普通高等学校规划教材

高等数学（第2版）

Advanced Mathematics

下册

主编◎许洪范

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等学校规划教材

高 等 数 学

（第 2 版）

下 册

主　编　许洪范
副主编　袁德有　符俊超　李瑞阁
陈绍东　杜书德　连冬艳

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书是根据高校工科高等数学课程教学基本要求的精神并结合普通院校的教学实际编写而成的.全书分上、下两册.上册包括函数极限、一元函数微积分和微分方程,下册包括空间解析几何、多元函数微积分、级数和 Matlab 软件在微积分中应用.书中概念和定理多有几何解释与物理原型,全书理论完整且浅显简明,兼顾知识的系统性和实用性,对于不同层次的学生都具有可读性.

本书作为应用型本科院校理工类专业的高等数学教材,也适用于师范院校的非数学理科专业.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/许洪范主编.—2版.—北京:国防工业出版社,2009.7

普通高等学校规划教材

ISBN 978-7-118-06259-5

Ⅰ.高… Ⅱ.许… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 037906 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

鑫马印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 14¼ **字数** 322 千字

2009 年 7 月第 2 版第 1 次印刷 **印数**:1—5000 册 **总定价**:49.00 元 上册 25.00 元 下册 24.00 元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　言

本书主要包括一元函数微积分、常微分方程、空间解析几何、多元函数微积分和级数等基本内容，是为普通本科院校理工类专业编写的高等数学教材，适用于师范院校理科的非数学专业.

高等数学是关于运动和变化的数学，它倾注了几代数学巨匠的心血，是人类智慧的伟大成就. 就其中具体内容而言，极限的基本原理、微分中值定理、牛顿—莱布尼茨公式以及微分方程和级数的内容都是经典数学理论；“ε-δ”形式极限定义、函数变化率$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$等基本知识引导读者感悟有限和无穷的关联，完成初等数学到高等数学的跨越；微元法用简明的形式取代“分割、代替、做和、取极限”这一精细的数学过程，它是定积分思想的极好注解；级数理论体现传统的无限求和理论与现代函数逼近思想，从特殊到一般，张弛有度；微积分的发现始于对几何学、物理学的研究；解析几何部分是空间形态对应数量关系的桥梁；曲线积分和曲面积分有着明确的物理原型；微分方程的知识则几乎应用于自然科学和社会科学的所有领域. 总之，高等数学的内容和思想方法是理工类各专业学习的重要基础.

另一方面，学习高等数学的意义还在于培养学生缜密的逻辑思维能力、科学的创新精神和严谨务实的专业态度. 高等数学的原理和方法将被自觉不自觉地运用于专业课程的学习，这是任何其它课程所难以替代的. 无需回答学习微积分能够解决哪些具体问题，不妨反问：现代科学或技术的哪一个学科与高等数学无关？

随着科学技术的进步和数学自身的发展，公共数学课程的内容结构和教学目标也在不断地进行相应的调整. 特别是计算技术的惊人进步和计算机的迅速普及，使很多数学工作者在不定积分等方面的精湛运算技能相形见绌. 高等数学的教学应该兼顾计算技术的进步，也要充分利用现代教学媒体，以便让数学理论更精辟、运算更简明、应用更方便. 把繁琐的计算交给计算机，可以为学生留下更多思考和创新的时空.

现阶段，我国高等教育的重心正经历着从精英教育向大众化教育转移的过程，培养高素质、多层次应用型人才已成为现实的课题. 2001 年 11 月，全国高等学校教学研究中心启动“21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题，有数十所院校参加了研究工作. 此项目的研究本着“厚基础、宽口径”和注重实际应用的基本原则，积极稳妥地推进着数学教学内容和教学方法的改革. 在此书编写过程中，我们针对培养高层次复合应用型人才的需要和理工类本科教育的一般要求，注重了知识的系统性、思想性与通用性，精减了理论证明过程，适当地侧重了基础运算和数学模型观念的建立.

