普通高等学校“十一五”规划教材

线性代数

——经管类数学基础

主 编 过 静 王亚辉

北京航空航天大学出版社

普通高等学校“十一五”规划教材

线性代数

——经管类数学基础

主　编　过　静　王亚辉

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本教材是根据高等学校基础理论教学“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，按照国家教育部制定的《线性代数课程教学基本要求》而编写的。

本教材的内容为：矩阵与行列式、线性方程组、向量组的线性相关性、矩阵的特征值和特征向量、二次型等五章。每章均配有习题及自测题，书后附有参考答案。

本教材可作为高等学校管理类各专业及高等专科学校、高职院校相应课程教材或教学参考书，也可作为各类成人教育相应课程教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数：经管类数学基础/过静，王亚辉主编. —北京：北京航空航天大学出版社，2008. 12

ISBN 978-7-81124-617-9

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①过…②王… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. 0151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 008211 号

线性代数

——经管类数学基础

主　编　过　静　王亚辉

责任编辑：李文铁

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083)　发行部电话 010—82317024　传真 010—82328026

http://www.buaapress.com.cn　E-mail:bhpress@263.net

涿州市新华印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本:787×1 092　1/16　印张:9.5　字数:243 千字

2009 年 2 月第 1 版　2009 年 2 月第 1 次印刷　印数:4 000 册

ISBN 978-7-81124-617-9　定价:19.00 元

《线性代数——经管类数学基础》
教材编写委员会

主　编　过　静　王亚辉
副主编　程　洪　王茶生　黄怡旋

前　　言

线性代数是高等院校经济管理类专业的基础课之一，它在经济管理和运筹学等学科中有重要作用。

为适应我国在21世纪社会主义建设和经济发展的需要，培养基础扎实的创新型、高素质的人才，基础课特别是专业基础课不应削弱，反而应该加强。由于目前大多数学校都开设了经济管理的相关专业，但各个学校、各个研究方向对数学课的基础要求不同，本《线性代数》教材就是依据学校的不同需求，在保持传统教材优点的基础上，根据高等学校基础理论教学"以应用为目的，以必须够用为度"的原则，按照国家教育部制定的《线性代数课程教学基本要求》编写的。

本教材的编写力求概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题经精选均具有代表性和启发性。

本教材由浅入深，由易到难，循序渐进地介绍了线性代数的研究工具和基础理论，并注重理论联系实际，加强了概念与理论的背景和应用的介绍。全书共分5章，第1、2、5章由过静编写，第3、4章由王亚辉编写，程洪、王茶生和黄怡旋参与了习题编制及解答等工作。

本书可作为高等学校经济管理类各专业及高等专科学校、高职院校相应课程教材或教学参考书，也可作为各类成人教育相应课程教材或教学参考书。

在编写本教材的过程中，虽主观力求完善，但鉴于作者的水平和能力，教材中难免会有不少缺点和错误，恳请同行和读者批评赐教，使本书在教学中不断完善。

编　者

2008年11月

目　　录

第 1 章　矩　阵

第 2 章　线性方程组

第 3 章 向量组的线性相关性

第 4 章 矩阵的特征值和特征向量

第 5 章 二次型

习题参考答案

第1章　矩　阵

矩阵在经济和管理等方面都有着十分广泛的应用，并且大多数线性代数问题都可以用矩阵来描述，并借助矩阵的运算来解决，因此，矩阵是线性代数的主要研究对象之一，也是研究线性代数问题的一个重要工具*.

在这一章里，我们将介绍矩阵的运算、行列式、可逆矩阵、矩阵的初等变换和分块矩阵等关于矩阵的基本理论. 这些内容是学习后面知识的重要基础.

1.1　矩阵的概念

在生活中许多方面都涉及到矩阵的概念，下面我们先看几个例子.

例 1.1　设四种食品在三家超市中价格不同，现将其用表格表示，如表 1.1 所列.

表 1.1　四种食品在三家超市的不同价格

	甲	乙	丙	丁
1	2	5	9	12
2	3	4	8	10
3	2	5	10	13

其中，甲、乙、丙、丁表示食品，1、2、3 表示三个超市，利用本表可以很快查出每一种食品在不同超市的价格. 为了研究的方便常常将以上表格简单表示为

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & 10 \\ 2 & 5 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

例 1.2　四个城市间的单向航线如图 1.1 所示.

