概率论

李开灿 蔡择林 编著

湖北科学技术出版社

概率论

GAILU LUN

李开灿 蔡择林 编著

湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论/李开灿,蔡择林主编. －武汉:湖北科学技术出版社,2009.11.

ISBN 978－7－5352－4435－2

Ⅰ.概…　Ⅱ.①李…②蔡…　Ⅲ.概率论　Ⅳ.O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 184795 号

策　　划:李慎谦

责任编辑:谭学军　王小芳　　　　封面设计:戴　旻

出版发行:湖北科学技术出版社　　　　电话:027－87679468

地　　址:武汉市雄楚大街 268 号　　　　邮编:430070

(湖北出版文化城 B 座 12－13 层)

网　　址:http://www.hbstp.com.cn

印　　刷:湖北鄂东印务有限公司　　　　邮编:438000

850×1168　1/32　10.25 印张　1 插页　249 千字

2009 年 11 月第 1 版　　　　2009 年 11 月第 1 次印刷

定价:22.00 元

前 言

概率论是研究随机现象统计规律性的一门数学分支，一方面它有别开生面的研究课题，有自己独特的概念和研究方法，理论严谨，内容丰富，应用广泛，结果深刻。另一方面，它与其他数学分支又有紧密的联系，且非常贴近生产实际，不论从理论研究或实际应用来考虑，都可算得是最活跃的一个数学分支。

目前，我国的高等教育已经从过去的精英教育转向了大众化教育，如何使我们的学生既具备扎实的专业基础又能适应社会的需要，加强教材建设，研究教学方法是高校教师在新时期需要努力尝试的首要问题，其意义现实而又深远，我们编写这本教材的目的就是使它能够适应新时期普通本科院校教学的需要。

考虑到我们的学生将来大都要涉及概率论相关教学或知识应用，因此本书企图着力讲清一些基本概念和与之有关的基础理论问题，同时尽可能地用客观世界中常见的实例来说明它们的应用，加深学生对基本概念和基础理论的理解和掌握。并希望通过该课程的教学培养学生创新意识、创新思维和创新能力，逐步提高学生运用知识解决实际问题的能力。

本书是根据概率论的教学大纲，由编者李开灿（第一章、第二章、第五章），蔡择林（第三章、第四章及各章习题）在多年讲授该课程的讲义基础上编写而成的，本书力求重难点更为突出，文字通俗易懂，深入浅出，便于学生自学。考虑到目前学生的知识结构，对于在计划学时内无法完成且教学大纲不作要求的内容作了适当的删减，增加了一些典型例题；在处理多维随机变量方面我们主要讨论二维情形，同时重点讨论实际中常见的离散型与连续型两大类，对一般情形只给出其结论，以便学生对知识的理解和掌握；另外，

习题的配备也富有特色，既有客观题又有主观题，这有利于学生对知识的理解和提高应用能力，教师可从主观题中布置课外练习，客观题由学生自己课后完成，书后附有正确答案可自行检查。

在编写此书的过程中，我们得到本院徐侃、潘继斌、胡宏昌、江秉华等同仁的许多帮助，从初稿的讨论到审稿及校对，他们作了很多工作，在此一并感谢！另外，由于编者水平有限，书中如有缺点和错误，欢迎广大师生批评指正。

编 者

2009 年 6 月

目　　录

第1章　随机事件及其概率

1.1　随机现象的概述

1.1.1　必然现象与随机现象

人们在对客观世界的许多自然现象和社会现象进行观察时，根据它们在一定条件下是否会发生可以将其分成两大类：**必然现象**和**随机现象**. 必然现象就是在相同的条件下，无论我们进行多少次观察，它都发生同样的结果. 例如"在没有外力作用的条件下等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动"，"地球表面的水必然向低处流动"，"同性电荷必然互相排斥"，"标准大气压下纯水加热到100℃必然沸腾"等等，这些都是必然现象. 和必然现象不同，还有许多现象即使在相同的条件下进行观察，它们可能发生也可能不发生. 例如在相同的条件下掷一枚硬币，其结果可能正面(字面)向上，也可能反面(国徽)向上，并且不论怎样控制投掷条件，每次投掷之前都无法肯定投掷的结果是什么. 又如对100粒棉子进行发芽试验，其结果可能是全部发芽，也可能是99粒发芽，还可能是98粒发芽，… 等等. 发芽粒数是事先不能确定的. 这种在相同条件下反复观察，可能发生这种结果，也可能发生别样的结果的现象称为**随机现象**.