本书注重引入概念的数量和精确性,各知识点新概念的引入力求清晰简明. 例如,函数的各类极限、连续、微分、各种积分和级数等重要概念在章节的开始以定义形式明确地给出;曲线的单调与光滑、切线和面积等概念一般对照几何模型作描述性定义并以黑体字体现,避免过多引入次要的概念;在给出基本概念时,适当做了几何解释或者介绍其物理原型,以加强对概念的理解.

书中的主要概念与定理、性质和运算法则共同构成各部分的知识系统. 高等数学中有一些重要定理,例如,柯西收敛准则、单调有界原理、闭区间上连续函数性质以及微分和积分中几个重要定理,反映了最基本的数学规律,但难于在本书中完整证明. 对这些定理本书明确给出结论,并直观解释其原理或进行部分证明. 书中更多的定理和推论一般根据基本概念和已有的定理便可证明,这些定理的证明虽然演绎着高等数学的基本思想和原理,但为了适应本书的既定任务,书中仍然尽量控制定理的数量和难度. 各种运算的主要性质是运算和应用的依据,书中逐一给出并做了简单的证明或说明,在表述形式和次序方面进行了有利于比照的编排. 高等数学中几乎所有的运算都具有线性的特征,各类积分关于积分区域可加. 在本课程学习的过程中,应该认真领会概念的几何模型或物理背景,也要注意思考不同运算规律的相互关联.

众所周知,只有被确信正确的知识才容易被接受. 书中对基本初等函数的导数、各种基本运算的法则都做了比较完整的推导和证明. 其实,这些证明并不超出学生的接受水平. 对极限的"ε-δ"形式证明和不定积分法,细致介绍了其基本原理和方法但不作过多的训练. 为回避偏难的问题,书中明显减少了不定积分的篇幅.

作为运算训练的补充,第 14 章介绍了 Matlab 在微积分中的应用. Matlab 程序功能强大,它不但可以在一定程度上替代繁杂的手工运算,而且在科学研究和工程技术等方面应用广泛,越来越受到科技工作者和高校教师的青睐. 更值得一提的是 Matlab 入门简单,运行界面有利于操作,建议读者在学习本书的过程中随时阅读第 14 章的部分内容,相信多数学生初步掌握 Matlab 并不存在太大的困难,而那些特定题目的计算机实验对理解高等数学的概念和方法是非常有利的.

书中例题和习题的编排主要针对基础知识和基本的运算能力,兼顾了不同的知识点和不同的难度水平,并减少了需要特殊技巧才能解决的例题和习题.

根据 2009 年全国招收硕士研究生"高等数学(一)"的考试大纲要求,本书在第 2 版增加了"曲率"和"一阶差分方程"的简明知识。对于有志于报考硕士研究生的同学来说,本书在知识点和思想方法等方面是没有缺陷的。作为知识梳理和综合性训练的补充,建议在熟悉本书基础知识之后,增加阅读许洪范编著的《考研微积分 500 例》. 该书涵盖了考研数学中微积分的全部类型问题,对于提高应试能力是非常有益的.

本书由许洪范任主编,袁德有编写第 1 章和第 2 章;王剑英编写第 3 章;王满编写第 4 章和第 14 章;杜书德编写第 6 章和第 7 章;柳静编写第 8 章;连冬艳编写第 9 章;陈绍东编写第 10 章;宋亮编写第 11 章;符俊超编写第 12 章;李瑞阁编写第 13 章;许洪范编写第 5 章,并撰写附录等内容,同时承担全书的统稿工作. 全书理论叙述简明、完整,注重从应

用问题引入概念,对于不同层次的学生具有可读性.

高等数学课程一般安排在第一学期和第二学期进行,因此在内容顺序安排时,适当考虑了专业课教学的实际需要.全书教学大约需要 180 课时.教师在实际教学过程中可以根据不同专业的需要对教学内容进行有限的取舍.书中疏漏和不妥之处,欢迎读者指正.

编　者

2009 年 1 月

目　　录

第 9 章 向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，借助于坐标系建立了平面上的每一个点与二元有序数组（平面点的坐标）之间的一一对应关系，从而可以利用代数的方法研究几何问题. 这一章里我们将用同样的方法，借助于空间直角坐标系，建立空间中的每一个点与三元有序数组（空间点的坐标）之间的一一对应关系，利用空间点的坐标来研究几何问题. 空间解析几何是平面解析几何的推广，学习这部分内容时，应该注意与平面解析几何进行比较.