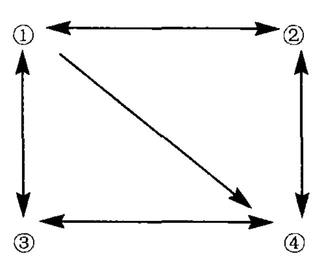

图 1.1　四个城市间的单向航线图

若令

* 正文中句号按照国际通用形式.

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有一条单向航线}\\ 0, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有航线}\end{cases}$$

那么图 1.1 可以表示为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

类似的，许多问题都可以用这种形式表示表格的内容，这就是我们要介绍的矩阵，因为表格中涉及到的都是数字，所以先给大家介绍一下数域的概念.

1.1.1 数 域

线性代数中的许多问题是在不同的数集范围内讨论，不同的数集中可能得到不同的结论.为此，需要先引入数域的概念.

定义 1.1 设 $\boldsymbol{F}$ 是由一些数组成的集合，其中包含 0 和 1. 如果 $\boldsymbol{F}$ 中的任意两个数（这两个数也可以相同）的和、差、积、商（除数不为零）仍然是 $\boldsymbol{F}$ 中的数，则 $\boldsymbol{F}$ 就称为一个数域.

例 1.3 全体有理数组成的集合 $\mathbf{Q}$、全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$ 和全体复数组成的集合 $\mathbf{C}$ 都是数域，分别称为有理数域、实数域和复数域.

例 1.4 全体整数组成的集合不是一个数域，因为任意两个整数的商（除数不为零）不一定是整数.

在本书中，主要涉及的数域大多是实数域 $\boldsymbol{R}$，故若无特别说明，各章中所涉及的数域均为实数域 $\boldsymbol{R}$；若是指任意数域，则用 $\boldsymbol{F}$ 表示.

1.1.2 矩阵的定义

定义 1.2 令 $\boldsymbol{F}$ 是一个数域，由 $\boldsymbol{F}$ 中的 $m\times n$ 个数 a_{ij}，$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的一个 m 行 n 列的数表 $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ 称为数域 $\boldsymbol{F}$ 上的一个 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元素 $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

通常用大写的拉丁字母，如 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵. 有时为了指明矩阵的行数和列数，也可以将 m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 时，也可将 $\boldsymbol{A}$ 记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的形式.

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数 m 与列数 n 相等时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵或 n 阶矩阵. 显然，一阶矩阵就是一个数.

元素全为零的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，或简记作 $\boldsymbol{O}$.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的元素 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 都是数域 $\boldsymbol{F}$ 中的数，则称 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\boldsymbol{F}$ 上的一个 $m\times n$ 矩阵.

1.1.3 几种特殊矩阵

1. 对角矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的 n 阶矩阵，称为对角矩阵，该矩阵中 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 位于矩阵的主对角线上（即从左上角到右下角），称为主对角线上的元素，而主对角线以外的元素 $a_{ij}(i \neq j)$ 全为零. 对角矩阵可以记作

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

例如，

$$\operatorname{diag}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. 数量矩阵

当对角矩阵主对角线上的元素都相同时，$\operatorname{diag}(a,a,\cdots,a)$ 称为数量矩阵. 即

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(a,a,\cdots,a) = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

3. 单位矩阵

如果 n 阶数量矩阵中元素 $a=1$ 时，则称此矩阵为单位矩阵，记作 $\boldsymbol{E}_n$，或简记为 $\boldsymbol{E}$. 即

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

4. 上三角形矩阵与下三角形矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵，即主对角线左下方元素全为零的 n 阶矩阵，称为上三角形矩阵. 类似地，形如主对角线右上方的元素全为零的 n 阶矩阵，称为下三角形矩阵. 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

因此，对角矩阵既可以看成是上三角形矩阵，也可以看成是下三角形矩阵.

5. 对称矩阵

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n$ 且 $i\neq j)$，$a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的运算

下面介绍矩阵的运算及其运算律. 正是矩阵的运算使矩阵成为解决实际问题的有力工具. 在此所讨论的矩阵均为同一个数域 $\boldsymbol{F}$ 上的矩阵.

1.2.1 矩阵的加法

定义 1.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，令

$$\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

由此可见，两个矩阵的加法就是将它们的对应的元素相加.

注意：只有行数相同，列数也相同的两个矩阵才能相加.

由加法定义可以直接验证，矩阵的加法满足以下四条运算性质：

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}$；

(4) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵,记作 $-\boldsymbol{A}$. 显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=(-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$$

由此可定义矩阵的减法

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

上述各式中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{O}$ 为 $m\times n$ 零矩阵.