随机现象普遍存在于自然界和人类社会生活中，它对人们的社会生活有着重要影响. 例如：若某车间有200台车床，每台工作时耗电1千瓦. 由于检修，更换刀具，测量等原因，每台车床只有60% 的时间在工作，问供给这个车间多少电，才能以99.9% 的把握保证不会因为缺电而影响生产？显然，供给这个车间200千瓦的电，肯定能以99.9% 的把握保证不会因为缺电而影响生产，但是

考虑到每台车床只有 60% 的时间在工作和当前电力资源紧张的形势，能否少供一点电也能以 99.9% 的把握保证不会因为缺电而影响生产呢？这样的问题是激励人们对随机现象进行研究的动力源泉.

为了便于描述，人们把随机现象的每一种可能的结果都称为**事件**，例如"掷一枚硬币正面向上"，"播种 100 粒棉子有 98 粒发芽"等等都是随机事件. 在随机现象中必然会发生的结果称为**必然事件**，一定不会发生的结果称为**不可能事件**，例如投掷一颗骰子，"出现的点数小于 10"是个必然事件，"出现的点数大于 10"就是不可能事件.

1.1.2 随机现象的统计规律 —— 事件的频率与概率

人们经过长期的实践观察发现，随机现象虽然就每一次试验或观察而言它是不确定的，但在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性. 例如观察投掷一枚质地均匀的硬币，在每次投掷前，虽不能断定该次结果是正面向上还是反面向上，可是多次重复投掷，就可以看出"正面向上"与"反面向上"这两种结果的发生的次数大致各占一半，就棉子发芽试验来说，如果我们同时从一批棉子中，随意地取出数个"100 粒"进行发芽试验，结果会发现每个"100 粒"中发芽的粒数都在某一定数附近摆动，比如说在 95 粒附近摆动，我们就可以认为这批棉子的发芽率为 95%. "正面向上占半数"，"发芽率为 95%"，是我们通过试验或观察而找出的这两种随机现象的规律性. 这种规律性是通过大量重复试验而得来的，故称为**统计规律性**.

为了认识随机现象中的规律，人们往往要对随机现象进行大量重复的观察或试验，从随机事件出现的频率，一般能够探索出事件的发生规律，为此我们需要对频率进行一些讨论.

1. 关于频率的稳定性，概率的统计定义

对于随机事件 A，若在 N 次试验中出现了 n 次，则称

$$F_N(A) = \frac{n}{N}$$

为随机事件 A 在 N 次试验中发生的频率.

一个随机事件在某次试验中由于受许多人们无法控制的随机因素的影响,不能断言它是否发生.但是,在大量重复试验中,就可以发现此事件发生的频率将稳定在某一常数附近,呈现出统计规律性,这就是频率的稳定性.

例如,历史上曾经有些人做过投掷硬币的试验,计算出现正面的频率,见表 1.1.

表 1.1　投掷硬币的试验

实验者	N	n	$F_N(A)=\frac{n}{N}$
De Morgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
K. Pearson	12 000	6 019	0.501 6
K. Pearson	24 000	12 012	0.500 5

从试验记录中可以看到,在多次重复试验中,同一事件发生的频率虽然并不完全相同,但却在一个固定的数值附近摆动,而呈现出一定的稳定性(例如掷硬币"正面"出现的频率摆动的稳定值是 $\frac{1}{2}$),而且随着重复试验次数的增加,这种现象愈加显著.频率的这种稳定性揭示了一个随机事件发生的可能性有一定大小,频率稳定在较大的数值附近,表明相应的事件发生的可能性较大,频率稳定在较小的数值附近,表明相应的事件发生的可能性较小.而频率所接近的这个固定数值,就可作为相应事件发生的可能性大小的一个客观定量的度量,称为**相应事件的概率**.对于随机事件 A,用

$P(A)$ 记它的概率. 因此,我们得到下述定义.

定义 1.1.1 在大量重复试验中,如果一个事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近摆动,这个数 p 就称为 A 的概率,记为 $P(A) = p$.

常常将上述定义称为**概率的统计定义**.

定义 1.1.1 中提到的大量重复试验,要求它满足:各次试验中,事件 A 出现的频率互相没有影响,这一要求称为各次试验之间是相互独立的. 独立性概念,以后还会专门讨论.

2. 频率与概率的基本性质

概率 $P(A)$ 度量了事件 A 发生的可能性的大小,而 $P(A)$ 又可以通过 A 发生的频率的稳定性而得到. 因此可以预料,若 $P(A)$ 较大,则在 N 次重复独立试验中,频率 $F_N(A)$ 也较大;反之,若 $P(A)$ 很小,则 $F_N(A)$ 也很小. 当 N 逐渐增大时,$F_N(A)$ 逐渐稳定于 $P(A)$,于是概率 $P(A)$ 应与频率 $F_N(A)$ 有许多相似的性质. 现在对它们的基本性质讨论如下.