9.1 向量及其坐标表示

向量是数学基础理论的重要组成部分. 以下首先介绍空间直角坐标系，在此基础上，建立空间向量与三元有序数组（向量的坐标）之间的一一对应关系，进而借助于坐标研究向量.

9.1.1 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

在一个平面内作具有公共原点且相互垂直的两条数轴 Ox 和 Oy，就构成了平面直角坐标系 Oxy. 建立了直角坐标系的平面称为坐标平面（见图 9-1）. 过平面直角坐标系 Oxy 的坐标原点 O 作一垂直于 Oxy 平面的数轴 Oz（见图 9-2）. 这样，具有公共原点两两垂直的三条数轴 Ox、Oy、Oz 就构成一空间直角坐标系 $Oxyz$. O 点仍称为坐标原点，Ox、Oy、Oz 分别称为横轴（x 轴）、纵轴（y 轴）和竖轴（z 轴），统称为坐标轴.

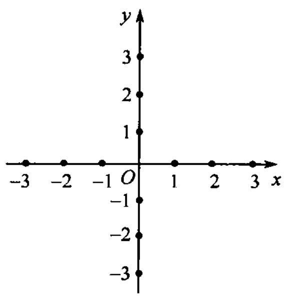


图 9-1

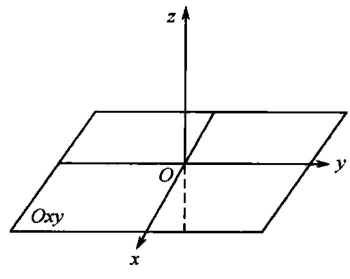


图 9-2

图 9-2 所示的空间直角坐标系 $Oxyz$ 称为右手坐标系，简称右手系. 如果使右手拇指、食指、中指两两成直角，则三指的指向依次为 x 轴、y 轴、z 轴的正向. 若换用左手用相同的方法确定 x 轴、y 轴、z 轴正向，则所建立的坐标系称为左手系. 本书中，一律采用右手系.

空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的每两条坐标轴可以确定一个平面，称为坐标平面. x 轴和

y 轴确定的坐标平面称为 Oxy 平面，y 轴和 z 轴确定的坐标平面称为 Oyz 平面，z 轴和 x 轴确定的坐标平面称为 Ozx 平面.

如图 9-3 所示，三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦限. 分别称为第 Ⅰ 卦限、第 Ⅱ 卦限、…、第 Ⅷ 卦限.

如图 9-4 所示，设 M 是空间任一点，过 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，与三坐标轴分别交于 P、Q 和 R 点. 点 P、Q 和 R 分别叫做点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影. 设 P、Q 和 R 点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别为 x、y 和 z. 这样，空间中的任何一点，都唯一地确定了一个三元有序数组 (x,y,z). 反之，对于任意三元有序数组 (x,y,z)，过 x 轴上坐标为 x 的点 P 作 x 轴的垂直平面，过 y 轴上坐标为 y 的点 Q 作 y 轴的垂直平面，过 z 轴上坐标为 z 的点 R 作 z 轴的垂直平面，这三个平面相交于唯一一点 M，即三元有序数组 (x,y,z) 也唯一地确定空间一个点 M. 由此可知，建立了空间直角坐标系以后，空间中的点与三元有序数组之间具有着一一对应的关系. 这样的有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标，其中，x、y 和 z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 点 M 记为 $M(x,y,z)$. 显然，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$.

