 上无界. 每一个具有上述性质的 M , 都是该函数的界, 也即函数的界不是唯一的.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 因为对任何的实数 x , 恒有 $|\sin x| \leq 1$. 函数 $y = \tan x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上有界, 而在区间 $[0, \frac{\pi}{2})$ 内无界.



三、反函数

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 M . 对于 M 中的任意的 y 值, D 中有唯一的 x 值与之对应, 使得 $y=f(x)$ 成立, 于是得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量、 x 为因变量的新函数

$$x=f^{-1}(y),$$

称为 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上总是用 x 表示自变量, 用 y 表示函数, 因此往往把 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$, 所以今后的反函数也记为 $y=f^{-1}(x), x \in M$.

从反函数的定义可以看出, 函数的定义域恰好是反函数的值域, 值域恰好是其反函数的定义域. 在同一坐标系下, 函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

【例 1.1.2】 求函数 $y=\frac{x}{1+x}$ 的反函数.

解 由 $y=\frac{x}{1+x}$, 解得 $x=\frac{y}{1-y}$, 故反函数为:

$$y=\frac{x}{1-x}, x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$



【练一练】 求函数 $y=\lg x+1$ 的反函数.

四、初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常数函数 $y=C$ (C 是常数).

(2) 幂函数 $y=x^\mu$ (μ 是常数).

(3) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a \neq 1, a$ 是常数).

高等数学里常用到以无理数 e 为底的指数函数: $y=e^x$ ($e=2.718281\cdots$).

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1, a$ 是常数).

当 $a=10$ 时, $y=\log_{10} x$, 简记为 $y=\lg x$, 称为常用对数.

当 $a=e$ 时, $y=\log_e x$, 简记为 $y=\ln x$, 称为自然对数.

(5) 三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$ 、余弦函数 $y=\cos x$ 、正切函数 $y=\tan x$ 、余切函数 $y=\cot x$ 、正割函数 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ 和余割函数 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$ 六种.

(6) 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 反正弦函数为 $y=\arcsin x$, 反余弦函数为 $y=\arccos x$, 反正切函数为 $y=\arctan x$, 反余切函数为 $y=\text{arccot } x$.

这些函数的性质、图形在中学里已经学过, 这里不再重复, 对基本初等函数不熟悉的读者, 可查阅附录一.



2. 复合函数

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, 且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内, 则 y 通过变量 u 的联系也成为 x 的函数, 我们称 y 为 x 的复合函数, 记为

$$y=f(\varphi(x)).$$

其中, f 称为外层函数, φ 称为内层函数, u 称为中间变量.

注意 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的, $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数, 因为 $u=2+x^2$ 的值域 $[2, +\infty)$ 未包含在 $\arcsin u$ 定义域 $[-1, 1]$ 内.

实际上, 只要内层函数的值域与外层函数的定义域的交集不是空集, 这两个函数就能复合. 例如, $y=\ln u$ 定义域为 $[0, +\infty)$, $u=4-x^2$ 的值域 $(-\infty, 4]$, 显然后者的值域并不包含在前者的定义域内, 但二者的交集不是空集, 我们可以将其复合, 复合后的函数为 $y=\ln(4-x^2)$, 定义域为 $(-2, 2)$.

还可以把两个以上的函数复合起来, 复合过程是由外层函数开始逐个带入的过程. 例如, 由 $y=\ln u$, $u=2+v^2$ 和 $v=e^x$ 三个函数复合成函数 $y=\ln(2+e^{2x})$.

相对于复合函数, 我们称由基本初等函数经过有限次四则运算所得到的函数为简单函数. 例如, $y=x^3+2x-7$, $y=e^x \cos x + \ln x$ 和 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{x}}$ 都是简单函数.

反过来, 我们也可以将一个复合函数分解成若干个简单函数. 例如, 函数 $y=\sqrt{\cot \frac{x}{2}}$ 可以分解为三个简单函数 $y=\sqrt{u}$, $u=\cot v$ 和 $v=\frac{x}{2}$.

复合函数的概念非常重要, 下面再举些例子.

【例 1.1.3】 设 $y=f(u)=\cos u$, $u=\varphi(x)=x^2+1$, 求 $f(\varphi(x))$.

解 $f(\varphi(x))=\cos u=\cos(x^2+1)$.

【例 1.1.4】 把下列复合函数分解为若干个简单函数:

(1) $y=\sqrt{\ln \sin^2 x}$; (2) $y=e^{\arctan x^2}$.

解 (1) 所给函数由

$$y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=w^2, w=\sin x$$

四个函数复合而成;

(2) 所给函数由

$$y=e^u, u=\arctan v, v=x^2$$

三个函数复合而成.



【练一练】 分析下列复合函数的结构:

(1) $y=\arccos e^{-x}$; (2) $y=\tan \frac{2}{x}$; (3) $y=(1+\ln^2 x)^3$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成的, 能用一个式子表示