首先,频率具有**非负性**,即对任一事件 A,总有

$$0 \leqslant F_N(A) \leqslant 1, \tag{1.1.1}$$

因为 $F_N(A) = \dfrac{n}{N}$,$(N > 0, 0 \leqslant n \leqslant N)$. 其中 N 为试验的总次数,n 为在 N 次试验中 A 出现的次数.

其次,若以 Ω 表示必然事件,那么在 N 次试验中应出现 N 次,故有

$$F_N(\Omega) = 1. \tag{1.1.2}$$

此性质称为频率的**规范性**.

第三,若 A 与 B 是两个不能同时发生的事件,以 $A+B$ 表示 A、B 两个至少有一个发生的事件,则应有

$$F_N(A+B) = F_N(A) + F_N(B). \tag{1.1.3}$$

事实上,因为 A 与 B 不能同时发生,故在 N 次重复试验中,A

$+B$ 发生的次数,必为 A 发生的次数与 B 发生的次数之和. 设 A 发生 m 次,B 发生 n 次($m\geqslant 0,n\geqslant 0,m+n\leqslant N$),从而

$$F_N(A+B)=\frac{m+n}{N}=\frac{m}{N}+\frac{n}{N}=F_N(A)+F_N(B). \tag{1.1.4}$$

此性质称为频率的**可加性**.

频率还具其他一些性质,例如不可能事件 $\varnothing$ 的频率为零等等,这里不再细说. 因为频率 $F_N(A)$ 稳定于概率 $P(A)$,因而有理由要求概率也具有频率的上述性质,即:① 非负性:对任何随机事件 A,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;② 规范性:$P(\Omega)=1$;③ 可加性:若 A 与 B 是两个不能同时发生的事件,以 $A+B$ 表示 A、B 两个至少有一个发生的事件,则应有

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.1.5}$$

这些性质将是我们抽象出随机事件概率严格数学定义的理论基础.

1.1.3　概率论的学科性质

概率论是研究随机现象中随机事件的相互关系及其内在数量规律的数学学科. 概率论从 1654 年诞生到现在,经过长时间的发展,已经形成了自己独特的概念和研究方法,它的理论严谨,内容丰富,结果深刻,不论从理论研究还是从实际应用的角度来考虑,它都是当今数学领域最活跃的数学分支之一.

1.2　样本空间和随机事件

1.2.1　样本空间

概率论的一切概念都是从样本空间与事件这两个最基本的概念而产生的. 前面提到,我们可以通过随机试验来研究随机现象的统计规律性. 概率论所描述的随机试验指的是既包括各种各样的

科学实验，也包括对某一事物的某一特征的观察等等，为了使读者确切理解随机试验的含义，现在给出一个描述性的定义如下.

设 E 为一试验，如果它满足：① 试验可以在相同条件下重复地进行；② 每次试验的可能结果不只一个，并且能事先知道试验的所有可能结果；③ 每次试验总是出现这些可能结果中的一个且只出现一个，但在试验之前，却不能确定会出现哪一个结果. 则称 E 为**随机试验**，简称为试验.

随机试验 E 中的每一个可能结果称为一个**基本事件**（或样本点），全体基本事件的集合称为**样本空间**或称为**基本事件空间**，通常用 Ω 表示，Ω 中的点即基本事件，常用 ω 表示. 特别当 Ω 只包含有限（比如 n）个点时，就称 Ω 为有限样本空间，记为 $\Omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_n)$. 在研究具体问题时，认清样本空间是由什么构成的是十分重要的事情，为此，我们来举一些例子.

例 1.2.1 设随机试验 E 为掷一枚普通的硬币而观察所出现的面；ω_1 表示出正面，ω_2 表现出反面，于是 Ω 是由两个基本事件构成：$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 1.2.2 设 E 为一枚硬币掷两次而观察正、反面出现的试验，在这里，掷两次硬币的联合结果才算是一次试验，试验的结果有 4 个：(ω_1,ω_1)，(ω_1,ω_2)，(ω_2,ω_1)，(ω_2,ω_2). 其 ω_i 的意义同上例.