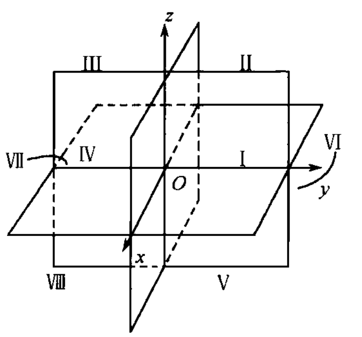


图 9-3

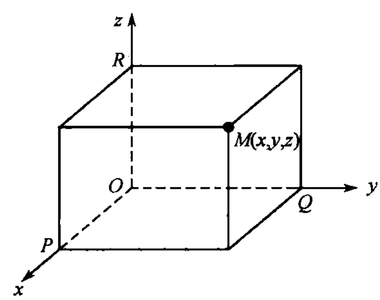


图 9-4

要在空间直角坐标系中描出点 $M(x,y,z)$ 的位置，可以先过 x 轴上坐标为 x 的点 P 作 y 轴的平行线，过 y 轴上坐标为 y 的点 Q 作 x 轴的平行线，这两条直线交于某点 M_1；连接 OM_1，再过 M_1 作 z 轴的平行线，过 z 轴上坐标为 z 的点 R 作 OM_1 的平行线，这两条直线交于点 M，M 点就是坐标为 (x,y,z) 的点（见图 9-5）.

例如，图 9-6 和图 9-7 描出了点 $N_1(2,3,0)$、点 $M_1(2,3,-3)$ 和点 $M_2(3,-4,2)$.

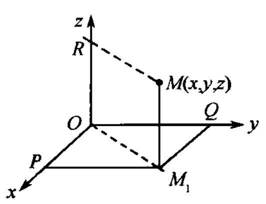


图 9-5

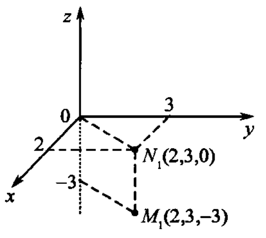


图 9-6

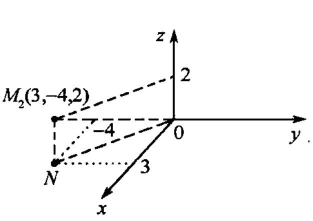


图 9-7

在空间直角坐标系中，各坐标轴上点的坐标见表 9-1.

表 9-1

坐标轴	x 轴	y 轴	z 轴
坐标	$(x,0,0)$	$(0,y,0)$	$(0,0,z)$

各坐标面上点的坐标见表 9-2.

表 9-2

坐标面	Oxy 面	Oyz 面	Oxz 面
坐标	$(x,y,0)$	$(0,y,z)$	$(x,0,z)$

位于不同的卦限中的点,其坐标的正负号见表 9-3.

表 9-3

卦限	点的坐标正负号	卦限	点的坐标正负号
Ⅰ	(+,+,+)	Ⅴ	(+,+,−)
Ⅱ	(−,+,+)	Ⅵ	(−,+,−)
Ⅲ	(−,−,+)	Ⅶ	(−,−,−)
Ⅳ	(+,−,+)	Ⅷ	(+,−,−)

2. 空间两点间的距离

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间任意两点,过 P_1、P_2 分别作 Oxy 面的垂线 P_1Q_1、P_2Q_2,与 Oxy 面分别交于点 Q_1、Q_2. 显然,在平面直角坐标系 Oxy 中,点 Q_1、Q_2 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2),由平面上两点距离公式得

$$|Q_1Q_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

连接 P_1P_2,Q_1Q_2,过点 P_1 作 Q_1Q_2 的平行线与 P_2Q_2 交于点 M(见图 9-8),在直角三角形 $\triangle P_1MP_2$ 中

$$|P_1P_2|^2=|P_1M|^2+|P_2M|^2,$$

其中

$$|P_1M|=|Q_1Q_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},\ |P_2M|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$|P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

于是得空间两点 P_1、P_2 的距离公式

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{9-1}$$

显然,点 $M(x,y,z)$ 到原点 O 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{9-2}$$

从图 9-9 中看出,点 $M(x,y,z)$ 到 Oxy 面、Oyz 面和 Ozx 面的距离分别为 $|z|$、$|x|$ 和 $|y|$. 点 $M(x,y,z)$ 到 x 轴、y 轴和 z 轴的距离分别为 $\sqrt{y^2+z^2}$、$\sqrt{x^2+z^2}$ 和 $\sqrt{x^2+y^2}$.