1.2.2　数与矩阵的乘积

定义 1.4　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为数域 $\boldsymbol{F}$ 上的矩阵,k 是数域 $\boldsymbol{F}$ 中的数. 用数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素所得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积(或数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数乘),记作 $k\boldsymbol{A}$.

例 1.5　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2+(-1) & 0+1 & -1+2 \\ 3+(-2) & 1+1 & -2+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -6 & 3 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -8 \\ 12 & -1 & -19 \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为数域 $\boldsymbol{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵,$k,l\in\boldsymbol{F}$. 则由数与矩阵乘积的定义可以直接验证数与矩阵的乘法具有以下运算性质:

(1) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(2) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(3) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

(4) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

注意:(1) $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵 $-\boldsymbol{A}$ 也可以看作是用 -1 乘以 $\boldsymbol{A}$,即 $-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}$;

(2) 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都有公因子 k 时,可将 k 提到矩阵外面. 例如 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$,即数量矩阵 $\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a)=a\boldsymbol{E}$.

例 1.6　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$满足 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{X}$,求 $\boldsymbol{X}$.

解

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1.2.3 矩阵的乘法

在给出矩阵乘法的定义之前,先看下面例题.

引例 某工厂生产三种产品,各种产品每件所需的生产成本和每一季度每一种产品的产量由下面矩阵给出:

$$P=\begin{array}{c}\\ \text{原材料}\\ \text{劳动力}\\ \text{管理费}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{array}\\ \begin{bmatrix}0.10 & 0.30 & 0.15\\ 0.30 & 0.40 & 0.25\\ 0.10 & 0.20 & 0.15\end{bmatrix}\end{array}\qquad M=\begin{array}{c}\\ \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{春} & \text{夏} & \text{秋} & \text{冬}\end{array}\\ \begin{bmatrix}4\,000 & 4\,500 & 4\,500 & 4\,000\\ 2\,000 & 2\,600 & 2\,400 & 2\,200\\ 5\,800 & 6\,200 & 6\,000 & 6\,000\end{bmatrix}\end{array}$$

现在希望求出各个季度所需各类成本,即

$$\begin{array}{c}\\ \text{原材料}\\ \text{劳动力}\\ \text{管理费}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{春} & \text{夏} & \text{秋} & \text{冬}\end{array}\\ \begin{bmatrix}? & ? & ? & ?\\ ? & ? & ? & ?\\ ? & ? & ? & ?\end{bmatrix}\end{array}$$

该成本可以利用 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{M}$ 两个矩阵中的数据算出.例如夏季所需原材料的总量为

$$0.1\times 4\,000+0.30\times 2\,000+0.15\times 5\,800=1\,870$$

这就是矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第一行与矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的第一列对应位置处数据的乘积之和.

又如秋季劳动力的成本为

$$0.30\times 4\,500+0.40\times 2\,400+0.25\times 6\,000=3\,810$$

这就是矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 2 行与矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的第 3 列对应位置处数据的乘积之和.

类似的可以求出各个季度所需各类成本的情况表

$$\begin{array}{c}\\ \text{原材料}\\ \text{劳动力}\\ \text{管理费}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{春} & \text{夏} & \text{秋} & \text{冬}\end{array}\\ \begin{bmatrix}1\,870 & 2\,160 & 2\,070 & 1\,960\\ 3\,450 & 3\,940 & 3\,810 & 3\,580\\ 1\,670 & 1\,900 & 1\,830 & 1\,740\end{bmatrix}\end{array}$$

考察了上面这个例子后,下面给出矩阵乘法的定义.

定义 1.5 设矩阵设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$则称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

例 1.7 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ \hdashline 0 & 3\\ \hdashline 1 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{c:c:c:c}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)$,求 $\boldsymbol{AB}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}3\times1+(-1)\times0 & 3\times0+(-1)\times2 & 3\times1+(-1)\times1 & 3\times(-1)+(-1)\times0\\ 0\times1+3\times0 & 0\times0+3\times2 & 0\times1+3\times1 & 0\times(-1)+3\times0\\ 1\times1+0\times0 & 1\times0+0\times2 & 1\times1+0\times1 & 1\times(-1)+0\times0\end{bmatrix}=$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

例 1.8　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对于矩阵的乘法需注意以下五点：

(1) 只有前一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与后一矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时，$\boldsymbol{AB}$ 才有意义.

(2) 乘积矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 的第 i 行第 j 列的元素 c_{ij} 等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行每一个元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 第 j 列对应元素的乘积之和.