比如$\{\omega_2,\omega_1\}=$（反，正）表示“第一次出现反面，第二次出现正面”，其余类推. 这样，样本空间 Ω 由 4 个基本事件构成：

$$\Omega=\{(\omega_1,\omega_1),(\omega_1,\omega_2),(\omega_2,\omega_1),(\omega_2,\omega_2)\}.$$

它与例 1.2.1 不同的是每个基本事件是例 1.2.1 中两个基本事件的一个适当的有序组合，若记 $\omega^1\triangleq(\omega_1,\omega_1)$，$\omega^2\triangleq(\omega_1,\omega_2)$，$\omega^3\triangleq(\omega_2,\omega_1)$，$\omega^4\triangleq(\omega_2,\omega_2)$，则 Ω 也可表示为

$$\Omega=\{\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4\}.$$

例 1.2.3 设 E 表示记录某电话交换台在上午八时到九时的 1 小时内接到的呼叫次数，基本事件（记录结果）是非负整数（接到

的呼叫数)，以 ω_i 表示接到 i 次呼叫，显然，由于不能规定一个呼叫数的上界，则样本空间

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\},$$

如果简记 ω_i 为 i，则 $\Omega = \{0,1,2,\cdots\}$.

例 1.2.4　向某一目标射出一发炮弹，E 表示观察弹着点与目标的偏差，这时基本事件可以是任何一个非负实数(偏差值)，若以 ω_d 表示偏差为 d，则样本空间 $\Omega = \{\omega_d, d \geqslant 0\}$，若简记 ω_d 为 d，则 $\Omega = \{d : d \geqslant 0\}$.

例 1.2.5　若 E 为观察某地区的平均温度，样本空间自然可取为 $\Omega = (-\infty,\infty)$ 或 $\Omega = [a,b]$.(实际上取 $(-\infty,\infty)$ 时，Ω 中有许多点是多余的，因为温度不可能低于 -273℃).

从上面的例子我们看到，为了给出样本空间，必须确切理解试验的内容和观察的目的. 对于一个实际问题，如何用一个恰当的样本空间描述，也是值得研究的. 因为许多表面上不同的实际问题通过适当的抽象后，描述它们的样本空间是相同的，所以在概率论中，一般研究的都是确定的样本空间，只要对这种样本空间的内在的概率关系研究清楚了，就能使我们掌握这一类随机现象的本质，从而使得到的概率模型有更广泛的应用. 例如只包含两个基本事件 ω_1, ω_2 的基本事件空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$，是最简单的有限样本空间，它既能作为掷硬币观察其出正面或反面的模型，这时 ω_1 表示“出正面”，ω_2 表示“出反面”. 也能作为产品检验中出现“合格品”与“不合格品”的模型，只要用 ω_1 表示“合格品”，ω_2 表示“不合格品”即可. 同理又可用于医学检验中的“有病”与“无病”以及射击中“命中目标”与“未命中目标”等等. 尽管问题的实际内容如此不同，却都能归结为同一样本空间，用同样的概率模型处理，所以前面 5 个例子有着广泛的代表性.

1.2.2　事件

我们把随机现象的表现或结果都称为随机事件. 有了样本空

间的概念后，就可以通过基本事件来定义事件. 我们还是从考察一个实际例子开始.

例 1.2.6 若随机试验是从包含同样大小的 2 只红球(记作 a_1,a_2)和 3 只白球(记作 b_1,b_2,b_3)的袋子中任意取出 2 球. 例如取出的两球是 a_1 和 b_3，则 (a_1,b_3) 就是试验的一个可能结果. 若将每一可能结果看作是一个元素或一个点，则样本空间 Ω 由 10 个点构成：

$$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),\\(a_2,b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\}.$$

每个点当然是我们考虑的事件，称为基本事件，因而它有 10 个基本事件. 但是我们还可以考虑另外一些事件，例如

A_0:“没有抽到红球”

A_1:“至少抽到一红球”

A_2:“抽到 2 红球”。

在一次试验中，A_0 发生，当且仅当在这次试验中出现点 (b_1,b_2)，(b_1,b_3)，(b_2,b_3) 中的一个，这样我们可以认为 A_0 是由三个基本事件 (b_1,b_2)，(b_1,b_3)，(b_2,b_3) 共同组成的，而将 A_0 定义为它们组成的集合：

$$A_0=\{(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\}.$$

因此 A_0 是 Ω 的一个子集，同理 A_1 发生当且仅当 (a_1,a_2)，(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_1,b_3)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_2,b_3) 中的一个发生，因此得

$$A_1=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),\\(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)\}.$$

它也是 Ω 的一个子集(由 Ω 的七个点构成). A_2 发生当且仅当点 (a_1,a_2) 发生，故得 $A_2=\{(a_1,a_2)\}$，A_2 是由一个基本事件 (a_1,a_2) 构成的单元素集合，它实际是一个基本事件.

我们通常将**事件定义为样本空间 Ω 的某个子集**，称事件 A 发生当且仅当试验结果是 A 中的某一个基本事件 ω.