例 9.1.1 设有 x 轴、y 轴和 z 轴上的点 $A(a,0,0)$、$B(0,a,0)$ 和 $C(0,0,a)$ $(a\neq 0)$,如图 9-10 所示. 证明 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

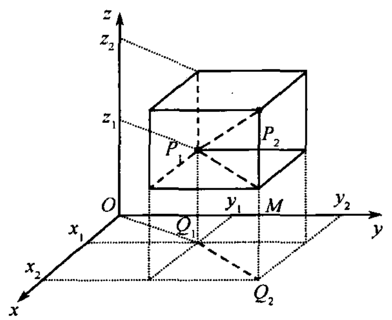


图 9-8

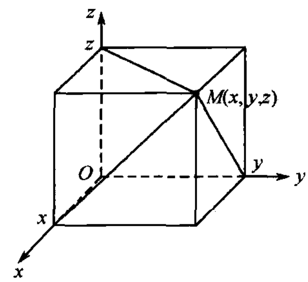


图 9-9

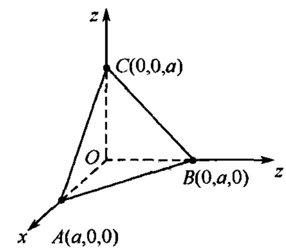


图 9-10

证明 因为

$$|AB| = \sqrt{(0-a)^2+(a-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{2}\,|a|,$$

$$|BC| = \sqrt{(0-0)^2+(0-a)^2+(a-0)^2} = \sqrt{2}\,|a|,$$

$$|CA| = \sqrt{(a-0)^2+(0-0)^2+(0-a)^2} = \sqrt{2}\,|a|,$$

所以

$$|AB| = |BC| = |CA|,$$

故 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

9.1.2 向量的概念

1. 向量及其几何表示

在自然科学中,经常使用的量有两类:一类量只有大小没有方向,可以用一个实数来表示,例如,距离、质量、温度等,通常把这些量称为标量(或数量);另一类量既有大小又有方向,不能只用一个实数来表示,例如,力、速度、加速度等.这种既有大小又有方向的量称为向量(或矢量).

在高等数学中用有向线段来代表向量.有向线段的长度表示该向量的大小,有向线段的方向表示该向量的方向.向量通常用黑体字母表示,如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 等,也可以用上方加有箭头的字母表示,如 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 等.如图 9-11 所示,以 M_1 为始点,以 M_2 为终点的向量记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$.

向量的大小称为向量的模.向量 $\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模分别记作 $|\boldsymbol{a}|$、$|\overrightarrow{M_1M_2}|$.模等于 1 的向量称为单位向量;模等于 0 的向量称为零向量,记作 $\boldsymbol{0}$,零向量没有确定的方向.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线平行时,就说向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记为 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$.类似地,还可以说一个向量与一条直线(或一个平面)平行或垂直.

定义 9.1.1 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同,就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,并记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

根据定义 9.1.1,如果两个向量的大小与方向是相同的,则不论它们的始点位置是否相同,都表示同一个向量,也就是说,向量可以平行移动,这样理解的向量叫做自由向量.本书中所涉及的向量都是自由向量.

如图 9-12 所示，设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，将它们的始点移动到同一点后，它们所在射线构成的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 显然，对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是这两个向量的夹角为 0 或 π.

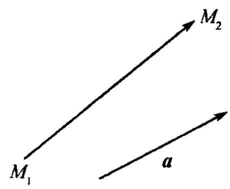
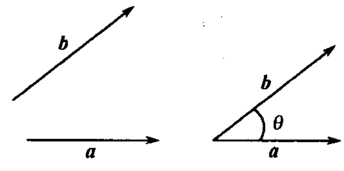


图 9-11



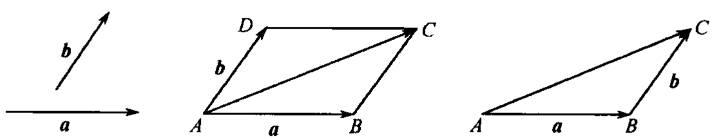
(a) (b)

图 9-12

2. 向量的加法

物理学中两个力或两个速度合成时，遵守平行四边形法则. 两个向量的相加同样按照平行四边形法则来定义.