(3) 乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

(4) 矩阵的乘法不满足交换律，有时 $\boldsymbol{AB}$ 有意义但 $\boldsymbol{BA}$ 未必有意义，即使 $\boldsymbol{BA}$ 有意义也不一定和 $\boldsymbol{AB}$ 相等，比如例 1.7 和 1.8.

(5) 两个非零矩阵相乘可能等于零矩阵，比如例 1.8.

由矩阵的乘法可以证明矩阵的乘法满足以下运算性质*：

(1) 结合律　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$；

(2) 分配律　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{AB})+(\boldsymbol{AC})$　$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{BA})+(\boldsymbol{CA})$　$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(3) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

另外，$\boldsymbol{E}_m\times\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\times\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 因此，单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 在矩阵乘法中的地位类似于 1 在数的乘法中的作用.

关于矩阵的乘法还有一个重要的性质：同阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 乘积的行列式等于 $\boldsymbol{A}$ 的行列式与 $\boldsymbol{B}$ 的行列式的乘积，即

$$\det\boldsymbol{AB}=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}$$

还可以推广到多个矩阵相乘的情况，即

$$\det(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)=\det\boldsymbol{A}_1\det\boldsymbol{A}_2\cdots\det\boldsymbol{A}_s$$

1.2.4　矩阵的方幂

由于矩阵乘法满足结合律，可得到方阵的方幂.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，对于正整数 m，则定义

$$\boldsymbol{A}^m=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{m\text{ 个}}$$

同时规定

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$$

根据方幂的定义，方阵的方幂有以下性质.

---

* 以上矩阵乘法假设都有意义.

设 k,l 为任意非负整数，则有

(1) $A^kA^l=A^{k+l}$；

(2) $((A)^k)^l=A^{kl}$.

注意：由于矩阵乘法一般不满足交换律，因此 $(AB)^k$ 一般不等于 $A^kB^k(k>1)$. 此外，如果 $A^k=O(k>1)$，也不一定有 $A=O$. 例如

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq O,\qquad 但\ A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$$

例 1.9 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$，求 A^k.

解 首先观察

$$A^2=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{bmatrix}$$

由此推测

$$A^k=\begin{bmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{bmatrix}\quad(k\geqslant 2)$$

现用数学归纳法对推测结果进行证明：

(1) 当 $k=2$ 时，显然成立.

(2) 假设阶数为 k 时该推测结果成立，则 $k+1$ 时，

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{bmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^{k+1}&(k+1)\lambda^k&\frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1}\\0&\lambda^{k+1}&(k+1)\lambda^k\\0&0&\lambda^{k+1}\end{bmatrix}$$

则由数学归纳法原理可知：

$$A^k=\begin{bmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{bmatrix}$$

1.2.5 矩阵的转置

定义 1.6 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行与列互换，得到的 $n\times m$ 矩阵，称为 A 的转置矩阵，简称为 A 的转置，记作 A^T. 即

如果

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

则

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

例如 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

又如，设 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则

$$X^{\mathrm{T}}Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n) = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}.$$

当 A 为对称矩阵时，由于 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,\cdots,n)$，因此 $A^{\mathrm{T}}=A$；而当 A 为反对称矩阵时，有 $a_{ij}=-a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，也即 $A^{\mathrm{T}}=-A$.

对于矩阵的转置，有以下运算法则：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；

(3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$；

(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

其中矩阵 A，B 可进行有关运算，$k\in F$. 运算法则(1)～(3)很容易由定义直接验证. 对于(4)，我们给出一般情况下的证明：

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则 AB 为 $m\times n$ 矩阵，故 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 为 $n\times m$ 矩阵；另一方面，由于 B^{T} 为 $n\times s$ 矩阵，A^{T} 为 $s\times m$ 矩阵，从而 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 为 $n\times m$ 矩阵. 这表示 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 对应的行数和列数相等.

再证明它们的对应元素都相等：

设 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 j 行第 i 列的元素为 d_{ji}，由 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 AB 的关系知，d_{ji} 即为 AB 的第 i 行第 j 列的元素，从而

$$d_{ji} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$

另一方面，设 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 j 行第 i 列的元素为 c_{ji}，故 c_{ji} 为 B^{T} 第 j 行的元素与 A^{T} 第 i 行列对应元素的乘积之和，也就是 B 的第 j 列元素与 A 的第 i 行对应元素的乘积之和，即

$$c_{ji} = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{sj}a_{is} = d_{ji} \qquad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$$

这说明 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 所有的对应元素都相等，因此有

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$