定义 9.1.2 设有向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为邻边做平行四边形 $ABCD$（见图 9-13(a)），则向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



(a) (b)

图 9-13

也可以按照所谓三角形法则规定向量的加法.

定义 9.1.2′ 设有向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，称向量 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图 9-13(b)）.

按定义 9.1.2′，有限个向量相加时，可以把第二个向量的始点移动到第一个向量的终点，把第三个向量的始点移动到第二个向量的终点，依次下去，直到最后一个向量为止，以第一个向量的始点为始点，以最后一个向量的终点为终点的向量就是它们的和.

从图 9-14 及图 9-15 可以看出，向量的加法具有如下运算性质：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

若向量 $\boldsymbol{b}$ 加向量 $\boldsymbol{c}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的另外一条对角线（见图 9-16），它的始点是 $\boldsymbol{b}$ 的终点，它的终点是 $\boldsymbol{a}$ 的终点.

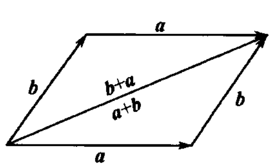


图 9-14

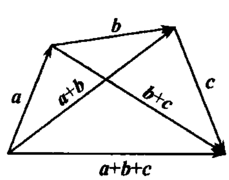


图 9-15

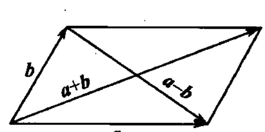


图 9-16

3. 数乘向量

定义 9.1.3 设 $\boldsymbol{a}$ 是任意向量，λ 是实数，则 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda > 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda < 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向.

$\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}| = 0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

求数和向量的乘积的运算称为数乘向量. 容易验证，数乘向量满足结合律与分配律. 设 λ、μ 为实数，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为向量，有

(1) $\mu(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$；

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$.

根据定义 9.1.3 可以直接得到以下两个结论.

(1) 设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，则 $\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right| = \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|} \cdot |\boldsymbol{a}| = 1$；

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分且必要条件是，存在数 λ，使得 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$（或 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$）.

结论(1) 说明向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^0$，即 $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$.

例 9.1.2 证明：连接三角形两边中点的线段平行于第三边并且等于第三边的 1/2.

证明 设 $\triangle ABC$ 的两条边 AB、AC 的中点分别为 D、E（见图 9-17），则

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

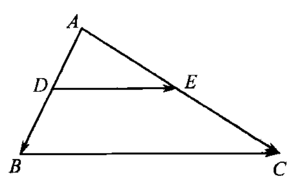


图 9-17

所以 $DE \parallel BC$，而且 $DE = \dfrac{1}{2}BC$.

9.1.3 向量的坐标表示

1. 向量在轴上的投影

规定了方向的直线称为轴.

定义 9.1.4 设有向量 $\overrightarrow{AB}$ 和轴 u. 过点 A 和点 B 分别作平面垂直于轴 u，与轴 u 的交点分别为 A' 和 B'（见图 9-18）. 称 $\pm|\overrightarrow{A'B'}|$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影，当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 u 同向时取正值，反向时取负值，记作 $Prj_u\overrightarrow{AB}$.

也称图 9-18 中的 A' 为点 A 在轴 u 上的投影，B' 为点 B 在轴 u 上的投影.

向量在轴上的投影是一个标量. 将向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行移动到 $\overrightarrow{A'B''}$（见图 9-18），可知

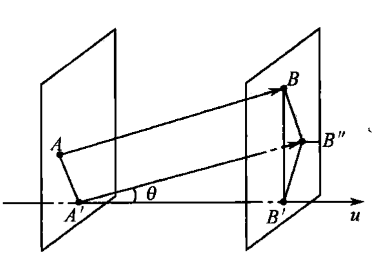


图 9-18

$$Prj_u\overrightarrow{AB} = A'B' = |\overrightarrow{A'B''}|\cos\theta = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$